MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON
L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:
W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

30. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

QA1
188
.30

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

30. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

66 53029
QA1
M88
V.30

Inhaltsverzeichnis

Seite

Alexits, G. v., Über eine Hadamardsche Fragestellung 43
Alexits, G. v., Über die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen . . . 47
Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften 320
Berwald, L., Über die n-dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind 449
Besicovitch, A. S., On Lipschitz numbers 514
Brauer, R., Über Systeme hyperkomplexer Zahlen 79
Břečka, W., und J. Geronimus, Über die monotonen Polynome, welche die minimale Abweichung von Null haben 357
Chwistek, L., Neue Grundlagen der Logik und Mathematik 704
Ernst-Abbe-Gedächtnispreis 320
Evelyn, C. J. A., and E. H. Linfoot, On a Problem of the Additive Theory of Numbers 433
Franklin, Ph., Almost periodic recurrent motions 325
Geronimus, J., und W. Břečka, Über die monotonen Polynome, welche die minimale Abweichung von Null haben 357
Gołąb, St., Über ausgezeichnete Tangenten einer regulären Kurve 754
Hlavatý, V., Natürliche Gleichung der Kurven auf einer allgemeinen Fläche im metrischen Raume 470
Hlavatý, V., und J. A. Schouten, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung 414
Hopf, E., Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme 404
Jarník, V., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln 768
Kähler, E., Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle 188
Knopp, K., Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern 387
Landau, E., Über einen Valironschen Satz 205
Landau, E., Über die Carathéodorysche Verschärfung des großen Picardschen Satzes 208
Landau, E., Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten 608
Landau, E., Über schlichte Funktionen 635
Landau, E., Nachtrag zu meiner Arbeit „Über die Carathéodorysche Verschärfung des großen Picardschen Satzes“ 796
Lichtenstein, L., Bemerkung über einen Verzerrungssatz bei topologischen Abbildungen in der Hydromechanik 321
Lichtenstein, L., Eine elementare Bemerkung zur reellen Analysis 794
Liebmann, H., Die Verbiegung der konisch-zylindrischen Flächen 173
Linfoot, E. H., and C. J. A. Evelyn, On a Problem of the Additive Theory of Numbers 433

Seite

Löbell, F., Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen . . . 572
Lösch, Fr., Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen 725
Maier, W., Euler-Bernoullische Reihen 53
Mayrhofer, K., Topologische Fragen der Differentialgeometrie. VI. 131
Mayrhofer, K., Topologische Fragen der Differentialgeometrie. VII. 144
Meyer, W. Fr., Das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen 108
Mollerup, J., Das Punktspektrum eines beschränkten symmetrischen Kerns ohne Streckenspektrum 693
Mukhopadhyaya, S., Generalized form of Böhmer's Theorem for an Elliptically Curled Non-Analytic Oval 560
Neumann, J. v., Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen . 1
Neumann, J. v., Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen 3
Nikliborc, W., Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten 787
Noether, E., Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie 641
Obreschkow, N., Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen . . 375
Pollaczek, F., Über die Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper 520
Schoenberg, I., Über total monotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion . . 761
Scholz, A., Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe 332
Schouten, J. A., Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n 149
Schouten, J. A., und V. Hlavatý, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung 414
Schur, A., Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Liebmann . . . 185
Späth, H. †, Über Lambertsche Reihen 481
Späth, H. †, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen nichthomogener linearer Differentialgleichungen 487
Thomsen, G., Berichtigung zu meiner Arbeit „Über die Bewegung eines kleinen starren Probekörpers in beliebig vorgegebenen Gravitationsfeldern“ 639
Tschakaloff, L., Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke . 552
Volk, O., Anmerkung zu der vorstehenden Note des Herrn Liebmann, betreffend die Darbouxschen Gleichungen 186
Wintner, A., Über die Konvergenzfragen der Mondtheorie 211
Wintner, A., Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen 228
Wintner, A., Bemerkung über die Eigenwellen der Kármánschen Wirbelstraßen 283
Wintner A., Ein qualitatives Kriterium für die Konvergenz der assoziierten Kettenbrüche 285
Wintner, A., Diophantische Approximationen und Hermitesche Matrizen. I. . . 290

Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen.

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Im folgenden soll eine Variante des Beweises von Minkowskis Satz über Linearformen[1]) angegeben werden, die bisher wohl noch nicht Beachtung gefunden hat. Ihre Darlegung soll etwa im Anschluß an Minkowskis ursprünglichen Beweis erfolgen, dem der Volumbegriff im n-dimensionalen Raume zugrunde liegt.

Mit Hilfe von Volumbetrachtungen gewinnt bekanntlich Minkowski das folgende Zwischenresultat:

„Es seien n Linearformen

$$L_\mu(x_1, \ldots, x_n) = a_{\mu 1} x_1 + \ldots + a_{\mu n} x_n \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

gegeben, mit der Determinante

$$D = |a_{\mu\nu}| \neq 0.$$

Wenn $c_1, \ldots, c_n$ irgendwelche positive Zahlen mit dem Produkt $|D|$ sind, so gibt es mindestens ein System ganzer nationaler $x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$|L_\mu(x_1, \ldots, x_n)| \leqq c_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

gilt."

Dieses Resultat gilt zunächst nur für reelle $a_{\mu\nu}$, wird aber durch eine einfache Transformation auf komplexe übertragen. (In diesem Falle muß mit jedem L_μ auch seine konjugierte Form $L_{\mu'}$ vorkommen und $c_\mu = c_{\mu'}$ sein.)

Aus Minkowskis Resultat folgt insbesondere

$$|L_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \ldots \cdot L_n(x_1, \ldots, x_n)| \leqq |D|.$$

Nun kann für $n > 1$ das Gleichheitszeichen in dieser Relation ausgeschlossen werden (für $n = 1$ ist es, wie man leicht sieht, nicht der Fall), was nach

[1]) Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1911, 2. Bd. XXV.

Minkowski durch Grenzbetrachtungen geschieht. Diesen letzteren Schritt auf eine andere, und wie wir glauben einfachere Art auszuführen, ist der Zweck der vorliegenden Note.

Man wähle $c_1 > 0$ von allen Zahlen

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n$$

($x_1, \ldots, x_n$ ganz rational) verschieden; dies ist möglich, da diese Zahlen eine abzählbare Menge bilden. Sodann wähle man $c_2, \ldots, c_n$ beliebig, aber unter Berücksichtigung von

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n = |D|.$$

Nach dem Zwischenresultat von Minkowski existiert ein System ganzer rationaler $x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$|L_\mu(x_1, \ldots, x_n)| \leqq c_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

gilt. Für $\mu = 1$ kann jedoch (nach unserer Annahme über c_1) das Gleichheitszeichen nicht gelten. Folglich ist das Produkt der L_μ kleiner als

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n = |D|.$$

(Eingegangen am 1. September 1926.)

Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen.

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

§ 1.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist, die Rolle der Stetigkeits-, Differentiierbarkeits- und Analytizitätsannahmen klarzustellen, die in der Theorie der (kontinuierlichen) Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen eine entscheidende Rolle spielen. Es wird sich im Laufe unserer Ausführungen zeigen, daß die Verhältnisse, die bei den Gruppen linearer Transformationen bestehen, in den meisten Beziehungen recht günstige sind.

Es wird uns nämlich gelingen, eine jede solche Gruppe (ohne Einschränkungen) auf diejenige Form zu bringen, die in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen allein berücksichtigt wird; eine Gruppe linearer Transformationen hat stets einen Normalteiler, der durch eine endliche Zahl von Parametern analytisch und im kleinen ein-eindeutig darstellbar ist, und dessen Faktorgruppe diskret ist. (Diese Begriffe müssen und werden wir natürlich noch näher präzisieren.)

Ferner können wir jeder linearen Gruppe eine „Infinitesimalgruppe" auf einwandfreiem Wege zuordnen, und die Art und Weise, wie sich Gruppe und Infinitesimalgruppe gegenseitig bedingen, erweist sich als höchst einfach.

Demgegenüber zeigt sich, daß nicht jeder „Infinitesimalgruppe" im üblichen Sinne des Wortes eine Gruppe zuordnen läßt; dieser letztere Umstand soll im Anhang behandelt werden.

Für die Darstellungen gewinnen wir das folgende Resultat: alle Darstellungen einer linearen Gruppe, deren Schwankung in der Umgebung der

Einheit <1 ist (bei geeigneter Definition der „Entfernung“ im Raume der linearen Transformationen), sind durchweg stetig, beliebig oft differentiierbar, ja sie können sogar in der Umgebung eines jeden Elementes der Gruppe durch Potenzreihen dargestellt werden. (In diesen Potenzreihen treten aber — bei komplexen Gruppen — die Real- und Imaginärteile der Transformationskoeffizienten gesondert auf, so daß hieraus keine Analytizität im gewöhnlichen Sinne folgt. Dieselbe ist ja im allgemeinen auch nicht vorhanden[1].)

Ferner existiert zu jeder solchen Darstellung die sogenannte „Infinitesimaldarstellung“ mit den gewohnten Eigenschaften.

Die Prämisse: Schwankung in der Umgebung der Einheit <1 läßt sich aber nicht mehr wesentlich verschärfen: denn es gibt, wie wir zeigen werden, unstetige Darstellungen, bei denen diese Schwankung $=2$ ist. (Diese Darstellungen sind übrigens überall unstetig.) Es kann sich also höchstens noch um Konstantenverbesserungen handeln.

§ 2.

Der innere Grund dieser, an den „pathologischen“ Möglichkeiten der reellen Funktionentheorie gemessen, recht günstigen Resultate ist jedenfalls die folgenschwere Gruppeneigenschaft: eine Gruppe enthält mit zwei Transformationen stets auch ihr Produkt, und für die Darstellungen ist es analog die Funktionalgleichung, der sie zu genügen haben: wenn wir eine Darstellung D als Funktion der linearen Transformationen A auffassen, so gilt ja:

$$D(A \cdot B) = D(A) \cdot D(B).$$

Daß solche Funktionalgleichungen insbesondere die in § 1 skizzierte Wirkung haben, außer vollkommen regulären Lösungen nur überall unstetige zuzulassen, wollen wir uns an einem möglichst einfachen Beispiel klarmachen.

Wir betrachten die Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

(x, y positive Zahlen). Sie definiert ja alle 1-dimensionalen Darstellungen der 1-dimensionalen Transformationsgruppe, die sämtliche Dilatationen der Geraden um eine positive Zahl umfaßt.

Durch die Transformation

$$\varphi(\xi) = \ln(f(e^{\xi}))$$

[1]) Z. B. hat die Gruppe aller (komplexen) ebenen Lineartransformationen mit nichtverschwindender Determinante eine nichtanalytische Darstellung durch den Absolutwert der Determinante.

geht sie in die „lineare Funktionalgleichung“

$$\varphi(\xi+\eta)=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)$$

über. Und von dieser hat bekanntlich Hamel gezeigt[2]), daß sie außer ganz regulären Lösungen ($\varphi(\xi)=a\xi$) nur überall unstetige zuläßt, und daß beide Fälle vorkommen.

Übrigens spielt die Exponentialfunktion und der Logarithmus in unseren Entwicklungen eine ebenso fundamentale Rolle, wie in der oben skizzierten Diskussion der Funktionalgleichung

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Wir werden diese Funktionen, in ihrer auf Matrizen erweiterten Form, anzuwenden haben; insbesondere das Verhältnis Gruppe — Infinitesimalgruppe, sowie Darstellung — Infinitesimaldarstellung ist völlig von ihnen beherrscht.

§ 3.

Durch unsere Resultate werden viele Einwände behoben, die vom strengen Standpunkte der reellen Funktionentheorie gegen die auf der Betrachtung der Infinitesimalgruppe fußenden Untersuchungen über Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen erhoben werden könnten. Allerdings gebietet der Umstand, daß nicht jede „Infinitesimalgruppe“ aus einer Gruppe hergeleitet werden kann (vgl. Anhang), eine gewisse Vorsicht bei derartigen Betrachtungen.

In erster Linie sind damit die Resultate von Weyl über die Darstellungen halb-einfacher Gruppen[3]) von ihren weitgehenden Differentiierbarkeitsannahmen befreit. Der diesbezügliche Teil unserer Resultate ist übrigens bereits in einer anderen Arbeit dargelegt worden[4]).

I. Die Funktionen exp und ln.

§ 1.

Die linearen Transformationen in m Dimensionen ($m=1, 2, \ldots$, diese Zahl sei zunächst fest) sind charakterisiert durch Angabe der Transformationsmatrix, d. h. einer m-dimensionalen quadratischen Matrix (mit eventuell komplexen Elementen). Diese ihrerseits wird durch $2m^2$ reelle Zahlen festgelegt: die Real- und Imaginärteile ihrer m^2 Elemente. Wir können diese als kartesische Koordinaten eines Punktes im $2m^2$-dimen-

[2]) Hamel, Math. Annalen 60, S. 459.
[3]) Weyl, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 271; 24, S. 328, 377.
[4]) Neumann, Sitzungsber. d. Preuß. Akad., Sitzung vom 17. März 1927.

sionalen (reellen) euklidischen Raume $\mathfrak{R}_m$ betrachten: dadurch sind die linearen Transformationen bzw. Matrizen ein-eindeutig auf $\mathfrak{R}_m$ bezogen. Wir werden beide Terminologien im folgenden benützen und die Transformationen sowohl als Matrizen als auch als Punkte des $\mathfrak{R}_m$ bezeichnen.

Wenn A, B zwei Matrizen sind, so ist der Sinn von

$$A \pm B, \quad AB, \quad \alpha A \qquad (\alpha \text{ eine komplexe Zahl})$$

der übliche, O und E sind die Null- bzw. Einheitsmatrix. Die Determinante von A bezeichnen wir mit $\det A$.

§ 2.

Unter $|A|$ verstehen wir die (gewöhnliche euklidische) Entfernung des A von O, also wenn A die Elemente $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m)$ hat,

$$|A| = \sqrt{\sum_{\mu,\nu=1}^{m} |a_{\mu\nu}|^2}.$$ [5])

$|A|$ heiße der Absolutwert von A.

Die Relationen

$$|O| \equiv 0, \quad |E| = \sqrt{m}, \quad |\alpha A| = |\alpha||A| \qquad (\alpha \text{ eine komplexe Zahl})$$

sind evident.

$$|A \pm B| \leqq |A| + |B|, \quad |A \pm B| \geqq |A| - |B|$$

ist nichts anderes, als der „Dreiecksatz" im euklidischen Raume $\mathfrak{R}_m$. Wir wollen noch zeigen, daß

$$|AB| \leqq |A||B|$$

ist[6]). Dies ergibt sich so (die Elemente von A, B sind $a_{\mu\nu}$ bzw. $b_{\mu\nu}$):

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Big| \sum_{\pi=1}^{m} a_{\mu\varrho} b_{\varrho\nu} \Big|^2 \leqq \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Big(\sum_{\pi=1}^{m} |a_{\mu\varrho}||b_{\varrho\nu}| \Big)^2 \\
&= \sum_{\mu,\nu,\pi=1}^{m} |a_{\mu\varrho}|^2 |b_{\varrho\nu}|^2 + 2 \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma=1}^{m} |a_{\mu\varrho}||b_{\sigma\nu}||a_{\mu\sigma}||b_{\sigma\nu}| \\
&= \sum_{\mu,\nu,\pi=1}^{m} |a_{\mu\varrho}|^2 |b_{\varrho\nu}|^2 + \sum_{\substack{\mu,\nu,\varrho,\sigma=1 \\ \varrho<\sigma}}^{m} (|a_{\mu\varrho}|^2 |b_{\sigma\nu}|^2 + |a_{\mu\sigma}|^2 |b_{\varrho\nu}|^2) \\
&= \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma=1}^{m} |a_{\mu\varrho}|^2 |b_{\sigma\nu}|^2 = \sum_{\mu,\varrho=1}^{m} |a_{\mu\varrho}|^2 \cdot \sum_{\nu,\sigma=1}^{m} |b_{\nu\sigma}|^2 = |A|^2 |B|^2,
\end{aligned}$$

also $|AB| \leqq |A||B|$, wie behauptet wurde.

(Man beachte übrigens, daß nicht $|E| = 1$ ist!)

---

[5]) Dieser Begriff wurde zuerst von Frobenius benutzt.

[6]) Der erste Beweis dieser Relation findet sich wohl bei Wedderburn.

Durch die Einführung des Absolutwertes haben wir der Menge aller linearer Transformationen (in m Dimensionen) die Metrik und Topologie des euklidischen Raumes auferlegt; es ist nun ohne weiteres klar, was unter abgeschlossenen, offenen, beschränkten, zusammenhängenden Mengen, sowie stetigen, differentiierbaren, analytischen Funktionen zu verstehen ist[7]). (In der Theorie der kontinuierlichen Gruppen spielt der Begriff der „abgeschlossenen Gruppe" eine große Rolle, er wäre in unserer Terminologie wohl besser mit „beschränkt abgeschlossen" oder „kompakt" wiederzugeben.)

§ 3.

Das Konvergieren unendlicher Folgen oder Reihen (Summen) von Matrizen gegen eine bestimmte Matrix im Sinne unseres Absolutwertes (d. h. das gegen 0-Streben des Absolutwertes des Unterschiedes) ist offenbar dasselbe, wie das elementweise Konvergieren derselben. Also dürfen wir alle bekannten Konvergenzkriterien auf die Matrizen anwenden.

Folglich sind die Potenzreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^{\nu} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (A-E)^{\nu}$$

für alle A bzw. für alle A mit $|A-E|<1$ konvergiert. (Die letztere Grenze ist genau; denn für die Matrix

$$H = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots. & 0 \\ . & . & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

ist offenbar $|H|=1$ und $H^2=H$, so daß die zweite Reihe für $A=E-H$ divergiert[8]). Wir bezeichnen ihre Summen mit $\exp A$ bzw. $\ln A$. (Die Bezeichnung $\exp A$ benützen wir an Stelle der schwerfälligeren e^A.)

Die Konvergenz unserer Potenzreihen ist offenbar für $|A| \leqq a$ $(a>0)$ bzw. $|A-E| \leqq a$ $(0<a<1)$ gleichmäßig, und die einzelnen Summanden sind überall stetig, also sind beide Funktionen in ihrem ganzen Definitionsbereiche überall stetig. ($\exp A$ ist überall definiert, $\ln A$ nur für

---

[7]) Als zusammenhängend bezeichnen wir insbesondere eine Menge, wenn bei jeder Zerlegung derselben in zwei nicht leere Teile, mindestens einer dieser Teile einen Häufungspunkt des anderen enthält (Hausdorff). Die Komponente eines Punktes einer Menge ist die größte zusammenhängende Teilmenge derselben, die diesen Punkt enthält.

[8]) $E-H$ ist eine Singularität von $\ln A$, denn für $A=E-\vartheta H$, $0<\vartheta<1$, ist $\ln A = \ln(1-\vartheta)\cdot H$, so daß es für $\vartheta \to 1$ unendlich wird.

$|A-E|<1$.[9]) Wir wollen hieran gleich zwei genauere Abschätzungen der Größe und der Schwankung der Funktionen exp und ln anschließen.

Erstens ist

$$|\exp A - E| \leqq e^{|A|}-1, \qquad |\ln A| \leqq \ln \frac{1}{1-|A-E|} \qquad ((A-E)<1).$$

Beide Abschätzungen folgen unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung.

Zweitens ist für $|A| \leqq a$, $|B| \leqq a$ $(a>0)$ bzw. $|A-E| \leqq a$, $|B-E| \leqq a$ $(0<a<1)$

$$|\exp A - \exp B| \leqq e^a |A-B|, \qquad |\ln A - \ln B| = \frac{1}{1-a}|A-B|.$$

Um dies zu beweisen, müssen wir zuerst die Richtigkeit der folgenden Hilfsformel einsehen: aus $|A| \leqq a$, $|B| \leqq a$ $(a>0)$ folgt

$$|A^p - B^p| \leqq p a^{p-1}|A-B| \qquad (p=0,1,2,\ldots).$$

Für $p=0, 1$ ist sie evident. Und von p ist sie folgendermaßen auf $p+1$ zu übertragen (ohne Benützung der Vertauschbarkeit!):

$$\begin{aligned} |A^{p+1}-B^{p+1}| &= |(A^p-B^p)A + B^p(A-B)| \\ &\leqq |A^p-B^p||A| + |B|^p|A-B| \\ &\leqq p\cdot a^{p-1}|A-B|\cdot a + a^p\cdot|A-B| = (p+1)a^p|A-B|. \end{aligned}$$

Die behaupteten Formeln folgen aber, bei Berücksichtigung dieser Hilfsformel, sofort aus der Potenzreihendarstellung von exp und ln.

§ 4.

Es soll nun gezeigt werden, daß eine jede der Funktionen exp und ln die andere umkehrt, d. h. daß die Relationen

$$\exp \ln A = A, \qquad \ln \exp A = A$$

gelten. Natürlich muß dabei ln sinnvoll sein, also muß im ersten Falle $|A-E|<1$ sein, und im zweiten Falle $|\exp A - E|<1$. Dies letztere ist für $|A|<\ln 2$ sicher der Fall:

---

[9]) Natürlich wäre es möglich $\ln A$ analytisch fortzusetzen, indessen ist die allgemeine Theorie dieser Funktion ziemlich verwickelt. (Sie ist z. B. kontinuumfach vieldeutig). Erwähnenswert ist die folgende Reihenentwicklung, die über $|A-E|<1$ hinaus konvergiert:

$$\ln A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{2\nu-1}\left(\frac{A-E}{A+E}\right)^{2\nu-1}.$$

Dabei ist unter $\frac{A-E}{A+E}$ der gemeinsame Wert von $(A-E)\cdot(A+E)^{-1}$ und $(A+E)^{-1}\cdot(A-E)$ zu verstehen. Die Reihe konvergiert für

$$\left|\frac{A-E}{A+E}\right|<1.$$

$$|\exp A - E| \leqq e^{|A|} - 1 < e^{\ln 2} - 1 = 1.$$

Wir werden also die obigen Relationen unter der Voraussetzung $|A-E|<1$ bzw. $|A|<\ln 2$ beweisen.

Das Verschwinden der Ausdrücke

$$\exp \ln A - A, \quad \ln \exp A - A$$

soll bewiesen werden. Da die Potenzreihen dieser Funktionen konvergieren (nach den über A gemachten Annahmen), sind diese Ausdrücke die Limites von

$$\sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!}\left(\sum_{\nu=1}^{s} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^{\nu}\right)^{\mu} - A$$

bzw.

$$\sum_{\mu=1}^{r} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{s} \frac{1}{\nu!} A^{\nu}\right)^{\mu} - A,$$

wenn man zuerst s und dann r gegen ∞ streben läßt. Es genügt also jedenfalls zu zeigen, daß diese letzteren Ausdrücke für hinreichend große s, r beliebig klein werden: d. h. daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $t = t(\varepsilon)$ existiert, so daß aus $s \geqq t$, $r \geqq t$ folgt, daß diese Ausdrücke absolut $< \varepsilon$ sind.

Wir können mit diesen Ausdrücken, da die in ihnen allein vorkommenden Potenzen von A und $A-E$ untereinander vertauschbar sind, ebenso rechnen, wie mit Polynomen gewöhnlicher Zahlen. Es sind offenbar Polynome rs-ten Grades in $A-E$ bzw. A.

Wenn $r \geqq t$, $s \geqq t$ ist, so sind die Koeffizienten der Potenzen bis zur t-ten (einschließlich) dieselben, wie in der Entwicklung von

$$e^{\ln(1+x)} - 1 - x \quad \text{bzw.} \quad \ln e^{x} - x$$

(x als Zahl gedacht!), d. h. 0. Und alle Koeffizienten sind absolut $\leqq$ als die entsprechenden Koeffizienten der Potenzreihen von

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} x^{\nu}\right)^{\mu} + 1 + x = e^{\ln \frac{1}{1-x}} + 1 + x = 1 + x + \frac{1}{1-x}$$

bzw.

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} x^{\nu}\right)^{\mu} + x = \ln \frac{1}{1-(e^{x}-1)} + x = x + \ln \frac{1}{2-e^{x}}.$$

Da diese Funktionen für $|x|<1$ bzw. $|x|<\ln 2$ regulär sind, sind ihre Potenzreihen für $|x|<1$ bzw. $|x|<\ln 2$ konvergent; d. h. für $0<a<1$ bzw. $0<a<\ln 2$ ist der Koeffizient von x^{ν} in einer jeden von ihnen

$$\leqq \frac{c_a}{a^{\nu}} \quad (c_a \text{ hängt nur von } a \text{ ab}).$$

Die Koeffizienten der ersten sind übrigens fast alle $=1$.) Um so mehr gilt dies für die Koeffizienten der uns interessierenden Ausdrücke.

Für $|A-E|=a'<a<1$ bzw. $|A|=a'<a<\ln 2$ ist also für einen jeden der uns interessierenden Ausdrücke der Absolutwert

$$\leqq \sum_{p=t+1}^{rs} \frac{c_a}{a^p}\cdot a'^p = c_a \sum_{p=t+1}^{rs} \left(\frac{a'}{a}\right)^p \leqq \frac{a\,c_a}{a-a'}\left(\frac{a'}{a}\right)^{t+1},$$

sobald $r, s \geqq t$ ist. Für hinreichend große t ist dies beliebig klein und damit ist unsere Behauptung bewiesen; sie gilt offenbar stets, wenn ein solches a existiert, d. h. für alle A mit $|A-E|<1$ bzw. $|A|<\ln 2$.

§ 5.

Die Relation $\exp(A+B)=\exp A\cdot\exp B$ kann keinesfalls für alle A, B gültig sein; denn dann wäre ja allgemein

$$\exp A\cdot\exp B=\exp B\cdot\exp A,$$

also insbesondere für $|A-E|<1$, $|B-E|<1$

$$\exp\ln A\cdot\exp\ln B=\exp\ln B\cdot\exp\ln A,$$
$$AB=BA,$$

was offenbar falsch ist. Wir werden aber zeigen, daß sie für alle vertauschbaren A, B gilt.

Der Ausdruck $\exp(A+B)-\exp A\cdot\exp B$ ist Limes der Ausdrücke

$$\sum_{\mu=0}^{r}\frac{1}{\mu!}(A+B)^\mu - \sum_{\mu=0}^{r}\frac{1}{\mu!}A^\mu\cdot\sum_{\mu=0}^{r}\frac{1}{\mu!}B^\mu$$

für $r\to\infty$. Es genügt also zu zeigen, daß diese gegen 0 streben. Da wir mit ihnen ebenso rechnen dürfen, wie mit Polynomen gewöhnlicher Zahlen (weil A, B vertauschbar sind), ergibt sich nach leichten Zwischenrechnungen:

$$\sum_{\mu=0}^{r}\frac{1}{\mu!}(A+B)^\mu - \sum_{\mu=0}^{r}\frac{1}{\mu!}A^\mu\cdot\sum_{\mu=0}^{r}\frac{1}{\mu!}B^\mu = \sum_{\substack{\mu,\nu=0\\ \mu+\nu>r}}^{r}\frac{1}{\mu!\,\nu!}A^\mu B^\nu,$$

und folglich ist es dem Absolutwerte nach

$$\leqq \sum_{\substack{\mu,\nu=0\\ \mu+\nu>r}}^{r}\frac{1}{\mu!\,\nu!}|A|^\mu|B|^\nu \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=\frac{1}{2}r}^{\infty}\frac{1}{\mu!\,\nu!}|A|^\mu|B|^\nu + \sum_{\mu=\frac{1}{2}r}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!\,\nu!}|A|^\mu|B|^\nu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!}|A|^\mu\sum_{\nu=\frac{1}{2}r}^{\infty}|B|^\nu + \sum_{\mu=\frac{1}{2}r}^{\infty}\frac{1}{\mu!}|A|^\mu\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|B|^\nu$$

$$= e^{|A|}\cdot\sum_{\nu=\frac{1}{2}r}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|B|^\nu + e^{|B|}\cdot\sum_{\nu=\frac{1}{2}r}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|A|^\nu.$$

Diese Schranke strebt aber für $r \to \infty$ offenbar gegen 0, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir zeigen weiter: Für vertauschbare A, B ist

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B,$$

wenn alle drei ln sinnvoll sind, d. h. wenn $|A - E| < 1$, $|B - E| < 1$, $|AB - E| < 1$ ist.

Zunächst werde festgestellt, daß es genügt, die Behauptung für alle vertauschbaren A, B mit $|A - E| < \delta$, $|B - E| < \delta$ (δ irgendeine positive Konstante) zu beweisen.

Es sei nämlich $|A - E| < 1$, $|B - E| < 1$, $|AB - E| < 1$. Dann gilt für alle ϑ mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$:

$$|\{E + \vartheta(A - E)\} - E| = |\vartheta(A - E)| \leqq |A - E| < 1,$$
$$|\{E + \vartheta(B - E)\} - E| = |\vartheta(B - E)| \leqq |B - E| < 1,$$

und weiter:

$$\begin{aligned} &|\{E + \vartheta(A - E)\}\{E + \vartheta(B - E)\} - E| \\ &\quad = |\vartheta(A - E) + \vartheta(B - E) + \vartheta^2(A - E)(B - E| \\ &\quad = |\vartheta(AB - E) - (\vartheta - \vartheta^2)(A - E)(B - E)| \\ &\quad \leqq \vartheta|AB - E| + (\vartheta - \vartheta^2)|A - E||B - E|; \end{aligned}$$

dieser Ausdruck ist aber für $\vartheta \neq 0$

$$< \vartheta \cdot 1 + (\vartheta - \vartheta^2) \cdot 1 \cdot 1 = 2\vartheta - \vartheta^2 = 1 - (1 - \vartheta)^2 \leqq 1,$$

und für $\vartheta = 0$

$$= 0 < 1,$$

also jedenfalls < 1. Folglich ist

$$\begin{aligned} F(\vartheta) = &\ln\{E + \vartheta(A - E)\}\{E + \vartheta(B - E)\} \\ &- \ln\{E + \vartheta(A - E)\} - \ln\{E + \vartheta(B - E)\} \end{aligned}$$

für alle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ sinnvoll. Wir müssen zeigen, daß

$$\ln(AB) - \ln A - \ln B = F(1) = 0$$

ist. Nun konvergieren in $F(\vartheta)$ alle ln-Potenzreihen, also sind die Real- und Imaginärteile der Elemente von $F(\vartheta)$ für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ konvergente Potenzreihen von ϑ, d. h. analytische Funktionen desselben.

Und für $0 \leqq \vartheta \leqq \delta$ ist

$$|\{E + \vartheta(A - E)\} - E| = |\vartheta(A - E)| \leqq \delta(A - E) < \delta,$$
$$|\{E + \vartheta(B - E)\} - E| = |\vartheta(B - E)| \leqq \delta(B - E) < \delta,$$

und $E + \vartheta(A - E)$, $E + \vartheta(B - E)$ sind vertauschbar, weil A, B es sind. Nach Annahme gilt also $F(\vartheta) = 0$. Folglich verschwindet $F(\vartheta)$ identisch, und es ist $F(1) = 0$, d. h. die ursprüngliche Behauptung ist bewiesen.

Nun soll die als hinreichend erkannte Relation für $\delta = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ bewiesen werden.

$\ln A$, $\ln B$ sind vertauschbar, denn sie sind Limites von Polynomen in A bzw. B, die wegen der Vertauschbarkeit von A und B vertauschbar sein müssen. Folglich ist

$$\exp(\ln A + \ln B) = \exp \ln A \cdot \exp \ln B = AB .$$

Ferner ist

$$|A - E|, \ |B - E| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$|\ln A|, \ |\ln B| < \ln \frac{1}{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 ,$$

$$|\ln A + \ln B| < \ln 2 .$$

Also gilt

$$\ln \exp(\ln A + \ln B) = \ln A + \ln B ,$$

d. h.

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B .$$

§ 6.

Wir gehen nun daran, aus den zwei in § 5 bewiesenen Formeln die naheliegendsten Konsequenzen zu ziehen.

Da αA, βA stets vertauschbar sind (α, β komplexe Zahlen), ist

$$\exp((\alpha + \beta) A) = \exp \alpha A \cdot \exp \beta A .$$

Insbesondere gilt allgemein:

$$\exp A \cdot \exp(-A) = \exp O = E ,$$

$$\det \exp A \cdot \det \exp(tA) = \det E = 1 ,$$

also

$$\det \exp A \neq 0 , \qquad \exp(-A) = (\exp A)^{-1} .$$

(Die Ungleichheit $\det \exp A \neq 0$ wird in Evidenz gesetzt durch die Relation

$$\det \exp A = e^{\text{Spur } A} .$$

Ferner ist die Gleichung $\exp A = B$ für die und nur die B lösbar, für welche $\det B \neq 0$ ist. Auf den Beweis dieser Tatsachen gehen wir hier nicht ein.)

Aus diesen Gleichungen folgt für alle A und alle $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sofort:

$$\exp(pA) = (\exp A)^p .$$

Eine Umkehrung dieses Satzes ist der folgende: Wenn $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist, und

$$|A^r - E| < 1$$

ist, für alle r zwischen 1 und p (d. h. $1 \leqq r \leqq p$ bzw. $1 \geqq r \geqq p$), so gilt

$$\ln(A^p) = p \ln A.$$

Dies folgt ohne weiteres aus der zweiten Formel in § 5, wenn man berücksichtigt, daß alle Potenzen von A untereinander vertauschbar sind.

Wir stellen noch einige leicht beweisbare Formeln auf. Es ist

$$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)\cdot S, \quad \ln(S^{-1}AS) = S^{-1}\ln(A)S$$

(das erstere für $\det S \neq 0$, das letztere für $\det S \neq 0$, $|A-E|<1$, $|S^{-1}AS-E|<1$). Denn die entsprechenden Relationen gelten für die Partialsummen der Potenzreihen (die ja Polynome sind), und folglich auch für die Limites derselben.

Wenn A eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ist, so sind $\exp A$ und $\ln A$ auch Diagonalmatrizen, und zwar mit den Diagonalelementen

$$e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_m} \quad \text{bzw.} \quad \ln\alpha_1, \ln\alpha_2, \ldots, \ln\alpha_m.$$

(Für ln muß natürlich $|A-E|<1$ sein; von den $\ln\alpha_\mu$ ist jeweils der Ast zu nehmen, der bei 1 gleich 0 ist.) Diese Behauptung ist trivial.

§ 7.

Schließlich beweisen wir noch einige auf das Verhalten von exp und ln in der Umgebung von O bzw. E bezüglichen Abschätzungen.

In der Umgebung von O bzw. E gilt

$$\exp A = E + A + O(|A^2|), \qquad \ln A = (A-E) + O(|A-E|^2).$$

Es sei nämlich etwa $|A|<1$ bzw. $|A-E|<\frac{1}{2}$, dann gilt:

$$|\exp A - A - E| = \Big|\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}A^\nu\Big| \leqq \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|A|^\nu \leqq |A|^2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!} \leqq |A|^2,$$

$$|\ln A - (A-E)| = \Big|\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(A-E)^\nu\Big| \leqq \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu}|A-E|^2$$

$$= |A-E|^2\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\frac{1}{2^{\nu-2}} \leqq |A|^2,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

In der Umgebung von O gilt

$$\ln(\exp A\cdot\exp B) = A + B + O(|A|\,|B|).$$

(Für vertauschbare A, B ist das Zusatzglied O!) Wir nehmen

$$|A| < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}, \qquad |B| < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

an. Dann gilt:

$$|\exp A - E| < e^{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}} - 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1, \quad |\exp B - E| < e^{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}} - 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1,$$

$$\begin{aligned}|\exp A \cdot \exp B - E| &= |(\exp A - E) + (\exp B - E) + (\exp A - E)(\exp B - E)| \\ &\leqq |\exp A - E| + |\exp B - E| + |\exp A - E|\,|\exp B - E| \\ &< 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und:

$$|A + B| < \ln\frac{3}{2}, \quad |\exp(A+B) - E| < e^{\ln\frac{3}{2}} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\ln(\exp A \cdot \exp B) - A - B &= \ln(\exp A \cdot \exp B) - \ln\exp(A+B) \\ &= O(|\exp A \cdot \exp B - \exp(A+B)|),\end{aligned}$$

es gilt also, den Ausdruck $\exp A \cdot \exp B - \exp(A+B)$ abzuschätzen. Er ist der Limes von

$$\sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} A^\mu \cdot \sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} B^\mu - \sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} (A+B)^\mu$$

für $r \to \infty$. Wenn man ausmultipliziert (diesmal ohne Benützung der, nicht vorausgesetzten, Vertauschbarkeit), so heben sich erstens offenbar alle Glieder A^μ und B^ν fort. Wir wollen nun die übrigen Glieder (die sowohl A als B enthalten) abschätzen.

Wie groß ist die Anzahl der Glieder, in denen A ϱ-mal und B σ-mal als Faktor auftritt? ($\varrho + \sigma \leqq r$.)

Im ausmultiplizierten

$$\sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} A^\mu \sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} B^\mu$$

kommt offenbar ein einziges solches Glied vor, und zwar mit dem Koeffizienten $\frac{1}{\varrho!\,\sigma!}$. Im ausmultiplizierten

$$\sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} (A+B)^\mu$$

müssen alle solchen Glieder aus $\frac{1}{(\varrho+\sigma)!}(A+B)^{\varrho+\sigma}$ stammen, und hier kommen $\frac{(\varrho+\sigma)!}{\varrho!\,\sigma!}$ solche Glieder vor, ein jedes mit dem Koeffizienten $\frac{1}{(\varrho+\sigma)!}$. Der Absolutwert der Summe aller derartigen Glieder ist folglich

$$\leqq \frac{1}{\varrho!\,\sigma!} |A|^\varrho |B|^\sigma + \frac{(\varrho+\sigma)!}{\varrho!\,\sigma!} \frac{1}{(\varrho+\sigma)!} |A|^\varrho |B|^\sigma = \frac{2}{\varrho!\,\sigma!} |A|^\varrho |B|^\sigma.$$

Der Absolutwert des ganzen Ausdruckes ist also

$$\leqq \sum_{\varrho,\sigma=1}^{\infty} \frac{2}{\varrho!\,\sigma!} |A|^{\varrho} |B|^{\sigma} = 2(e^{|A|}-1)(e^{|B|}-1).$$

Dies gilt für alle r, und somit auch für den Limes bei $r \to \infty$, wir haben also:

$$|\exp A \cdot \exp B - \exp(A+B)| \leqq 2(e^{|A|}-1)(e^{|B|}-1) = O(|A||B|).$$

Und hieraus folgt sofort

$$|\ln(\exp A \cdot \exp B) - A - B| = O(|A||B|),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

II. Gruppen und ihre Infinitesimalgruppen.

§ 1.

Als Gruppe bezeichnen wir, wie allgemein üblich, eine Menge in $\mathfrak{R}_m$ (d. h. eine Menge von Matrizen) $\mathfrak{G}$, die die folgenden Eigenschaften hat:

a) E gehört zu $\mathfrak{G}$.

b) Wenn A zu $\mathfrak{G}$ gehört, so ist $\det A \neq 0$, und A^{-1} gehört auch zu $\mathfrak{G}$.

c) Wenn A, B zu $\mathfrak{G}$ gehören, so gehört auch AB zu $\mathfrak{G}$.

Als Hülle von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir die Menge $\overline{\mathfrak{G}}$ aller Elemente von $\mathfrak{G}$, und aller Häufungspunkte von $\mathfrak{G}$ mit nichtverschwindender Determinante. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist offenbar auch eine Gruppe, und seine eigene Hülle. (Man beachte, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ keineswegs „abgeschlossen" sein muß, in dem Sinne wie dieses Wort in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen benutzt wird: es muß nicht beschränkt und abgeschlossen sein.)

Als Infinitesimalgruppe $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir die Menge aller Matrizen U, zu denen eine Folge von zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Matrizen $A_1, A_2, \ldots$, sowie eine Folge gegen 0 strebender positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ existiert, so daß

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \to U$$

für $p \to \infty$.

Man sieht leicht ein: $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ haben dieselbe Infinitesimalgruppe. Denn $\mathfrak{G}$ ist in $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten, also ist es auch seine Infinitesimalgruppe in der von $\overline{\mathfrak{G}}$. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß jedes U, welches zur Infinitesimalgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ gehört, auch zu der von $\mathfrak{G}$ gehören muß

$A_1, A_2, \ldots$ sollen also zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehören, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sei eine Folge gegen 0 strebender positiver Zahlen, und es sei

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \to U$$

für $p \to \infty$. Wir wählen für jedes p ein A_p' aus $\mathfrak{G}$ so aus, daß

$$|A_p' - A_p| < \varepsilon_p^2$$

ist; das ist möglich, weil A_p zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehört. Dann gilt für die Folge $A_1', A_2', \ldots$ aus $\mathfrak{G}$:

$$\left|\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) - \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p' - E)\right| = \left|\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - A_p')\right| < \varepsilon_p,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) - \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p' - E) \to 0$$

für $p \to \infty$. Also strebt auch $\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p' - E)$ gegen U, d. h. U gehört zur Infinitesimalgruppe von $\mathfrak{G}$.

§ 2.

Ehe wir die Infinitesimalgruppe weiter untersuchen, müssen wir zwei Sätze über Folgen $\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E)$ beweisen.

Wir behaupten erstens: Wenn eine Folge von Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ und eine Folge gegen 0 strebender positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gegeben ist, so zieht die Konvergenz einer jeden der beiden Reihen

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varepsilon_p} \ln A_p$$

die der anderen nach sich, und sie haben denselben Limes.

Wenn nämlich $\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E)$ konvergiert, so ist $\left|\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E)\right|$ beschränkt, und $|A_p - E|$ strebt gegen 0, folglich ist $\ln A_p$ für fast alle p sinnvoll, und es ist:

$$\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p = \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) + \frac{1}{\varepsilon_p} O(|A_p - E|^2) = \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) + \varepsilon_p O\left(\left|\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E)\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) + \varepsilon_p O(1) = \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) + O(\varepsilon_p).$$

Der erste Summand hat einen Limes, der zweite strebt gegen 0, also hat die Summe denselben Limes.

Konvergiert umgekehrt $\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p$, so ist wieder $\left|\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p\right|$ beschränkt, und es ist:

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) = \frac{1}{\varepsilon_p}(\exp \ln A_p - E) = \frac{1}{\varepsilon_p}\left(\ln A_p + \frac{1}{\varepsilon_p} O(|\ln A_p|)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p + \varepsilon_p O\left(\left|\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p\right|^2\right) = \frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p + \varepsilon_p O(1)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p + O(\varepsilon_p).$$

Wieder hat der erste Summand einen Limes, der zweite strebt gegen 0, so daß die Summe denselben Limes hat.

Wenn jedem $\varepsilon > 0$ (etwa für $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$) eine Matrix A_ε zugeordnet ist, so zieht auch die Konvergenz einer jeder der Reihen

$$\frac{1}{\varepsilon}(A_\varepsilon - E) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varepsilon}\ln A_\varepsilon$$

für $\varepsilon \to 0$) die der anderen nach sich, und ihr Limes ist gemeinsam. Um dies einzusehen, brauchen wir nur zu berücksichtigen, daß hier die Konvergenz für $\varepsilon \to 0$ dies bedeutet: Konvergenz für jede gegen 0 strebende Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$.

Unsere zweite Behauptung bezieht sich auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ und lautet so: Wenn eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Matrizen aus $\mathfrak{G}$ existiert, und eine Folge gegen 0 strebender positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, so daß

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \to U,$$

so können wir auch jedem $0 < \varepsilon \leqq 1$ eine Matrix A_ε aus $\mathfrak{G}$ zuordnen, so daß

$$\frac{1}{\varepsilon}(A_\varepsilon - E) \to U$$

für $\varepsilon \to 0$.

Es ist bequemer, die völlig gleichwertigen Folgen

$$\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varepsilon}\ln A_\varepsilon$$

zu betrachten.

Wir suchen zu jedem $0 < \varepsilon \leqq 1$ ein $p(\varepsilon) = 1, 2, \ldots$ auf, so daß

$$\varepsilon_{p(\varepsilon)} < \varepsilon^2$$

ist, und wählen $q(\varepsilon) = 1, 2, \ldots$ so, daß

$$(q(\varepsilon) - 1)\varepsilon_{p(\varepsilon)} < \varepsilon^2 \leqq q(\varepsilon)\varepsilon_{p(\varepsilon)}$$

ist. Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $\varepsilon_{p(\varepsilon)}$ (da es $< \varepsilon^2$ ist) gegen 0, also $p(\varepsilon)$ gegen ∞. Und da

$$q(\varepsilon) \geqq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{p(\varepsilon)}} > \frac{1}{\varepsilon}$$

ist, strebt auch $q(\varepsilon)$ gegen ∞.

Wir definieren weiter:

$$B_\varepsilon = (A_{p(\varepsilon)})^{p(\varepsilon)}.$$

Da $A_{p(\varepsilon)}$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, gehört auch B_ε dazu.

Da $\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p$ konvergiert, ist es beschränkt, es gilt also:

$$\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p = O(1), \quad \ln A_p = O(\varepsilon_p),$$

$$q(\varepsilon)\ln A_{p(\varepsilon)} = O(q(\varepsilon)\,\varepsilon_{p(\varepsilon)}) = O(\varepsilon).$$

Für alle hinreichend kleinen ε ist also

$$|q(\varepsilon) \ln A_{p(\varepsilon)}| < \ln 2,$$

und folglich für alle $r = 1, 2, \ldots, q(\varepsilon)$

$$|r \ln A_{p(\varepsilon)}| < \ln 2,$$

$$|\exp(r \ln A_{p(\varepsilon)}) - E| < e^{\ln 2} - 1 = 1.$$

Nun ist aber

$$\exp(r \ln A_{p(\varepsilon)}) = (\exp \ln A_{p(\varepsilon)})^r = (A_{p(\varepsilon)})^r,$$

also haben wir für alle $r = 1, 2, \ldots, q(\varepsilon)$

$$|(A_{p(\varepsilon)})^r - E| < 1.$$

Wegen dieser Ungleichheit ist

$$\ln B_\varepsilon = \ln (A_{p(\varepsilon)})^{q(\varepsilon)} = q(\varepsilon) \ln A_{p(\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \ln B_\varepsilon = \frac{q(\varepsilon)}{\varepsilon} \ln A_{p(\varepsilon)} = \frac{q(\varepsilon)\, \varepsilon_{p(\varepsilon)}}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{p(\varepsilon)}} \ln A_{p(\varepsilon)}.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergieren, wie wir wissen, $p(\varepsilon)$ und $q(\varepsilon)$ gegen ∞; de zweite Faktor konvergiert also gegen U. Und der erste ist

$$\geqq 1, \quad \leqq \frac{q(\varepsilon)}{q(\varepsilon) - 1},$$

also konvergiert er gegen 1. Damit ist

$$\frac{1}{\varepsilon} \ln B_\varepsilon \to U,$$

d. h. unsere Behauptung, bewiesen.

§ 3.

Aus dem zweiten Resultat von § 2 folgt: Wenn U ein Element von $\mathfrak{F}$ ist, und eine Folge $\eta_1, \eta_2, \ldots$ gegen 0 strebender positiver Zahlen will kürlich vorgegeben ist, so gibt es eine Folge von Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathfrak{G}$, so daß für diese $\eta_1, \eta_2, \ldots$

$$\frac{1}{\eta_p}(A_p - E) \to U$$

ist. Wir wählen nämlich zuerst die B_ε aus $\mathfrak{G}$ so, daß

$$\frac{1}{\varepsilon}(B_\varepsilon - E) \to U$$

(für $\varepsilon \to 0$); und setzen dann $A_p = B_{\eta_p}$.

Auf Grund dieses Resultates können die wichtigsten Eigenschafte von $\mathfrak{F}$ unschwer entwickelt werden.

Wir behaupten: Wenn die Matrizen U, V zu $\mathfrak{F}$ gehören, so gehöre auch die Matrizen αU (α eine beliebige *reelle* Zahl), $U + V$, $UV - V$

zu $\mathfrak{J}$. (Daß $\mathfrak{J}$ überhaupt Elemente hat, ist klar: O gehört zu ihm, da man $A_p = E$ und etwa $\varepsilon_p = \frac{1}{p}$ setzen kann.)

Um dies zu beweisen, wählen wir irgendeine Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gegen 0 strebender positiver Zahlen aus und bestimmen zu ihnen solche Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots$ aus $\mathfrak{G}$, daß

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \to U, \qquad \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E) \to V$$

ist. (Auf den Wert der ε_p kommt es uns nicht an, wichtig ist aber, daß wir für U, V dieselben ε_p haben!)

Dann ist erstens für $\alpha \neq 0$ für die ebenfalls gegen 0 strebende Folge $\frac{1}{\alpha}\varepsilon_1, \frac{1}{\alpha}\varepsilon_2, \ldots$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\varepsilon_p}(A_p - E) \to \alpha U,$$

so daß αU zu $\mathfrak{J}$ gehört. Für $\alpha = 0$ gehört $\alpha U = O$ auch dazu.

Zweitens gehören die Matrizen $A_p B_p$ auch zu $\mathfrak{G}$, und es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p B_p - E) &= \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) + \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E) + \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E)(B_p - E)\\ &= \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) + \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E) + \varepsilon_p \cdot \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \cdot \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert offenbar gegen $U + V + O \cdot U \cdot V = U + V$, so daß auch $U + V$ zu $\mathfrak{J}$ gehört.

Drittens bilden wir die Matrizen $A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1}$, die auch zu $\mathfrak{G}$ gehören, wir wollen

$$\frac{1}{\varepsilon_p^2}(A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} - E) \to UV - VU$$

beweisen, damit ist dann gezeigt, daß auch $UV - VU$ zu $\mathfrak{G}$ gehört.

$A_p - E$, $B_p - E$ streben gegen 0, also A_p, B_p gegen E, und somit auch $A_p^{-1} B_p^{-1}$. Wegen

$$\frac{1}{\varepsilon_p^2}(A_p B_p A_p^{-1} B^{-1} - E) = \frac{1}{\varepsilon^2}(A_p B_p - B_p A_p) \cdot A_p^{-1} B_p^{-1}$$

genügt es also

$$\frac{1}{\varepsilon_p^2}(A_p B_p - B_p A_p) \to UV - VU$$

zu beweisen. Dies ist aber leicht verifizierbar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_p^2}(A_p B_p - B_p A_p) &= \frac{1}{\varepsilon_p^2}((A_p - E)(B_p - E) - (B_p - E)(A_p - E))\\ &= \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \cdot \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E) - \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E) \cdot \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung ohne weiteres folgt.

§ 4.

Wir wählen unter den Elementen von $\mathfrak{J}$ eine maximale Anzahl linear unabhängiger aus. Die lineare Unabhängigkeit verstehen wir so, daß nur reelle Koeffizienten zugelassen werden; dann ist die höchstmögliche Anzahl $2m^2$. Diese Elemente seien etwa $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$.

Jedes Element U von $\mathfrak{J}$ muß von diesen linear abhängen, also

$$U = \alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ reelle Zahlen})$$

sein, wegen der Unabhängigkeit der $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$ sind die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ eindeutig bestimmt. Nach den Resultaten von § 3 gehört aber umgekehrt auch jedes

$$U = \alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ reelle Zahlen})$$

zu $\mathfrak{J}$. Also ist $\mathfrak{J}$ die durch die linear unabhängigen $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$ aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit.

Dabei ist $0 \leqq k \leqq 2m^2$, $k = 0$ bedeutet, daß $\mathfrak{J}$ aus der O allein besteht.

Unter den linearen Mannigfaltigkeiten ist aber $\mathfrak{J}$ noch dadurch ausgezeichnet, daß es mit zwei Elementen U, V stets auch ihren sogenannten Kommutator $UV - VU$ enthält. In der Theorie der kontinuierlichen Gruppen werden die Infinitesimalgruppen in der Regel durch diese Eigenschaft independent definiert. Es wird aber oft als selbstverständlich angenommen, daß eine solche „Infinitesimalgruppe“ stets auch eine im eigentlichen Sinne ist: d. h. daß sie aus einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gewonnen werden kann. Diese Ausnahme ist indessen falsch, wie wir im Anhang an Hand sehr einfacher Beispiele zeigen werden.

Uns sollen hier nur die aus gewöhnlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ hergeleiteten Infinitesimalgruppen $\mathfrak{J}$ beschäftigen.

III. Zusammenhangseigenschaften und Parameterzahl.

§ 1.

Da die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Punktmenge im euklidischen Raume $\mathfrak{R}_m$ ist, können wir ihre Zusammenhangseigenschaften untersuchen[10]). Wir bezeichnen die Komponente von A (A ist irgendein Element von $\overline{\mathfrak{G}}$) mit $\overline{\mathfrak{G}}(A)$.

Die Abbildungen

$$X' = AX \quad \text{und} \quad X' = XA$$

sind stetige Abbildungen von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf sich selbst, folglich bilden beide jede Komponente auf eine Komponente ab. Die Komponente von C geht also in die von AC bzw. CA über.

---

[10]) Vgl. Fußnote [7]), S. 7.

Wenn A, B zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ gehören, so bildet

$$X' = AX$$

demnach $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ auch $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ ab, d. h. auf $\overline{\mathfrak{G}}(E)$. Da B zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ gehört, gehört AB zum Bilde, also wieder zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$. Also ist $\mathfrak{G}(E)$ eine Gruppe.

Wenn S irgendein Element von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, so können wir die Abbildung

$$X'' = S^{-1}XS$$

aus

$$X' = XS, \quad X'' = S^{-1}X$$

zusammensetzen, sie bildet also $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ auf $\overline{\mathfrak{G}}(S^{-1} \cdot E \cdot S) = \overline{\mathfrak{G}}(E)$ ab, folglich gehört für jedes A von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ auch $S^{-1}AS$ zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$.

Also ist $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ ein Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$, und $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ ist die zu A gehörige Nebengruppe von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$: die Komponenten von $\overline{\mathfrak{G}}$ bilden seine Faktorgruppe.

Als Komponente von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ relativ abgeschlossen, es enthält also alle seine Häufungspunkte mit nichtverschwindender Determinante.

§ 2.

U gehöre zu $\mathfrak{J}$. Wir wählen eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathfrak{G}$ so aus, daß

$$p(A_p - E) \to U \quad \left(\text{d. h. } \varepsilon_p = \frac{1}{p}\right),$$

also

$$p \ln A_p \to U.$$

Es ist

$$\exp(p \ln A_p) = (\exp \ln A_p)^p = (A_p)^p,$$

und $\exp X$ ist an der Stelle U stetig, also gilt

$$(A_p)^p \to \exp U.$$

Da alle $(A_p)^p$ zu $\mathfrak{G}$ gehören, ist $\exp U$ ein Häufungspunkt von $\mathfrak{G}$. Dabei ist seine Determinante $\neq 0$, also gehört es zu $\overline{\mathfrak{G}}$.

Hieraus folgt sofort: wenn $U_1, U_2, \ldots, U_j$ zu $\mathfrak{J}$ gehören, so gehört auch

$$\exp(U_1) \cdot \exp(U_2) \cdot \ldots \cdot \exp(U_j)$$

in $\overline{\mathfrak{G}}$. Wir behaupten aber: es gehört sogar zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$.

Denn für jedes $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ gehören auch die $\vartheta U_1, \vartheta U_2, \ldots, \vartheta U_j$ zu $\mathfrak{J}$, also gehört

$$F(\vartheta) = \exp(\vartheta U_1) \cdot \exp(\vartheta U_2) \cdot \ldots \cdot \exp(\vartheta U_j)$$

in $\overline{\mathfrak{G}}$. Wir haben also eine in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegende analytische Kurve, die $F(0) = E$ mit $F(1)$, d. h. der untersuchten Matrix, verbindet. Diese muß folglich in $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ gehören.

Im folgenden wird sich unter anderem zeigen, daß $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ keine weiteren Elemente hat.

§ 3.

Wir nehmen an, es wäre eine Folge von Matrizen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\overline{\mathfrak{G}}$ gegeben, derart, daß alle $\ln A_p$ sinnvoll sind und keines zu $\mathfrak{J}$ gehört, und die A_p konvergieren gegen E. Es soll gezeigt werden, daß dies unmöglich ist.

Da O zu $\mathfrak{J}$ gehört, ist durchweg $\ln A_p \neq O$; wir setzen

$$|\ln A_p| = \delta_p > 0.$$

Da $\ln A_p$ nicht zu $\mathfrak{J}$ gehört und $\mathfrak{J}$ als lineare Mannigfaltigkeit eine abgeschlossene Menge ist, so hat es eine positive minimale Entfernung ε_p von $\ln A_p$, die in einem Punkte U_p von $\mathfrak{J}$ angenommen wird:

$$|\ln A_p - U_p| = \varepsilon_p > 0.$$

Da O zu $\mathfrak{J}$ gehört, ist insbesondere $\delta_p \geqq \varepsilon_p$. A_p konvergiert gegen E, also $\ln A_p$ gegen 0, folglich gilt

$$\delta_p \to 0, \quad \varepsilon_p \to 0.$$

Also konvergiert auch U_p gegen 0.

Insbesondere sind A_p, $\ln A_p$, U_p beschränkt, wir dürfen also schließen:

$$|\exp \ln A_p - \exp U_p| = O(|\ln A_p - U_p|) = O(\varepsilon_p),$$
$$|A_p - \exp U_p| = O(\varepsilon_p),$$

und weiter:

$$|A_p \exp(-U_p) - E| = |(A - \exp U_p)\exp(-U_p)|$$
$$\leqq |A - \exp U_p|\,|\exp(-U_p)| = O(\varepsilon_p)\,O(1) = O(\varepsilon_p).$$

$A_p \exp(-U_p)$ strebt demnach gegen E, was die folgende Abschätzung motiviert:

$$|\ln(A_p \exp(-U_p))| = O(|A_p \exp(-U_p) - E|) = O(\varepsilon_p).$$

Man beachte, daß für fast alle p (nämlich sobald U_p nahe genug zu O ist)

$$\ln(A_p \exp(-U_p)) \neq O$$

sein muß, denn das Gegenteil hätte

$$A_p \exp(-U_p) = E, \quad A_p = \exp U_p,$$
$$\ln A_p = \ln \exp U_p = U_p$$

zur Folge. Wir setzen

$$|\ln(A_p \exp(-U_p))| = \eta_p > 0.$$

Wir haben gezeigt, daß $\eta_p = O(\varepsilon_p)$ ist.

A_p gehört zu $\overline{\mathfrak{G}}$, U_p und $-U_p$ gehören zu $\mathfrak{J}$, also $\exp(-U_p)$ zu $\overline{\mathfrak{G}}$, folglich gehört $A_p \exp(-U_p)$ zu $\overline{\mathfrak{G}}$. Alle Elemente der Folge

$$\frac{1}{\eta_p} \ln(A_p \exp(-U_p))$$

haben den Absolutwert 1, sie muß also mindestens einen Häufungspunkt W haben. Wir wählen eine Teilfolge $\nu(1), \nu(2), \ldots$ so aus, daß

$$\frac{1}{\eta_{\nu(p)}} \ln\left(A_{\nu(p)} \exp\left(-U_{\nu(p)}\right)\right) \to W.$$

W gehört also zu $\mathfrak{F}$.

Aus der Definition von W und der $\nu(p)$ folgt

$$\frac{1}{\eta_{\nu(p)}} \ln\left(A_{\nu(p)} \exp\left(-U_{\nu(p)}\right)\right) = W + o(1),$$
$$\ln\left(A_{\nu(p)} \exp\left(-U_{\nu(p)}\right)\right) - \eta_{\nu(p)} W = o(\eta_{\nu(p)}).$$

Da beide Glieder der linken Seite gegen 0 streben, also beschränkt sind, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} A_{\nu(p)} \exp\left(-U_{\nu(p)}\right) - \exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right)| &= O\left(|\ln\left(A_{\nu(p)} \exp\left(-U_{\nu(p)}\right)\right) - \eta_{\nu(p)} W|\right) \\ &= o(\eta_{\nu(p)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\nu(p)} - \exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right) \exp\left(U_{\nu(p)}\right)| &= |\left(A \exp\left(-U_{\nu(p)}\right) - \exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right)\right) \exp U_{\nu(p)}| \\ &\leqq |A \exp\left(-U_{\nu(p)}\right) - \exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right)|\,|\exp U_{\nu(p)}| \\ &= o(\eta_{\nu(p)})\, O(1) = o(\eta_{\nu(p)}). \end{aligned}$$

Und hieraus folgt weiter, weil beide Glieder der linken Seite gegen E streben:

$$\begin{aligned} \ln A_{\nu(p)} - \ln\left(\exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right) \exp\left(U_{\nu(p)}\right)\right)| &= O\left(|A_{\nu(p)} - \exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right) \exp\left(U_{\nu(p)}\right)|\right) \\ &= o(\eta_{\nu(p)}). \end{aligned}$$

Wir berücksichtigen nun, daß andererseits

$$\begin{aligned} |\ln\left(\exp\left(\eta_{\nu(p)} W\right) \exp\left(U_{\nu(p)}\right)\right) - \eta_{\nu(p)} W - U_{\nu(p)}| &= O\left(|\eta_{\nu(p)} W|\,|U_{\nu(p)}|\right) \\ &= O(\eta_{\nu(p)})\, o(1) = o(\eta_{\nu(p)}) \end{aligned}$$

ist. Dies ergibt, kombiniert mit dem vorigen Resultat:

$$|\ln A_{\nu(p)} - \left(\eta_{\nu(p)} W + U_{\nu(p)}\right)| = o(\eta_{\nu(p)}) = o(\varepsilon_{\nu(p)}).$$

Der Ausdruck $\eta_{\nu(p)} W + U_{\nu(p)}$ gehört aber zu $\mathfrak{F}$, weil W und $U_{\nu(p)}$ dazu gehören, es muß also nach Definition von $\varepsilon_{\nu(p)}$

$$|\ln A_{\nu(p)} - \left(\eta_{\nu(p)} W + U_{\nu(p)}\right)| \geqq \varepsilon_{\nu(p)}$$

sein. Und dies ist unmöglich; denn derselbe Ausdruck kann nicht sowohl $o(\varepsilon_{\nu(p)})$ als auch für alle p gleichzeitig $\geqq \varepsilon_{\nu(p)}$ sein.

Damit ist die Unverträglichkeit unserer Annahmen bewiesen.

§ 4.

Das Resultat von § 3 kann auch so formuliert werden: Es gibt ein festes (aber von $\overline{\mathfrak{G}}$ abhängiges!) $\Delta > 0$, so daß für alle A von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $|A - E| < \Delta$ der $\ln A$ zu $\mathfrak{F}$ gehört. Dies hat aber sehr weitgehende Folgen.

Erstens ist $A = \exp(\ln A)$, und $\ln A$ gehört zu $\mathfrak{J}$: nach § 2 gehört also A zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$. D. h.: es gibt eine Umgebung von E, in der $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ mit $\overline{\mathfrak{G}}$ übereinstimmt. Nach § 1 entsteht $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ aus $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ durch die Abbildung

$$X' = AX,$$

also gibt es eine Umgebung von A (die außer von $\overline{\mathfrak{G}}$ auch von A abhängt), in der $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ übereinstimmt.

Wir können dies auch so formulieren: Jede Komponente von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist in $\overline{\mathfrak{G}}$ relativ offen, oder auch: jedes A von $\mathfrak{G}$ hat eine positive minimale Entfernung von der Komplementären seiner Komponente $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$.

Zweitens kann die am Schlusse von § 2 ausgesprochene Behauptung bewiesen werden: alle Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ haben die Form

$$\exp(U_1)\cdot\exp(U_2)\cdot\ldots\cdot\exp(U_j), \quad (U_1, U_2, \ldots, U_j \text{ aus } \mathfrak{J}).$$

(Daß diese Matrizen alle zu $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ gehören, wissen wir schon.)

Es sei nämlich $\overline{\mathfrak{G}}'$ die Menge aller dieser Matrizen und $\overline{\mathfrak{G}}''$ ihre Komplementäre in $\overline{\mathfrak{G}}(E)$. Wäre nicht $\overline{\mathfrak{G}}'$ gleich $\overline{\mathfrak{G}}(E)$, so wäre keine der beiden Mengen $\overline{\mathfrak{G}}'$, $\overline{\mathfrak{G}}''$ leer; da $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ zusammenhängend ist, müßte eine von ihnen einen Häufungspunkt der anderen enthalten.

Dieser Punkt sei etwa A_0, A_0 gehört allenfalls zu $\overline{\mathfrak{G}}$, und jede Umgebung von A_0 enthält Punkte aus $\overline{\mathfrak{G}}'$ und aus $\overline{\mathfrak{G}}''$. Es gibt offenbar eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von A_0, so daß für alle B, C von $\mathfrak{U}$

$$|B^{-1}C - E| < \Delta$$

ist (wegen $\det A_0 \neq 0$).

Wir wählen aus $\mathfrak{U}$ ein zu $\overline{\mathfrak{G}}'$ gehöriges B und ein zu $\overline{\mathfrak{G}}''$ gehöriges C aus, dann gehören B, C und $B^{-1}C$ zu $\overline{\mathfrak{G}}$, und es ist

$$|B^{-1}C - E| = \Delta.$$

Folglich gehört

$$\ln(B^{-1}C) = V$$

zu $\mathfrak{J}$. Da B zu $\overline{\mathfrak{G}}'$ gehört, ist

$$B \equiv \exp(U_1)\cdot\exp(U_2)\cdot\ldots\cdot\exp(U_j) \qquad (U_1, U_2, \ldots, U_j \text{ aus } \mathfrak{J}),$$

und hieraus folgt

$$C = B\cdot B^{-1}C = \exp(U_1)\cdot\exp(U_2)\cdot\ldots\cdot\exp(U_j)\cdot\exp(V).$$

Also gehört auch C zu $\overline{\mathfrak{G}}'$, entgegen der Annahme.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Da $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ aus $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ durch die Abbildung

$$X' = AX$$

entsteht, so ist $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ die Menge aller

$$A\cdot\exp(U_1)\cdot\exp(U_2)\cdot\ldots\cdot\exp(U_j) \qquad (U_1, U_2, \ldots, U_j \text{ aus } \mathfrak{J}).$$

§ 5.

Die soeben gewonnene Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ erlaubt uns, den folgenden Satz zu beweisen: A und B gehören dann und nur dann zur gleichen Komponente von $\overline{\mathfrak{G}}$, wenn sie in $\overline{\mathfrak{G}}$ durch eine analytische Kurve verbunden werden können.

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist klar; es bleibt zu zeigen, daß sie notwendig ist.

Wenn A, B zur selben Komponente gehören, so gehört B zu $\overline{\mathfrak{G}}(A)$, also ist

$$B = A \cdot \exp(U_1) \cdot \exp(U_2) \cdot \ldots \cdot \exp(U_j) \qquad (U_1, U_2, \ldots, U_j \text{ aus } \mathfrak{J}).$$

Wir setzen für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$F(\vartheta) = A \cdot \exp(\vartheta U_1) \cdot \exp(\vartheta U_2) \cdot \ldots \cdot \exp(\vartheta U_j).$$

$F(\vartheta)$ ist eine analytische Kurve; da $\vartheta U_1, \vartheta U_2, \ldots, \vartheta U_j$ zu $\mathfrak{J}$ gehören, gehören alle $F(\vartheta)$ zu $\overline{\mathfrak{G}}(A)$, also zu $\overline{\mathfrak{G}}$, und sie verbindet in der Tat $F(0) = A$ mit $F(1) = B$.

Trotz ihres durchsichtigen Charakters ist aber diese Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ nicht geeignet, über die „Parameterzahl" von $\overline{\mathfrak{G}}$ Aufschlüsse zu geben; denn die $U_1, U_2, \ldots, U_j$ (und j selbst) sind ja keineswegs eindeutig bestimmt.

Diese ermitteln wir wie folgt:

Zu jedem A von $\overline{\mathfrak{G}}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$, welche das Bild von $|X - E| < \bar{\delta}$ bei der Abbildung

$$X' = AX$$

ist. Ein B aus $\mathfrak{U}$ gehört dann und nur dann zu $\overline{\mathfrak{G}}$, wenn $A^{-1}B$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, und dies ist wegen

$$|A^{-1}B - E| < \bar{\delta}$$

dann und nur dann der Fall, wenn $\ln(A^{-1}B)$ zu $\mathfrak{J}$ gehört. Wir können also auch sagen: Es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von A, derart, daß der in $\mathfrak{U}$ gelegene Teil von $\overline{\mathfrak{G}}$ (oder, was offenbar dasselbe ist, von $\overline{\mathfrak{G}}(A)$) durch die Abbildung

$$Y = \ln(A^{-1}X), \qquad X = A \exp Y$$

ein-eindeutig auf den in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{V}$ von O gelegenen Teil von $\mathfrak{J}$ abgebildet wird.

Das allgemeine Element von $\mathfrak{J}$ ist aber durch Angabe von k reellen Parametern charakterisiert (vgl. II § 4), es ist ja gleich

$$\alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ beliebige reelle Zahlen}),$$

wo $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$ linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{J}$ sind, in der größtmöglichen Anzahl k. Also ist auch $\overline{\mathfrak{G}}$ im Kleinen durch k Parameter analytisch beschreibbar: in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von A wird es durch die

$$A \cdot \exp(\alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k)$$

ein-eindeutig dargestellt ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reell, in einer gewissen Umgebung von $0, 0, \ldots, 0$).

Der sonderbare Umstand, daß $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ im Kleinen durch

$$A \cdot \exp(U) \qquad (U \text{ in } \mathfrak{J})$$

erschöpft wird, im Großen dies aber zunächst nur für

$$A \cdot \exp(U_1) \cdot \exp(U_2) \cdot \ldots \cdot \exp(U_j) \qquad (U_1, U_2, \ldots, U_j \text{ in } \mathfrak{J})$$

bewiesen ist, legt die Vermutung nahe, ob man nicht auch im Großen mit $j = 1$ durchkommt.

Daß dies nicht so ist, soll im Anhang gezeigt werden. Es liegt jedoch durchaus im Bereiche der Möglichkeit, daß $j = 2$ stets hinreicht, um $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ zu erschöpfen; wir können dies weder beweisen noch widerlegen.

§ 6.

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

Satz I. *$\mathfrak{J}$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit, d. h. es gibt k linear unabhängige Matrizen $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$ (k ist eine der Zahlen $0, 1, \ldots, 2m^2$), so daß $\mathfrak{J}$ die Menge aller*

$$\alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ reelle Zahlen})$$

ist. Wenn $\mathfrak{J}$ die Matrizen U, V enthält, so enthält es auch ihren Kommutator $UV - VU$.

Die Komponente von E in $\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ ist ein Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$, die Komponente von A in $\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}}(A)$, ist die zu A gehörige Nebengruppe von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$. Die Komponenten von $\overline{\mathfrak{G}}$ bilden die Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$.

Jedes $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ ist relativ offen in $\overline{\mathfrak{G}}$, folglich ist die Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ diskret: zu keinem A mit nichtverschwindender Determinante gibt es unendlich viele Komponenten von $\overline{\mathfrak{G}}$ in beliebiger Nähe.

Zwei Punkte A, B von $\overline{\mathfrak{G}}$ gehören dann und nur dann zur selben Komponente von $\overline{\mathfrak{G}}$, wenn sie durch eine in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegende analytische Kurve verbunden werden können.

$\overline{\mathfrak{G}}(A)$ ist die Menge aller

$$A \cdot \exp(U_1) \cdot \exp(U_2) \cdot \ldots \cdot \exp(U_j) \qquad (U_1, U_2, \ldots, U_j \text{ aus } \mathfrak{J}).$$

Aber jedes A hat eine Umgebung $\mathfrak{U}$, *derart, daß hier* $\overline{\mathfrak{G}}$ (*oder, was hier dasselbe ist,* $\overline{\mathfrak{G}}(A)$) *bereits durch die*

$$A \cdot \exp(U) \qquad (U \text{ aus } \mathfrak{J})$$

erschöpft wird, ja die Abbildung

$$Y = \ln(A^{-1}X), \quad X = A\exp(Y)$$

bildet $\mathfrak{U}$ *ein-eindeutig auf eine gewisse Umgehung* $\mathfrak{V}$ *von* 0 *in* $\mathfrak{J}$ *ab.* $\overline{\mathfrak{G}}$ *kann also überall im Kleinen ein-eindeutig und analytisch auf k reelle Parameter bezogen werden; es besteht in* $\mathfrak{U}$ *aus den*

$$A \cdot \exp(\alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k)$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ reell, in einer Umgebung von } 0, 0, \ldots, 0).$$

$\overline{\mathfrak{G}}(E)$ ist also für $k > 0$ eine kontinuierliche Gruppe im üblichen Sinne des Wortes, mit allen Analytizitätseigenschaften, die man von einer solchen erwartet. $\overline{\mathfrak{G}}$ selbst ist nur dann als eigentlich kontinuierliche Gruppe anzusprechen, wenn es zusammenhängend ist, d. h. wenn sich die Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ auf die Einheit reduziert.

Für $k = 0$ besteht $\mathfrak{J}$ aus O allein, also $\overline{\mathfrak{G}}(A)$ aus A allein, d. h. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist mit der Faktorgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}(E)$ (das ja E allein enthält) identisch. Folglich ist es diskret: es hat keinen einzigen Häufungspunkt mit nichtverschwindender Determinante[11]). (Insbesondere ist es endlich oder abzählbar, weil es keinen seiner Häufungspunkte enthält.)

In diesem Falle ist also $\overline{\mathfrak{G}}$ eine diskrete Gruppe im üblichen Sinne des Wortes.

IV. Darstellungen und Stetigkeit.

§ 1.

Mit dem Satze I haben unsere auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ allein bezüglichen Betrachtungen einen Abschluß erreicht, wir wenden uns nunmehr den Darstellungen von $\mathfrak{G}$ zu.

n sei eine Zahl $= 1, 2, \ldots$ wir werden neben den Matrizen aus $\mathfrak{R}_m$ nunmehr auch solche aus $\mathfrak{R}_n$ betrachten. (Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir in $\mathfrak{R}_n$ für O, E, ln, exp stets O_*, E_*, $\ln_*$, $\exp_*$.)

Eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist eine in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion D, die Werte aus $\mathfrak{R}_n$ annimmt und der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$D(A \cdot B) = D(A) \cdot D(B) \qquad (A, B \text{ aus } \mathfrak{G}).$$

---

[11]) Häufungspunkte mit verschwindender Determinante können sehr wohl vorhanden sein, z. B. $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller 2^ν ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), diese Zahlen können ja als eindimensionale Matrizen gelten.

Wir verlangen außerdem noch

$$D(E) = E_*,$$

dies ist übrigens, wie aus einfachen Sätzen über Matrizen folgt, keine wesentliche Beschränkung[12]).

Eine Darstellung D von $\mathfrak{G}$ muß keineswegs stetig sein, Beispiele hierfür werden wir im Anhang geben. Es soll aber im folgenden gezeigt werden, daß Darstellungen, deren Schwankung in der Umgebung von E kleiner als 1 ist (d. h. für die ein $\bar{\delta} > 0$ und ein $\bar{\eta} > 0$ existiert, so daß für alle A aus $\mathfrak{G}$ mit $|A - E| < \bar{\delta}$

$$|D(A) - E_*| < 1 - \bar{\eta}$$

ist), nicht nur überall auf $\mathfrak{G}$ stetig und auf $\bar{\mathfrak{G}}$ stetig erweiterbar sind, sondern noch viel weitergehende Analytizitätseigenschaften besitzen müssen.

Diese Prämisse (Schwankung bei E kleiner als 1) kann übrigens nicht mehr wesentlich verschärft werden: denn es gibt unstetige Darstellungen, deren Schwankung in der Umgebung von E gleich 2 ist (vgl. Anhang).

Die Prämisse ist sicher erfüllt, wenn $D(A)$ für $A = E$ stetig ist (Schwankung $= 0$), und dies ist wegen

$$D(A) = D(A A_0) D(A_0^{-1})$$

der Fall, wenn $D(A)$ für irgendein $A = A_0$ in $\mathfrak{G}$ stetig ist. Darstellungen, welche sie verletzen, müssen also überall in $\mathfrak{G}$ unstetig sein.

§ 2.

Wir nehmen also die Existenz der in § 1 erwähnten $\bar{\delta} > 0$, $\bar{\eta} > 0$ an. p sei irgendeine Zahl $= 1, 2, \ldots$. Wenn A zu $\mathfrak{G}$ gehört, und

$$|A - E| < \varepsilon$$

ist ($\varepsilon > 0$, wir werden später genau über ε verfügen), so gilt:

$$|\ln A| < \ln \frac{1}{1-\varepsilon}$$

und für alle $r = 1, 2, \ldots, p$:

$$|r \ln A| = r |\ln A| < p \ln \frac{1}{1-\varepsilon},$$

$$|\exp(r \ln A) - E| < e^{p \ln \frac{1}{1-\varepsilon}} - 1 = \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} - 1,$$

---

[12]) Da jedenfalls $D(E)^2 = D(E)$ ist, zeigt man leicht, daß $D(E)$ auf die Diagonalform transformiert werden kann und daß alle Diagonalelemente $= 1$ oder 0 sind. Also ist die ganze Darstellung einer solchen äquivalent, bei der $D(E)$ gleich einer mit Nullen geänderten Einheitsmatrix ist. Wegen

$$D(A) = D(E) D(A) D(E)$$

kommt dieselbe Ränderung bei allen $D(A)$ vor; wenn wir sie fortlassen, bleibt eine Darstellung mit $D(E) = E_*$ übrig.

d. h.

$$|A^r - E| < \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} - 1.$$

Wenn also

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^p} - 1 \leqq \bar{\delta}, \quad \varepsilon \leqq 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{1+\bar{\delta}}}$$

ist, so gilt

$$|A^r - E| < \bar{\delta}, \quad |D(A^r) - E_*| < 1 - \bar{\eta}, \quad |(D(A))^r - E_*| < 1 - \bar{\eta}.$$

Hieraus folgt erstens

$$\ln_*(D(A))^p = p \ln_* D(A),$$

und zweitens

$$|\ln_*(D(A))^p| < \ln \frac{1}{\bar{\eta}}.$$

Folglich ist

$$|\ln_* D(A)| < \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\bar{\eta}}, \quad |D(A) - E_*| < e^{\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\bar{\eta}}} - 1 = \sqrt[p]{\frac{1}{\bar{\eta}}} - 1.$$

Nun gibt es sicher eine Konstante $c_1 > 0$ (c_1 und ebenso c_2, c_3 sind von p und A unabhängig), so daß stets

$$\frac{c_1}{p} \leqq 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{1+\bar{\delta}}}$$

ist, wir können also $\varepsilon = \frac{c_1}{p}$ setzen.

Wenn A zu $\mathfrak{G}$ gehört und

$$|A - E| < c_1$$

ist, so sei zunächst $A \neq E$. Dann gibt es ein $p = 1, 2, \ldots$ mit

$$\frac{c_1}{2p} \leqq |A - E| < \frac{c_1}{p},$$

und folglich ist

$$|D(A) - E_*| < \sqrt[p]{\frac{1}{\bar{\eta}}} - 1 \leqq \frac{c_2}{p}$$

(für ein geeignet gewähltes c_2), also

$$\leqq c_2 \cdot \frac{2}{c_1} \cdot |A - E| = c_3 |A - E|,$$

Aus $|A - E| < c_1$ folgt also $|D(A) - E_*| < c_3 |A - E|$, wenn $A \neq E$ ist. Dies ist natürlich auch für $A = E$ gültig, nur tritt an Stelle von $<$ das Gleichheitszeichen.

D. h. $D(A)$ genügt in der Umgebung von E der Lipschitzschen Bedingung, es ist also dort stetig. Dies werden wir nun auf ganz $\overline{\mathfrak{G}}$ ausdehnen.

§ 3.

A_0 sei ein Punkt von $\overline{\mathfrak{G}}$. Wir behaupten: es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von A_0, in der (d. h. in deren mit $\mathfrak{G}$ gemeinsamen Teile) $D(A)$ beschränkt ist.

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß aus $|B - A_0| < \varepsilon$, $|C - A_0| < \varepsilon$

$$|B^{-1}C - E| < \bar{\delta}$$

folgt (wegen $\det A_0 \neq 0$). Wir definieren $\mathfrak{U}$ durch $|X - A_0| < \varepsilon$ und wählen ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriges B_0 in $\mathfrak{U}$ fest aus (dies ist möglich, weil A_0 zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehört).

Dann gilt für jedes zu $\mathfrak{G}$ gehörige C in $\mathfrak{U}$:

$$|B_0^{-1}C - E| < \bar{\delta}, \quad |D(B_0^{-1}C) - E_*| < 1,$$

$$\begin{aligned} |D(C) - D(B_0)| &= |D(B_0)(D(B_0^{-1}C) - E_*)| \\ &\leqq |D(B_0)|\,|D(B_0^{-1}C) - E_*| \leqq |D(B_0)|, \\ |D(C)| &\leqq 2|D(B_0)|, \end{aligned}$$

also ist $D(A)$ in $\mathfrak{U}$ in der Tat beschränkt,

Nun sei $\overline{\mathfrak{H}}$ irgendeine beschränkt-abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\mathfrak{G}}$. Wir behaupten: $D(A)$ ist in $\overline{\mathfrak{H}}$ (d. h. im gemeinsamen Teile von $\overline{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{G}$) beschränkt.

Jeder Punkt A_0 von $\mathfrak{H}$ ist ja in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ enthalten, in welcher $D(A)$ beschränkt ist; $\overline{\mathfrak{H}}$ wird also durch diese Umgebungen überdeckt. Da $\overline{\mathfrak{H}}$ beschränkt-abgeschlossen ist, ist der Borelsche Überdeckungssatz anwendbar: $\overline{\mathfrak{H}}$ wird bereits durch endlich viele $\mathfrak{U}$ überdeckt. Folglich ist $D(A)$ in ganz $\overline{\mathfrak{H}}$ beschränkt.

Hieraus kann aber weiter gefolgert werden, daß $D(A)$ in $\overline{\mathfrak{H}}$ gleichmäßig der Lipschitzschen Bedingung genügt.

Wir wählen nämlich c_4 so, daß in $\overline{\mathfrak{H}}$ stets

$$|D(A)| \leqq c_4$$

ist (c_4 und ebenso $c_5, c_6, \ldots$ hängen nicht von A, B ab). Ferner ist in $\overline{\mathfrak{H}}$ (weil es Teil von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist) stets

$$\det A \neq 0.$$

Da $\overline{\mathfrak{H}}$ beschränkt abgeschlossen ist, gibt es ein $c_5 > 0$, so daß in $\overline{\mathfrak{H}}$ durchweg

$$|\det A| \geqq c_5$$

ist. Und wegen der Beschränktheit von $\overline{\mathfrak{H}}$ gibt es ein c_6, so daß in $\overline{\mathfrak{H}}$ stets

$$|A| \leqq c_6$$

ist.

Aus den beiden letzten Ungleichheiten folgt, daß es ein c_7 gibt, so daß für alle A, B von $\overline{\mathfrak{H}}$

$$|AB^{-1} - E| \leqq c_7 |A - B|$$

ist.

Nun sollen A, B zu $\overline{\mathfrak{H}}$ (und gleichzeitig zu $\overline{\mathfrak{G}}$) gehören. Wenn

$$|A - B| < \frac{c_1}{c_7}$$

ist, so ist

$$|AB^{-1} - E| \leqq c_7 |A - B| < c_1,$$

$$|D(AB^{-1}) - E_*| \leqq c_3 |AB^{-1} - E| \leqq c_3 c_7 |A - B|,$$

$$|D(A) - D(B)| = |(D(AB^{-1}) - E_*) D(B)| \leqq |D(AB^{-1}) - E_*| \, |D(B)|$$
$$\leqq c_3 c_4 c_7 |A - B|.$$

Ist hingegen

$$|A - B| \geqq \frac{c_1}{c_7},$$

so gilt

$$|D(A) - D(B)| \leqq 2 c_4 \leqq \frac{2 c_4 c_7}{c_1} |A - B|,$$

Mit $c_8 = \mathrm{Max}\left(c_3 c_4 c_7, \frac{2 c_4 c_7}{c_1}\right)$ gilt also für alle A, B von $\overline{\mathfrak{H}}$ (und $\mathfrak{G}$)

$$|D(A) - D(B)| \leqq c_8 |A - B|.$$

§ 4.

Nach dem Schlußresultate von § 3 ist $D(A)$ nicht nur in ganz $\mathfrak{G}$ stetig, sondern auch in allen Punkten von $\overline{\mathfrak{G}}$ (es braucht dort nicht definiert zu sein, es ist aber in beliebig nahen Punkten definiert, und hat die Schwankung 0). Folglich kann $D(A)$ auf eine ganz eindeutige Weise auf $\overline{\mathfrak{G}}$ erweitert werden, unter Wahrung der Stetigkeit.

Weil die Erweiterung stetig ist, so wird die Gleichung

$$D(AB) = D(A) D(B)$$

für alle A, B von $\overline{\mathfrak{G}}$ fortbestehen: das erweiterte D ist also eine Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$. Auch die zunächst nur im gemeinsamen Teile von $\overline{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{G}$ gültige Relation

$$|D(A) - D(B)| \leqq c_8 |A - B|$$

muß, wegen der Stetigkeit, in ganz $\overline{\mathfrak{H}}$ bestehen. (Eigentlich braucht nicht jeder Punkt von $\overline{\mathfrak{H}}$ Häufungspunkt des Durchschnittes mit $\mathfrak{G}$ zu sein. Wir müssen darum eigentlich zuerst eine umfassendere beschränkt-abgeschlossene Teilmenge $\overline{\mathfrak{H}}'$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ aufstellen — so daß $\overline{\mathfrak{H}}$ mit $\mathfrak{G} - \overline{\mathfrak{H}}'$ keinen gemeinsamen Häufungspunkt hat — und dann c_8 entsprechend wählen. Dann ist der Übergang auf $\overline{\mathfrak{H}}$ ohne weiteres zu vollziehen.)

Das erweiterte D ist also nicht nur überall in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig, sondern es genügt auch in jedem beschränkt-abgeschlossenen Teile $\mathfrak{H}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ gleichmäßig der Lipschitzschen Bedingung.

Die Möglichkeit der Erweiterung auf $\overline{\mathfrak{G}}$ hängt wesentlich an der Stetigkeit; denn es gibt unstetige Darstellungen, die auf keine Art auf $\overline{\mathfrak{G}}$ erweitert werden können (vgl. Anhang). Im folgenden verstehen wir unter D stets die erweiterte Darstellung.

V. Die Infinitesimaldarstellung und der Entwicklungssatz.

§ 1.

Wir werden zeigen: Wenn $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Matrizen aus $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge gegen 0 strebender Zahlen, so folgt aus der Konvergenz von

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E)$$

auch die von

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p) - E_*).$$

Natürlich dürfen an Stelle dieser Folgen die Folgen

$$\frac{1}{\varepsilon_p}\ln A_p \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\varepsilon_p}\ln_* D(A_p)$$

betrachtet werden (vgl. II § 2; die dortigen Resultate gelten natürlich ebenso in $\mathfrak{R}_n$). Der Limes der ersteren Folge sei etwa U. Wir nehmen eine Zahl $k = 1, 2, \ldots$ als gegeben an, sie soll erst später genau festgelegt werden. Ferner wählen wir (was offenbar möglich ist) eine Folge $q(1), q(2), \ldots$ positiver ganzer Zahlen so aus, daß

$$q(p)\,\varepsilon_p \to \frac{1}{k}$$

für $p \to \infty$. Dann gilt offenbar

$$q(p)\ln A_p \to \frac{1}{k}U,$$

und es genügt jedenfalls, die Konvergenz der Folge

$$q(p)\ln_* D(A_p)$$

zu beweisen.

Wir wählen nun k: Es soll

$$\left|\frac{1}{k}U\right| < \ln(1+\bar{\delta}), \qquad k > \frac{|U|}{\ln(1+\bar{\delta})}$$

sein. Folglich gilt für alle hinreichend großen p

$$|q(p)\ln A_p| < \ln(1+\bar{\delta})$$

nd folglich für alle $r = 1, 2, \ldots, q(p)$

$$|r \ln A_p| \leqq |q(p) \ln A_p| < \ln(1+\bar{\delta}),$$
$$|\exp(r \ln A_p) - E| < e^{\ln(1+\bar{\delta})} - 1 = \bar{\delta},$$
$$|A_p^r - E| < \bar{\delta}.$$

Hieraus folgt weiter

$$|D(A_p^r) - E_*| < 1, \quad |(D(A_p))^r - E_*| < 1,$$

lso

$$\ln_* D(A_p^{q(p)}) = \ln_* (D(A_p))^{q(r)} = q(r) \ln_* D(A_p).$$

s genügt also die Konvergenz der Folge $\ln_* D(A_p^{q(r)})$ zu beweisen.

Aus

$$q(p) \ln A_p \to \frac{1}{k} U$$

lgt

$$\exp(q(p) \ln A_p) \to \exp\left(\frac{1}{k} U\right),$$
$$A_p^{q(p)} \to \exp\left(\frac{1}{k} U\right).$$

ie A_p, also auch die $A_p^{q(p)}$ gehören zu $\overline{\mathfrak{G}}$, also ist $\exp\left(\frac{1}{k} U\right)$ ein äufungspunkt von $\overline{\mathfrak{G}}$. Ferner ist die Determinante von $\exp\left(\frac{1}{k} U\right)$ einesfalls 0, also gehört $\exp\left(\frac{1}{k} U\right)$ zur Hülle von $\overline{\mathfrak{G}}$, d. h. zu $\overline{\mathfrak{G}}$ selbst. olglich ist $D(A)$ an der Stelle $\exp\left(\frac{1}{k} U\right)$ definiert und stetig, so daß

$$D(A_p^{q(p)}) \to D\left(\exp\left(\frac{1}{k} U\right)\right)$$

lt.

Ferner ist

$$\left|\frac{1}{k} U\right| < \ln(1+\bar{\delta}), \quad \left|\exp\left(\frac{1}{k} U\right) - E\right| < e^{\ln(1+\bar{\delta})} - 1 = \bar{\delta},$$
$$\left|D\left(\exp\left(\frac{1}{k} U\right)\right) - E_*\right| < 1,$$

so $\ln_* A$ an der Stelle $D\left(\exp\left(\frac{1}{k} U\right)\right)$ definiert und stetig. Und dies hat

$$\ln_* D(A_p^{q(p)}) \to \ln_* D\left(\exp\left(\frac{1}{k} U\right)\right),$$
$$q(p) \ln_* D(A_p) \to \ln_* D\left(\exp\left(\frac{1}{k} U\right)\right)$$

r Folge, womit unsere Behauptung bewiesen ist. (Wir könnten schon zt die Limites berechnen, indessen bestimmen wir sie später auch höchst fach.)

§ 2.

U sei irgendein Element von $\mathfrak{J}$. Wir betrachten alle Folgen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\overline{\mathfrak{G}}$, zu denen eine Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gegen 0 strebender positiver Zahlen existiert, so daß

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \to U.$$

Für alle diese Folgen hat auch

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p) - E_*)$$

einen Limes; und zwar für alle denselben; denn wir können ja zwei derartige Folgen stets zu einer ebensolchen kombinieren. Dieser Limes hängt also nur von U ab, wir bezeichnen ihn mit $J(U)$. J ist also in $\mathfrak{J}$ definiert, es ist die zu D gehörende Infinitesimaldarstellung.

Wir wollen nun die Eigenschaften von J etwas näher untersuchen.

U, V seien zwei Elemente von $\mathfrak{J}$, α eine reelle Zahl. Wir wählen eine Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gegen 0 strebender Zahlen, dann gibt es zwei Folgen $A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots$ von Matrizen aus $\overline{\mathfrak{G}}$, derart, daß

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - E) \to U, \qquad \frac{1}{\varepsilon_p}(B_p - E) \to V.$$

Natürlich ist dann

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p) - E_*) \to J(U), \qquad \frac{1}{\varepsilon_p}(D(B_p) - E_*) \to J(V).$$

Wir haben in II § 3 bewiesen, daß dann

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\varepsilon_p}(A_p - E) \to \alpha U,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p B_p - E) \to U + V,$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p^2}(A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1}) \to UV - VU.$$

Wörtlich ebenso können wir schließen, daß

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\varepsilon_p}(D(A_p) - E_*) \to \alpha J(U),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p B_p) - E_*) = \frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p) D(B_p) - E_*) \to J(U) + J(V),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p^2}(D(A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1}) - E_*)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_p^2}(D(A_p) D(B_p) D(A_p)^{-1} D(B_p)^{-1} - E_*)$$

$$\to J(U) J(V) - J(V) J(U).$$

D. h.: Es ist

$$J(\alpha U) = \alpha J(U) \qquad (\alpha \text{ reell}),$$
$$J(U+V) = J(U) + J(V),$$
$$J(UV - VU) = J(U)J(V) - J(V)J(U).$$

Die erste Relation gilt allerdings zunächst nur für $\alpha \neq 0$. Aber wenn man etwa $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ setzt und die zweite heranzieht, so folgt sie auch für $\alpha = 0$.)

Wenn nun $\mathfrak{J}$ etwa durch $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$ aufgespannt wird, so ist jedes U von $\mathfrak{J}$ eindeutig als

$$U = \alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ reell})$$

darstellbar, und es gilt dann

$$J(U) = \alpha_1 J(\overline{U}_1) + \alpha_2 J(\overline{U}_2) + \ldots + \alpha_k J(\overline{U}_k).$$

Da die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ durch U eindeutig bestimmt sind, sind sie lineare Ausdrücke der Real- und Imaginärteile von U, also gilt (weil die $J(\overline{U}_1)$, $J(\overline{U}_2), \ldots, J(\overline{U}_k)$ konstant sind) dasselbe von den Real- und Imaginärteilen von $J(U)$. D. h.: $J(U)$ ist linear in U. Insbesondere ist es also stetig und beliebig oft differenzierbar.

Mit der Linearität sind bloß die zwei ersten Eigenschaften von J berücksichtigt, die dritte Eigenschaft

$$J(UV - VU) = J(U)J(V) - J(V)J(U)$$

ist eine weitere, recht wirksame Einschränkung. In der Darstellungstheorie bildet sie vielfach den Ausgangspunkt zur Bestimmung aller J, und so aller D.

§ 3.

Wir werden auf Grund der Resultate von § 2 beweisen können, daß die Darstellung $D(A)$ in einer Umgebung eines jeden Punktes A_0 von $\overline{\mathfrak{G}}$ durch Potenzreihen (der Real- und Imaginärteile der Elemente von U) erzeugt wird. Indessen ist hierzu die Heranziehung des vollen Satzes I nötig: wir müssen im Besitz der Erzeugung von $\overline{\mathfrak{G}}$ durch

$$A_0 \cdot \exp(\alpha_1 \overline{U}_1 + \alpha_2 \overline{U}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{U}_k) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ reell})$$

einer Umgebung von A_0 (bzw. $0, 0, \ldots, 0$) sein.

Wir wollen aber zeigen, wie ohne Heranziehung dieser Tatsache die beliebig oftmalige Differenzierbarkeit von D aus den Resultaten von § 2 direkt erschlossen werden kann.

A sowie $A_1, A_2, \ldots$ seien Matrizen aus $\overline{\mathfrak{G}}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sei eine gegen 0 strebende Folge positiver Zahlen. Aus

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - A) \to U$$

folgt dann:

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(A_p A^{-1} - E) = \frac{1}{\varepsilon_p}(A_p - A)\cdot A^{-1} \to UA^{-1}$$

so, daß UA^{-1} zu $\mathfrak{J}$ gehört; und weiter:

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p A^{-1}) - E_*) \to J(UA^{-1}),$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p) - D(A)) = \frac{1}{\varepsilon_p}(D(A_p A^{-1}) - E_*)\cdot D(A) \to J(UA^{-1})D(A).$$

Dies bedeutet aber, daß D an der Stelle A und in der Richtung U differenzierbar ist und daß der Differentialquotient $J(UA^{-1})D(A)$ ist.

Wenn nun D als bereits ν-mal differenzierbar erkannt ist, so kann man so weiter schließen: $J(UA^{-1})$ ist linear in UA^{-1}, also beliebig oft differenzierbar. Also ist $J(UA^{-1})D(A)$ auch ν-mal differenzierbar; da es aber der Differentialquotient von $D(A)$ ist, ist dieses selbst $\nu+1$-mal differenzierbar.

Also ist D beliebig oft differenzierbar.

§ 4.

Wir führen nun unsere Betrachtungen systematisch zu Ende.

A gehöre zu $\overline{\mathfrak{G}}$, und es gehöre zu der Umgebung von E, in der hieraus folgt, daß auch $\ln A$ zu $\mathfrak{J}$ gehört (vgl. Satz I).

Dann gibt es eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ aus $\overline{\mathfrak{G}}$ so, daß

$$p(A_p - E) \to \ln A \quad \left(\text{also } \varepsilon_p = \frac{1}{p}\right),$$

$$p \ln A_p \to \ln A.$$

Folglich ist

$$p(D(A_p) - E_*) \to J(\ln A),$$

$$p \ln_* D(A_p) \to J(\ln A).$$

Hieraus folgt:

$$\exp(p \ln A_p) \to \exp(\ln A), \qquad A_p^p \to A,$$

$$\exp_*(p \ln_* D(A_p)) \to \exp_*(J(\ln A)), \qquad D(A_p)^p = D(A_p^p) \to \exp_*(J(\ln A))$$

Da D an der Stelle A stetig ist, gilt also:

$$D(A) = \exp_*(J(\ln A)).$$

Nun sei A_0 irgendein Element von $\overline{\mathfrak{G}}$, und $\mathfrak{U}$ diejenige Umgebung von A_0, die bei der Abbildung

$$X' = A_0 X$$

aus der oben erwähnten Umgebung von E entsteht. Dann ist $\ln(A_0^{-1}A)$ sinnvoll und gehört zu $\mathfrak{J}$, und es gilt:

$$D(A) = D(A_0)\, D(A_0^{-1}A) = D(A_0)\, \exp_*\left(J(\ln(A_0^{-1}A))\right).$$

Jetzt ist ein leichtes die Existenz der Potenzreihenentwicklung nachzuweisen; denn die Funktion

$$D(X) = D(A_0) \cdot \exp_*\left(J(\ln(A_0^{-1}X))\right)$$

setzt sich aus den folgenden Funktionen zusammen:

$$X' = A_0^{-1}X, \qquad X'' = \ln X', \qquad X''' = J(X''), \qquad X^{\mathrm{IV}} = \exp_*(X'''),$$
$$X^{\mathrm{V}} = D(A_0) \cdot X^{\mathrm{IV}}.$$

Die erste, dritte und fünfte dieser Funktionen sind linear. Die vierte hat eine Potenzreihe, die stets konvergiert. Und die zweite hat eine Potenzreihe, die für die zugelassenen X (aus $\mathfrak{U}$) konvergiert: ist doch für diese $\ln(A_0^{-1}X)$ sinnvoll, d. h.

$$|X' - E| = |A_0^{-1}X - E| < 1.$$

Damit ist bewiesen, daß $D(X)$ eine in $\mathfrak{U}$ konvergente Potenzreihe hat.

Man beachte, daß hieraus die Analytizität im gewöhnlichen Sinne nicht folgt (vgl. Fußnote [1]) S. 4), weil Real- und Imaginärteile getrennt behandelt werden müssen. Allerdings erfüllen die zwei ersten und die zwei letzten unserer fünf Funktionen die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung, aber für die dritte, J, braucht dies nicht der Fall zu sein.

Wir fassen unsere Resultate über Darstellungen zusammen:

Satz II. *Wenn D eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist, die in der Umgebung von E eine Schwankung < 1 hat (dies ist sicher der Fall, wenn es nicht überall in $\mathfrak{G}$ unstetig ist), so ist es überall in $\mathfrak{G}$ stetig und kann eindeutig auf $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig erweitert werden.*

Die Erweiterung ist eine überall auf $\overline{\mathfrak{G}}$ stetige Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$, genügt in jedem beschränkt-abgeschlossenen Teile von $\overline{\mathfrak{G}}$ der Lipschitzschen Bedingung und ist überall in $\overline{\mathfrak{G}}$ beliebig oft differenzierbar. Sie kann sogar in einer Umgebung eines jeden A_0 von $\overline{\mathfrak{G}}$ in konvergente Potenzreihen der Real- und Imaginärteile der Elemente des Arguments entwickelt werden.

Anhang.

§ 1.

Wir wollen hier die im Laufe der Arbeit angekündigten Gegenbeispiele anführen, die den Text störend unterbrochen hätten. Es sind die folgenden:

a) Eine unstetige Darstellung mit der Schwankung 2. ($\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}}$, für beliebiges m und n.) Vgl. Einl. § 1, IV § 1.

b) Eine (unstetige) Darstellung von $\mathfrak{G}$, die zu keiner Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$ erweitert werden kann ($m = 3$, $n = 1$). Vgl. IV § 4.

c) Eine Gruppe $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}(E)$, die durch die $\exp U$, U von J, nicht erschöpft wird (für beliebiges $m \geqq 2$). Vgl. III § 5.

d) Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{J}$, die mit U, V stets auch ihren Kommutator $UV - VU$ enthält und trotzdem nicht die Infinitesimalgruppe eines $\mathfrak{G}$ ist (für $m \geqq 2$). Vgl. Einl. § 1, II § 4.

Sie lauten so:

a) Wir bezeichnen die (p-dimensionale) Matrix

$$\begin{bmatrix} e^{2\pi\alpha i}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0 & , 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0 & , 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & \ddots & . \\ 0 & , 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{bmatrix} \qquad (\alpha \text{ eine reelle Zahl})$$

mit $E_p(\alpha)$. $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller $E_m(\alpha)$ (α reell); dann ist $\mathfrak{G}$ offenbar eine Gruppe, und es ist $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}(E)$. Wir definieren $D(A)$ in $\mathfrak{G}$ folgendermaßen: Wenn $A = E_m(\alpha)$ ist, so sei $D(A) = E_n(\varphi(\alpha))$. Dies ist jedenfalls eine (eindeutige) Darstellung von $\mathfrak{G}$, wenn

$$\varphi(1) = 0, \qquad \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

ist. Wir wählen nun eine unstetige Hamelsche Lösung der Funktionalgleichung

$$\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$$

aus (vgl. Fußnote [2]), S. 5) und setzen

$$\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) - \alpha\psi(1).$$

Dann genügt φ unseren Anforderungen, D ist also eine Darstellung.

Ferner ist auch $\varphi(\alpha)$ unstetig und ebenfalls eine Lösung der obigen Funktionalgleichung; nach Hamel (a. a. O.) liegen also die Punkte $\alpha, \varphi(\alpha)$ in der Ebene überall dicht.

Insbesondere liegen solche Punkte beliebig nahe an $0, 0$ und $0, \frac{1}{2}$, die entsprechenden A und $D(A)$ werden also beliebig nahe an $E_m(0) = E$, $E_n(0) = E_*$ bzw. $E_m(0) = E$, $E_n(\frac{1}{2})$ liegen. Wegen

$$\left| E_n\left(\frac{1}{2}\right) - E_* \right| = |e^{\pi i} - 1| = 2$$

ist also die Schwankung von D bei E mindestens 2. Aber sie ist genau 2, da ja stets

$$|E_n(\alpha) - E_n(\beta)| = |e^{2\pi\alpha i} - e^{2\pi\beta i}| \leqq 2$$

ist.

Da die Schwankung $\neq 0$ ist, ist D natürlich unstetig.

b) Hausdorff hat gezeigt[13]): Wenn im dreidimensionalen Raume zwei urch den Nullpunkt gehende Achsen gegeben sind, die miteinander einen Vinkel mit transzendentem Kosinus einschließen; und wenn S die 180^0-Drehung um die eine und T die 120^0-Drehung um die andere Achse ist, o kann keine Gleichung von einer der Formen

$$\begin{aligned} ST^{u_1}ST^{u_2}\dots ST^{u_\nu}S &= E,\\ ST^{u_1}ST^{u_2}\dots ST^{u_\nu} &= E,\\ T^{u_1}ST^{u_2}\dots ST^{u_\nu}S &= E,\\ T^{u_1}ST^{u_2}\dots ST^{u_\nu} &= E, \end{aligned} \qquad (u_1, u_2, \dots, u_\nu = 1, 2)$$

estehen.

Wir setzen

$$A = TST, \quad B = STSTS.$$

uch A, B sind Drehungen, und zwar um denselben Winkel, da ja

$$B = S^{-1}AS$$

t. Und dieser Winkel ist mit π inkommensurabel, da sonst

$$A^\nu = E, \quad (TST)^\nu = E, \quad TST^2ST^2\dots T^2ST = E$$

äre. Ferner sieht man leicht ein, daß überhaupt keine Gleichung der Form

$$A^{u_1}B^{v_1}A^{u_2}B^{v_2}\dots A^{u_\nu}B^{v_\nu} = E$$

lle u_μ, v_μ bis auf u_1 und v_ν sind $\neq 0$, und wenn $u_1 = v_\nu = 0$ ist, $\nu > 1$) estehen kann.

Wir nennen die Menge aller $A^{u_1}B^{v_1}\dots A^{u_\nu}B^{v_\nu}$ $\mathfrak{G}$, dies ist eine Gruppe. a $\mathfrak{G}$ lauter Drehungen (um durch den Nullpunkt gehende Achsen) ent- ält, so gilt dasselbe von $\overline{\mathfrak{G}}$; wir wollen zeigen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ alle diese Drehungen nthält. Da $\mathfrak{G}$ Drehungen um mit π inkommensurable Winkel um die chse von A und die von B enthält, muß $\overline{\mathfrak{G}}$ alle Drehungen um diese vei Achsen enthalten. Da aber diese Achsen verschieden sind (sonst wäre egen der Gleichheit der Drehwinkel $A = B$ oder $A = B^{-1}$), kann jede rehung aus solchen Drehungen zusammengesetzt werden; hieraus folgt e Behauptung.

Nun kann jedes Element von $\mathfrak{G}$ auf eine einzige Art auf die Form

$$X = A^{u_1}B^{v_1}\dots A^{u_\nu}B^{v_\nu} \quad (\text{alle } u_\mu, v_\mu \text{ bis auf } u_1 \text{ und } v_\nu \text{ sind } \neq 0)$$

ebracht werden. Wir können also

$$D(X) = 2^{u_1+u_2+\dots+u_\nu}$$

---

[13]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Berlin-Leipzig 1914 (1. Auflage).

setzen ($D(X)$ ist eine Zahl, d. h. eine eindimensionale Matrix). Da offenbar

$$D(E)=1, \quad D(XY)=D(X)\,D(Y)$$

gilt, ist D eine Darstellung von $\mathfrak{G}$.

Es ist

$$D(A)=2, \quad D(B)=1, \quad \text{d. h. } D(A)\neq D(B)$$

Da A und B in $\overline{\mathfrak{G}}$ konjugiert sind (denn S gehört zu $\overline{\mathfrak{G}}$), muß jede Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$ für A und B denselben Wert haben.

D kann also nicht auf $\overline{\mathfrak{G}}$ erweitert werden.

c) Für $m=1$ gibt es kein solches Beispiel, da dann alle Matrizen vertauschbar sind, also

$$\exp(U_1)\exp(U_2)\ldots\exp(U_j)=\exp(U_1+U_2+\ldots+U_j)$$

gilt. Wir geben ein Beispiel für $m=2$ an, welches folgendermaßen auf alle $m>2$ übertragen werden kann:

Man rändere alle Matrizen mit $m-2$ Zeilen und Spalten, und zwar versehe man die von $\mathfrak{F}$ mit lauter Nullen, die von $\mathfrak{G}$ mit 1 auf der Diagonale und im übrigen mit Nullen.

$\mathfrak{G}$ sei die Menge aller Matrizen mit der Determinante 1 ($m=2$). Man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{G}=\overline{\mathfrak{G}}=\overline{\mathfrak{G}}(E)$ ist und daß $\mathfrak{F}$ aus allen Matrizen mit der Spur 0 besteht.

Die Matrix

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

gehört zu $\mathfrak{G}$. Wir wollen zeigen, daß sie von allen $\exp U$, U von $\mathfrak{F}$, verschieden ist.

U hat bekanntlich eine der Formen

$$S^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}S \quad \text{und} \quad S^{-1}\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}S.$$

Im ersten Falle ist

$$\exp(U)=S^{-1}\exp\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}S=S^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2}\end{bmatrix}S.$$

Dies ist jedenfalls $\neq A$, da A bekanntlich nicht auf die Diagonalform transformiert werden kann. Im zweiten Falle stellen wir zunächst fest, daß $\mathfrak{F}$ die Spur 2λ hat, also muß $\lambda=0$ sein. Dann ist aber

$$\exp(U)=S^{-1}\exp\begin{bmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{bmatrix}S=S^{-1}\begin{bmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{bmatrix}S.$$

Auch dies ist $\neq A$; denn es hat die Multiplikatoren 1, 1, während die von A $-1, -1$ sind.

d) Wir geben das Beispiel für $m = 2$ an, auf $m > 2$ überträgt es ich durch dieselben Ränderungen wie in c).

τ sei irgendeine irrationale Zahl, wir setzen

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} i, & 0 \\ 0, & \tau i \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{J}$ sei die Menge aller $\alpha \overline{U}$ (α reell). $\mathfrak{J}$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit, lle Elemente von $\mathfrak{J}$ sind vertauschbar, so daß ihr Kommutator $= 0$ ist nd zu $\mathfrak{J}$ gehört.

Wir werden zeigen, daß trotzdem $\mathfrak{J}$ nicht die Infinitesimalgruppe ines $\mathfrak{G}$ sein kann.

Denn wäre dies der Fall, so enthielte $\overline{\mathfrak{G}}$ alle

$$\exp(\alpha \overline{U}) = \exp \begin{bmatrix} \alpha i, & 0 \\ 0, & \tau \alpha i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha i}, & 0 \\ 0, & e^{\tau \alpha i} \end{bmatrix}.$$

Da τ irrational ist, kann man nach dem bekannten Satze von Kronecker u jedem Paare reeller Zahlen η, ϑ ein solches α finden, daß sich α von η nd $\tau\alpha$ von ϑ mod (1) beliebig wenig unterscheidet. Die Matrizen

$$\begin{bmatrix} e^{\eta i}, & 0 \\ 0, & e^{\vartheta i} \end{bmatrix} \quad (\eta, \vartheta \text{ reell})$$

ind also Häufungspunkte von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit nichtverschwindender Determinante, o daß sie zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehören müssen. Da $\mathfrak{J}$ auch Infinitesimalgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ st, müßte es die Matrix

$$\lim_{n \to 0} n \left(\begin{bmatrix} e^{\frac{1}{n} i}, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} - E \right) = \begin{bmatrix} i, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$$

nthalten, was offenbar nicht der Fall ist.

§ 2.

Eine Infinitesimalgruppe $\mathfrak{J}$ im gewöhnlichen Sinne der Theorie der ontinuierlichen Gruppen, d. h. eine lineare Mannigfaltigkeit, die mit zwei latrizen U, V stets auch ihren Kommutator $UV - VU$ enthält, wollen ir eine formale Infinitesimalgruppe nennen, und ein $\mathfrak{J}$, das Infinitesimal-ruppe einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, eine echte Infinitesimalgruppe.

Das Beispiel d) zeigte, daß nicht jede formale Infinitesimalgruppe eine chte sein muß. Immerhin können auch formalen Infinitesimalgruppen ewisse gruppenähnliche Gebilde zugeordnet werden; wie das geschehen ann, wollen wir hier in großen Zügen skizzieren.

$\mathfrak{U}$ sei irgendeine Umgebung von E. Wir nennen eine Teilmenge $\mathfrak{G}^*$ on $\mathfrak{U}$ ein Gruppenelement (in $\mathfrak{U}$), wenn es die folgenden Eigenschaften hat:

a′) E gehört zu $\mathfrak{G}^*$.

b′) Wenn A zu $\mathfrak{G}^*$ gehört, so ist $\det A \neq 0$, und A^{-1} gehört zu $\mathfrak{G}^*$, falls es zu $\mathfrak{U}$ gehört.

c′) Wenn A, B zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, so gehört auch AB zu $\mathfrak{G}^*$, falls es zu $\mathfrak{U}$ gehört.

Für solche Gruppenelemente kann man natürlich die Infinitesimalgruppe analog zu II § 1 definieren, und fast alle unsere Sätze lassen sich auch auf diesen Fall übertragen[14]).

Man kann nun zeigen, daß jede formale Infinitesimalgruppe $\mathfrak{J}$ gleichzeitig Infinitesimalgruppe eines geeignet gewählten Gruppenelementes ist; dabei kann $\mathfrak{U}$ stets als die Menge aller X mit

$$|X - E| < \frac{1}{2} \ln 2$$

gewählt werden. Dies Gruppenelement ist übrigens mit seiner Hülle identisch, und zwar ist es die Menge aller $\exp(U)$ (U von $\mathfrak{J}$), die in $\mathfrak{U}$ liegen.

---

[14]) Diese Begriffsbildung ist mit dem von O. Schreier untersuchten Begriff des Gruppenkeimes eng verwandt. Vgl. Hamb. Abh. 4 (1926), S. 15–32 und S. 233–244.

(Eingegangen am 2. Februar 1927.)

Über eine Hadamardsche Fragestellung.

Von

Georg v. Alexits in Budapest.

Es sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

e für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe, die auf dem Kreisrande $|z| = 1$ e stetige Randfunktion $f(e^{i\theta})$ besitzt; Herr Hadamard[1]) nennt sie von schränkter Abweichung (écart), wenn

$$\left| n \int_a^b f(e^{i\theta}) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\theta \, d\theta \right| < \text{konst.} \qquad (0 \leqq a < b \leqq 2\pi)$$

alle n gleichmäßig erfüllt ist. Ist $f(e^{i\theta})$ von beschränkter Schwankung, ist sie nach dem zweiten Mittelwertsatz auch von beschränkter Abchung. Herr Hadamard hat die Frage aufgeworfen, ob auch die Umrung gilt. Da es scheint, daß diese Frage auch in der neueren Litera-[2]) unerledigt geblieben ist, so wird es vielleicht nicht überflüssig sein, mit einem Beispiel verneinend zu beantworten[3]).

Wir werden eine Potenzreihe $f(z)$ angeben, für deren Koeffizienten

$$c_n = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\right)$$

wodurch die Stetigkeit am Rande, ja sogar die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ ichert ist, während die Randfunktion dennoch nicht von beschränkter wankung ist. Andrerseits folgt aus obiger Abschätzung der Koeffizienten,

[1]) J. Hadamard, Journ. de Math. (4), 8 (1892), S. 101–186.

[2]) O. Toeplitz, Math. Zeitschr. 12 (1921), S. 189–200; insbes. S. 190.

[3]) Ich fühle mich verpflichtet, meinem Freunde A. Wintner, der meine Aufmerkkeit auf dieses Problem gelenkt und mich mit seinem Rat unterstützt hat, meinen k auszusprechen.

daß $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergent und $c_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ ist, was nach Herrn Hadamard für die Beschränktheit der Abweichung hinreicht. Eine solche Potenzreihe ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{\sqrt{n^5}}.$$

Denn nehmen wir an, daß $f(e^{i\theta})$ von beschränkter Schwankung st, so ist es auch sein Realteil

$$\Re f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2\theta}{\sqrt{n^5}},$$

also besitzt er nach Herrn Lebesgue fast überall eine Ableitung. Nach Herrn de la Vallée-Poussin[4]) wäre daher die formal abgeleitete Reihe

$$s(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2\theta}{\sqrt{n}}$$

fast überall $(C, 2)$-summierbar, was jedoch nicht der Fall ist, da die Reihe $s(\theta)$ nach den Herren Hardy und Littlewood[5]) in keiner Ordnung mit Cesàroschen Mitteln summierbar ist, ausgenommen die Punkte einer Nullmenge. Damit ist gezeigt, daß $f(z)$ zwar von beschränkter Abweichung, jedoch $f(e^{i\theta})$ nicht von beschränkter Schwankung ist.

Es ist mir aus der Literatur nicht einmal eine stetige Potenzreihe mit $c_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ bekannt, die nicht beschränkter Variation wäre. Dieses Beispiel vertieft daher auch zwei Sätze über die Fourierkoeffizienten stetiger Funktionen, die ich vor kurzem bewiesen habe[6]).

(Eingegangen am 20. Januar 1927.)

Zusatz bei der Korrektur.

(25. XII. 1927.)

Herr Wintner hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß man das obige Beispiel durch ein schärferes ersetzen kann, indem man die Potenzreihe

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

---

[4]) Ch.-J. de la Vallée Poussin, Belg. Ac. Bull. (1908), S. 193—254.

[5]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Acta Math. 37 (1914), S. 193—238.

[6]) G. v. Alexits, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 65—67.

it

$$c_n = \frac{\cos\frac{2n\pi\log n}{\log 2} + i\sin\frac{2n\pi\log n}{\log 2}}{\sqrt{n^3}}$$

etrachtet. Die formale Ableitung des Realteils ist nämlich folgende igonometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{2n\pi\log n}{\log 2}}{\sqrt{n}}\sin nx - \frac{\cos\frac{2n\pi\log n}{\log 2}}{\sqrt{n}}\cos nx\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2n\pi\log n}{\log 2} + nx\right).$$

Die Herren Hardy und Littlewood[5]) zeigten nun, daß die Reihe echterhand nirgends C-summabel ist, woraus — wie vorher — folgt, daß ie Funktion $f(e^{i\theta})$ wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n| < +\infty; \quad c_n = o\left(\frac{1}{n\log n}\right)$$

on beschränkter Abweichung ist, ohne von beschränkter Variation zu sein.

Bemerkenswert ist bei diesem Beispiel die rasche Abnahme der oeffizienten, denn es ist

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

nd diese Ordnung kann nicht mehr wesentlich verschärft werden. Denn t bei einer Reihe $c_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\right)$ mit $\varepsilon > 0$, so konvergiert die Quadratumme der Koeffizienten c_n' der formal abgeleiteten Reihe absolut, wegen $|c_n'|^2 = O\left(\frac{1}{n^{1+2\varepsilon}}\right)$. Nach dem Riesz-Fischerschen Satze ist dann die formal bgeleitete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n' z^n$ die Summe von zwei konjugierten Fourierreihen, lso die durch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ dargestellte Funktion totalstetig, um so mehr on beschränkter Variation, w. z. b. w.

Aus diesen Beispielen entsteht auch eine tiefer liegende Frage. In eiden Beispielen wird nämlich der Einheitskreis auf eine Fläche von

[5]) G. H. Hardy and Littlewood, Proc. Nat. Acad. U. S. A. 2 (1916), S. 583–586.

endlichem Flächenmaß abgebildet, da die Hadamardsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 = \lim_{r\to 1} \iint_{x^2+y^2\leqq r^2} |f'(z)|^2\, dx\, dy$$

konvergiert. Fraglich ist es nun, ob eine Funktion $f(z)$, welche am Rande des Einheitskreises von beschränkter Abweichung ist, den Einheitskreis notwendigerweise auf eine Fläche von endlichem Flächenmaß abbildet, wenn auch das Bild der Kreislinie $|z|=1$ — wie wir gesehen haben — nicht rektifizierbar sein muß.

(Eingegangen am 29. Dezember 1927.)

Über die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen.

Von

Georg v. Alexits in Budapest.

§ 1.

Das Fundament jeder Untersuchung über die analytische Darstellung der Funktionen bildet der klassische Reihensatz von Weierstraß[1]), nach welchem jede überall stetige Funktion $f(x)$ durch eine Reihe von Polynomen gleichmäßig approximiert werden kann. Die weitere Entwicklung ermöglichte dann die bekannte Bairesche Begriffsbildung[2]), welche zu der tief liegenden Lebesgueschen Theorie[3]) führte. Ein von Vitali[4]) entdeckter Zusammenhang zwischen Baiereschen Klassen und meßbaren Funktionen hat auch auf die fast überall geltende analytische Darstellung meßbarer Funktionen Licht geworfen, wobei außer der Lebesgueschen Theorie noch höchstens ein Fréchetscher Reihensatz[5]) zum Beweise erforderlich sein dürfte.

Diese Untersuchungen lassen zwei Fragen offen: zuerst wissen wir nicht, ob eine nicht meßbare Funktion in gewissen Teilen ihres Definitionsbereiches analytisch dargestellt werden kann, oder ob es solche Teile (außer den endlichen Teilmengen) nicht gibt. Die zweite Frage bezieht sich auf die Art der approximierenden Reihen. Nach dem Weierstraßschen Satze ist der Fall erledigt, daß die Funktion durch Teilsummen einer Polynomreihe gleichmäßig angenähert wird. Die Lebesgueschen und Baireschen Sätze sind aber nur auf die gewöhnliche Konvergenz zugeschnitten. Wie muß nun eine Funktion auf dem Teile $\mathfrak{A}$ seines Definitionsbereiches $\mathfrak{B}$ beschaffen sein, damit sie in den Punkten der Menge $\mathfrak{A}$ durch eine Reihe von Polynomen dargestellt werden kann, welche eventuell nicht gleich-

[1]) K. Weierstraß, Math. Werke **3** (Berlin 1903), S. 1—37.
[2]) R. Baire, Ann. di mat. (3) **3** (1899), S. 16—93.
[3]) H. Lebesgue, Journ. de math. (6) **1** (1905), S. 139—216.
[4]) G. Vitali, Rend. Ist. Lomb. (2) **38** (1905), S. 599—603.
[5]) M. Fréchet, Rend. Palermo 22 (1906), S. 1—74.

mäßig, jedoch in allen Punkten von $\mathfrak{A}$ absolut konvergiert? Diese Frage scheint in der Theorie der analytischen Darstellbarkeit nicht unwichtig zu sein, weshalb wir sie hier behandeln wollen.

Im folgenden wollen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer beliebigen Funktion durch eine absolut konvergente Reihe von Polynomen geben, wobei wir nur über die Natur der Grenzfunktion Beschränkungen annehmen, jedoch über die zugrunde gelegten Mengen nichts voraussetzen werden. Es ist besonders hervorzuheben, daß wir — ganz im Gegensatze zu den bisherigen Untersuchungen — die Grenzfunktion nur auf der Teilmenge $\mathfrak{A}$, auf welcher sie dargestellt wird, unseren beschränkenden Annahmen unterwerfen werden, ohne uns um das weitere Verhalten der Funktion zu kümmern. Dieser Umstand ermöglicht dann ein Korollar aufzustellen, das zu jeder willkürlichen, insbesondere auch zu jeder nicht meßbaren Funktion eine unendliche, sogar dichte Menge angibt, auf welcher diese durch eine absolut konvergente Reihe von Polynomen dargestellt werden kann.

§ 2.

Wir haben noch einige Bezeichnungen und Begriffsbildungen zusammenzustellen, welche im folgenden verwendet werden. Sei $\mathfrak{R}$ ein metrischer Raum und $\mathfrak{A}$ eine Menge dieses Raumes. Mit $\overline{\mathfrak{A}}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$, also die Vereinigung der Menge $\mathfrak{A}$ und der Menge ihrer Häufungspunkte. Ist $f(x)$ eine auf $\mathfrak{A}$ definierte Funktion, so führen wir in jedem Punkte x von $\overline{\mathfrak{A}}$ die obere und untere Limesfunktion $M(f, \mathfrak{A}, x)$ und $m(f, \mathfrak{A}, x)$ folgendermaßen ein: Zu jedem Punkte $x \subset \overline{\mathfrak{A}}$ (das bedeutet, x ist enthalten in $\overline{\mathfrak{A}}$) gibt es mindestens eine Punktfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Wir bilden zu jeder solchen Punktfolge den Wert

$$\bar{f}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n);$$

$M(f, \mathfrak{A}, x)$ bezeichnet dann die obere Schranke aller $\bar{f}(x)$. In derselben Weise definiert man $m(f, \mathfrak{A}, x)$ als untere Schranke aller

$$\underline{f}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

Weiter wird $M(f, \mathfrak{A})$ die obere und $m(f, \mathfrak{A})$ die untere Schranke aller auf der Menge $\mathfrak{A}$ angenommenen Werte von $f(x)$ bedeuten.

Eine Funktion $f(x)$ ist bekanntlich stetig auf der Menge $\mathfrak{A}$, wenn in jedem Punkte $x \subset \mathfrak{A}$ die Beziehung

$$m(f, \mathfrak{A}, x) = f(x) = M(f, \mathfrak{A}, x)$$

besteht. Als Verallgemeinerung dieses Begriffes wird $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ oberhalb stetig genannt, wenn in jedem Punkte $x \subset \mathfrak{A}$

$$f(x) = M(f, \mathfrak{A}, x)$$

ist. Unterhalb stetig heißt $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$, wenn für alle $x \subset \mathfrak{A}$ die Bedingung

$$f(x) = m(f, \mathfrak{A}, x)$$

erfüllt ist. Wenn $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ entweder oberhalb oder unterhalb stetig ist, so sagen wir kurz: $f(x)$ ist halbstetig auf $\mathfrak{A}$.

§ 3.

Wir beweisen zunächst einen Erweiterungssatz, welcher die Grundlage des späteren bildet.

Satz I. *Ist $f(x)$ auf der Menge $\mathfrak{A}$ des metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ oberhalb (unterhalb) stetig, so gibt es eine im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ oberhalb (unterhalb) stetige Funktion $f^*(x)$, welche auf der Menge $\mathfrak{A}$ mit $f(x)$ übereinstimmt.*

Es genügt, diesen Satz nur für den Fall einer oberhalb stetigen Funktion zu beweisen; denn für unterhalb stetige Funktionen verläuft der Beweis — mutatis mutandis — wörtlich in derselben Weise.

Die gesuchte Funktion $f^*(x)$ wird durch folgende Vorschrift definiert:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \subset \mathfrak{A}, \\ M(f, \mathfrak{A}, x), & \text{wenn } x \subset \overline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}, \\ m(f, \mathfrak{A}), & \text{wenn } x \subset \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}. \end{cases} \tag{1}$$

In der Tat besteht nach der ersten Definitionsgleichung $f^*(x) = f(x)$ für alle $x \subset \mathfrak{A}$, und da $f(x)$ nach Annahme auf $\mathfrak{A}$ oberhalb stetig ist, folgt, wenn $x \subset \mathfrak{A}$:

$$f^*(x) = M(f, \mathfrak{A}, x). \tag{2}$$

Nach der zweiten Gleichung der Beziehung (1) bleibt (2) auch dann richtig, wenn $x \subset \overline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}$, also überhaupt für alle $x \subset \overline{\mathfrak{A}}$. Sei nun $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ eine Punktfolge aus $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, wobei $x \subset \overline{\mathfrak{A}}$. Da $m(f, \mathfrak{A})$ die untere Schranke von $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ bedeutet, ist allerdings

$$M(f, \mathfrak{A}, x) \geqq m(f, \mathfrak{A}),$$

und da nach der dritten Beziehung (1) auf $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ überall $f^*(x) = m(f, \mathfrak{A})$ ist, folgt aus (2) und aus der vorangehenden Ungleichung:

$$f^*(x) \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}} f^*(x_n) \qquad (x \subset \overline{\mathfrak{A}}). \tag{3}$$

Die Beziehungen (2) und (3) ergeben zusammen

$$f^*(x) = M(f^*, \mathfrak{R}, x) \qquad (x < \overline{\mathfrak{A}}). \tag{4}$$

Da aber $f^*(x)$ auf $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ eine Konstante und $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ eine offene Menge ist, besteht auch

$$f^*(x) = M(f^*, \mathfrak{R}, x) \qquad (x < \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}). \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) und (5) besagen, daß $f^*(x)$ im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ oberhalb stetig ist. Aus (1) folgt dann auch die andere Behauptung, nämlich das Bestehen von $f^*(x) = f(x)$ in den Punkten der Menge $\mathfrak{A}$.

§ 4.

Es ist vielleicht nicht unnötig zu bemerken, daß eine solche Erweiterung für eine beliebige Funktion der ersten Baireschen Klasse nicht möglich ist. Einfaches Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = \dfrac{2p}{q} \ (p \text{ und } q \text{ teilerfremd}), \\ 0, & \text{wenn } x = \dfrac{2p+1}{q}. \end{cases}$$

Die Funktion $f(x)$ ist auf der Menge aller rationalen Zahlen von der ersten Klasse; denn diese Menge ist abzählbar. Gibt es aber ein $f^*(x)$, das in jedem rationalen Punkte mit $f(x)$ übereinstimmt, so ist $f^*(x)$ total unstetig; denn in jedem Punkte $x = \frac{2p}{q}$ ist $f^*(x) = 1$ und in jedem Punkte $x = \frac{2p+1}{q}$ gleich 0. Die Funktion $f^*(x)$ gehört demnach im linearen Raume mindestens zur zweiten Klasse.

Man sieht leicht, daß Satz I implizite einen Teil über die Approximation einer willkürlichen Funktion durch Polynome enthält, doch führt eine einfache Betrachtung zu einem bedeutend mehr besagenden Satze.

§ 5.

Wir sprechen die folgenden Sätze der Einfachheit halber für den linearen Euklidischen Raum $\mathfrak{R}_1$ aus, sie sind aber auch im n-dimensionalen Raume richtig.

Satz II[6]. *Sei $f(x)$ eine in ihrem Definitionsbereiche $\mathfrak{B}$ beliebige Funktion und $\mathfrak{A}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$. Damit es eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ von Polynomen gibt, welche auf $\mathfrak{A}$ die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = f(x)$$

[6]) Vgl. zu dem Beweise dieses Satzes W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921), S. 15–27

rfüllt und außerdem $\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(x)|$ *für* $x \subset \mathfrak{A}$ *konvergiert, ist notwendig und inreichend, daß* $f(x)$ *Summe von zwei auf* $\mathfrak{A}$ *halbstetigen Funktionen ist.*

Die Bedingung ist notwendig. Denn ist

$$\pi_k(x) = \begin{cases} P_k(x), & \text{wenn } P_k(x) \geqq 0, \\ 0, & \text{wenn } P_k(x) < 0, \end{cases}$$

nd

$$\nu_k(x) = \begin{cases} P_k(x), & \text{wenn } P_k(x) < 0, \\ 0, & \text{wenn } P_k(x) \geqq 0, \end{cases}$$

gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |P_k(x)| = \sum_{k=1}^{n} \pi_k(x) - \sum_{k=1}^{n} \nu_k(x). \tag{6}$$

ie Funktionen $\pi_k(x)$ und $\nu_k(x)$ sind ersichtlich stetig und die Folge der artialsummen $\sum_{k=1}^{n} \pi_k(x)$ bzw. $\sum_{k=1}^{n} \nu_k(x)$ monoton. Die Grenzfunktionen

$$\Pi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(x), \qquad \mathsf{N}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(x)$$

nd also nach einem Baireschen Satze[7]) halbstetig auf der Menge, auf elcher sie existieren. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(x)|$ nach Annahme für $x \subset \mathfrak{A}$ konvergiert, lgt demnach aus (6), daß die Funktionen $\Pi(x)$ und $\mathsf{N}(x)$ auf der enge $\mathfrak{A}$ halbstetig sind. Nun besteht nach Annahme

$$f(x) = \Pi(x) + \mathsf{N}(x)$$

jedem Punkte $x \subset \mathfrak{A}$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Bedingung ist hinreichend. Denn sei

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{)}$$

obei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auf $\mathfrak{A}$ halbstetig sind. Nach Satz I gibt es dann vei Funktionen $f_1^*(x)$ und $f_2^*(x)$, welche in den Punkten der Menge $\mathfrak{A}$ it $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ übereinstimmen und in $\mathfrak{R}_1$ halbstetig sind. Die unktionen $f_1^*(x)$ und $f_2^*(x)$ sind dann Grenzfunktionen zweier monotoner olgen von Polynomen[8]):

$$f_1^*(x) = \lim_{n \to \infty} P_n^{(1)}(x), \qquad f_2^*(x) = \lim_{n \to \infty} P_n^{(2)}(x). \tag{)}$$

---

[7]) R. Baire, Bull. Soc. math. Franc. 32 (1904), S. 125–128.

[8]) R. Baire, a. a. O. [7]). Herr Baire beweist zwar nur so viel, daß eine halbstetige nktion Grenze einer monotonen Folge von stetigen Funktionen ist, auf Grund des eierstraßschen Satzes liegt dann aber der Übergang zu monotonen Folgen von lynomen auf der Hand.

Da diese Folgen monoton sind, haben die Glieder der Reihen

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(1)}(x) = P_1^{(1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(P_{n+1}^{(1)}(x) - P_n^{(1)}(x))$$

und

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(2)}(x) = P_1^{(2)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(P_{n+1}^{(2)}(x) - P_n^{(2)}(x))$$

gleiche Vorzeichen, also sind die rechts stehenden Reihen absolut konvergent. Aus (7) und (8) folgt demnach das Bestehen von

$$f(x) = P_1^{(1)}(x) + P_1^{(2)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(P_{n+1}^{(1)}(x) + P_{n+1}^{(2)}(x) - P_n^{(1)}(x) - P_n^{(2)}(x))$$

für alle Punkte $x \subset \mathfrak{A}$, w. z. b. w.

§ 6.

Aus diesem Satze könnte man auf Grund des Vitalischen Satzes die bisher bekannten Theoreme über die analytische Darstellung meßbarer Funktionen leicht erhalten. Wir wollen jedoch zu anderen Korollaren des Satzes II übergehen, welche auch eine Lücke dieser Theorie ausfüllen, indem sie die Feinstruktur der Mengen, auf welchen eine analytische Darstellung durch absolut konvergente Reihen von Polynomen möglich ist, beleuchten.

Korollar I. *Ist $f(x)$ auf der perfekten Menge $\mathfrak{A}$ eine Bairesche Funktion, so gibt es eine Reihe von Polynomen, welche außer einer Menge die in $\mathfrak{A}$ von erster Kategorie*[9]) *ist, absolut konvergiert und $f(x)$ darstellt.*

In der Tat gibt es[10]), da $f(x)$ auf $\mathfrak{A}$ eine Bairesche Funktion ist, eine auf $\mathfrak{A}$ halbstetige Funktion $f^*(x)$, welche außerhalb einer Menge $\mathfrak{N}$, die in $\mathfrak{A}$ von erster Kategorie ist, mit $f(x)$ übereinstimmt. Nach Satz I kann $f^*(x)$ auf $\mathfrak{A}$ durch eine absolut konvergente Reihe von Polynomen dargestellt werden, woraus sofort die Behauptung folgt.

Korollar II. *Ist $f(x)$ auf der Menge $\mathfrak{A}$ eine beliebige endliche Funktion, so gibt es stets eine in $\mathfrak{A}$ dichte Teilmenge $\mathfrak{B}$, auf welcher $f(x)$ durch eine absolut konvergente Folge von Polynomen darstellbar ist.*

In der Tat gibt es nach Herrn Blumberg[11]) einen in $\mathfrak{A}$ dichten Teil $\mathfrak{B}$, auf welcher $f(x)$ stetig, also um so mehr halbstetig ist. Aus dieser Tatsache und aus dem Satze II ergibt sich sofort unsere Behauptung.

---

[9]) Die Menge $\mathfrak{B}$ heißt von erster Kategorie in $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B}$ die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen in $\mathfrak{A}$ nirgends dichten Mengen ist.

[10]) H. Lebesgue, a. a. O. [5]).

[11]) H. Blumberg, Trans. Am. Math. Soc. 24 (1923), S. 113–118.

(Eingegangen am 16. Juli 1928.)

Euler-Bernoullische Reihen[1]).

Von

Wilhelm Maier in Frankfurt a. M.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 53
§ 1. Allgemeines über Bernoullische Polynome 54
§ 2. Algebraische Hilfsmittel 57
§ 3. Quasi Eulersche Summen 62
§ 4. Zusammenhang mit Riemanns ζ-Funktion 66
§ 5. Durchlaufende Summation 72
§ 6. Inhomogene Nebenbedingung 76

Einleitung.

In einem, 1734 bei der Petersburger Akademie erschienenen Aufsatz L. Eulers: „De summis serierum reciprocarum“ wird die Aufgabe gelöst, die 1691 durch Jacob Bernoulli gestellt und in Angriff genommen worden war, nämlich den Wert von Summen wie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

zu bestimmen. Eulers Gedanke, solche Reihen zu summieren durch Übertragung algebraischer Identitäten von A. Girard auf transzendente Funktionen, die von der Kreismessung bekannt waren, bedeutet die Inangriffnahme eines Grenzprozesses, zu dessen Rechtfertigung es eines Weierstraß bedurfte.

Erst später bemerkt wurde der Zusammenhang dieser transzendenten Begriffsbildungen mit der 1713 durch Jacob Bernoulli geleisteten Be-

[1]) Gekürzter Abdruck einer Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi an der Universität Frankfurt a. M.

stimmung der endlichen Summen:

$$1+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k \qquad \binom{k=0,1,\ldots}{n=1,2,\ldots}.$$

Vertieft, doch nicht erschöpft wurde die Erkenntnis dieses Zusammenhanges durch Riemanns Entdeckung der Funktionalgleichung seiner ζ-Funktion.

Die folgenden Entwicklungen stellen einen Versuch dar, aus der elementaren Theorie der Bernoullischen Polynome Gewinn zu ziehen für die analytische Theorie der ζ-Funktionen, wie sie in der höheren Arithmetik benötigt wird.

Bezeichnungen.

Die Paragraphen werden durch arabische Ziffern zitiert, die angesprochenen Gleichungen durch dahintergesetzte kleinere, etwa (3.6); wo die große Ziffer fehlt, ist eine Aussage des gleichen Paragraphen gemeint.

$\mathfrak{D}_y$ bedeutet Differentiation nach y.

$\sum_\lambda'$ bedeutet Summation unter Auslassung derjenigen ganzen Zeiger λ, die sinnlose Glieder veranlassen würden.

$\oint_{a+}$ bedeutet Schleifenintegration, a eng und positiv umfahrend; der gegen ∞ gehende Weg enthalte keine weiteren Singularitäten des Integranden.

§ 1.

Allgemeines über Bernoullische Polynome.

Es sei x eine reelle, y eine komplexe Veränderliche; dann ist die in beiden Veränderlichen analytische Funktion

$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} \quad \text{für} \quad |y|<2\pi$$

in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, etwa

$$(1) \qquad \frac{y\,e^{xy}}{e^y-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{y^\nu}{\nu!}B_\nu(x).$$

Betrachten wir dies als Definitionsgleichung für die Funktionenfolge $B_\nu(x)$ $(\nu=0,1,\ldots)$, so folgt erst:

$$\mathfrak{D}_y^\nu\left\{\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1}\right\}_{y=0}=B_\nu(x)$$

ist ein Polynom vom Grade ν in x mit rationalen Koeffizienten („Bernoullisches Polynom“).

Wendet man auf die linke Seite von (1) das Additionstheorem der Exponentialfunktion an, so wird

$$\frac{y}{e^y-1}\left[e^{(x+1)y}-e^{xy}\right]=y\,e^{xy}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{\nu-1}y^{\nu}}{(\nu-1)!},$$

während nach (1) dasselbe

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[B_\nu(x+1)-B_\nu(x)\right]\frac{y^\nu}{\nu!}$$

sich ergibt, so daß sich die $B_\nu(x)$ als Lösung der linearen Differenzen gleichungen zeigen

$$B_\nu(x+1)-B_\nu(x)=\nu\,x^{\nu-1}\qquad(\nu=0,1,\ldots).$$

Dies führt bei nochmaliger Inanspruchnahme von $e^{(u+v)}=e^u\cdot e^v$ zu

$$\frac{y\,e^{y(x+1)}}{e^y-1}=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{y^\varkappa}{\varkappa!}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{y^\lambda B_\lambda(x)}{\lambda!}=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{y^\varkappa}{\varkappa!}\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa}{\mu}B_{\varkappa-\mu}(x)$$

und

(2)
$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\lambda}B_\lambda(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}.$$

Die lineare Rekursion (2) liefert leicht die folgende Tabelle Bernoullischer Polynome:

λ	$B_\lambda(x)$
0	1
1	$x-\frac{1}{2}$
2	$x^2-x+\frac{1}{6}$
3	$x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$
4	$x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$
5	$x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x^2-x+\frac{1}{3}\right)$
..	. . . . .

während aus (1) noch die Differentiationsformel

3)
$$\mathfrak{D}_x B_\nu(x)=\nu B_{\nu-1}(x)\qquad(\nu=1,2,\ldots)$$

und umgekehrt

$$\int_0^x dx\,B_\nu(x)=\frac{1}{\nu+1}\left[B_{\nu+1}(x)-B_{\nu+1}(0)\right]$$

u entnehmen sind.

Neben den linearen Beziehungen (2) und (3) zwischen Bernoullischen Polynomen verschiedener Zeiger seien noch einige nicht-lineare in Betracht gezogen. Durch Quadrieren von (1) entsteht

$$\frac{e^{2xy}}{(e^y-1)^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{y^{\nu-2}}{\nu!}\sum_{\lambda=0}^{\nu}B_\lambda(x)\,B_{\nu-\lambda}(x)\cdot\binom{\nu}{\lambda};$$

andererseits ist

$$\mathfrak{D}_y\frac{e^{(2x-1)y}}{e^y-1}=\frac{e^{(2x-1)y}(2x-1)}{e^y-1}-\frac{e^{2xy}}{(e^y-1)^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\nu-1)\,B_\nu(2x-1)\,y^{\nu-2}}{\nu!}.$$

Addition gibt:

$$\frac{(2x-1)\,e^{(2x-1)y}}{e^y-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{y^{\nu-2}}{\nu!}\Big[(\nu-1)\,B_\nu(2x-1)+\sum_{\lambda=0}^{\nu}B_\lambda(x)\,B_{\nu-\lambda}(x)\binom{\nu}{\lambda}\Big]$$

und mit (1) durch Koeffizientenvergleich für $\nu=0,1,\ldots$

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu}B_\lambda(x)\,B_{\nu-\lambda}(x)\binom{\nu}{\lambda}=(2\nu x-\nu)\cdot B_{\nu-1}(2x-1)-(\nu-1)\,B_\nu(2x-1).$$

Die Differenzengleichung gestattet, (4) in folgende Form zu bringen:

$$(4')\qquad \sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{B_\lambda(x)}{\lambda!}\frac{B_{\nu-\lambda}(x)}{(\nu-\lambda)!}=2\,B_1(x)\frac{B_{\nu-1}(2x)}{(\nu-1)!}-(\nu-1)\frac{B_\nu(2x)}{\nu!}.$$

Bezeichnet man die Absolutglieder der obigen Polynome als „Bernoullische Zahlen“ $B_\nu(0)=B_\nu$, so spezialisiert sich (4′) zu der bekannten Formel [in der $\sum_{\lambda=2}^{1}=0$ zu setzen]:

$$(4'')\qquad (\nu+1)B_\nu+\sum_{\lambda=2}^{\nu-2}\binom{\nu}{\lambda}B_\lambda B_{\nu-\lambda}=0\quad\text{für}\quad\nu=3,4,\ldots.$$

Wendet man (3) in Teilintegrationen auf jeden Summanden der linken Seite von (4′) an, so folgt für $\lambda+0+\nu$:

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\int_0^1 dx\,\frac{B_\lambda(x)}{\lambda!}\frac{B_{\nu-\lambda}(x)}{(\nu-\lambda)!}\\ &=\frac{B_{\lambda+1}(x)}{\lambda+1!}\frac{B_{\nu-\lambda}(x)}{\nu-\lambda!}\Big|_0^1-\frac{1}{(\lambda+1)!\,(\nu-\lambda-1)!}\int_0^1 dx\,B_{\lambda+1}(x)\,B_{\nu-\lambda-1}(x)\\ &=(-1)^{\lambda-1}\frac{B_\nu}{\nu!}.\end{aligned}$$

Die Formeln (1) bis (5) hätten an Eleganz gewonnen, wenn statt der $B_\nu(x)$ die Quotienten $\frac{B_\nu(x)}{\nu!}$ eingeführt worden wären; dies gilt nicht mehr

für die folgende Aussage

$$\int_0^1 dx \sum_{\lambda=1}^{2n-1} B_\lambda(x)\, B_{2n-\lambda}(x) = \frac{1}{n+1} B_{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

welche aus (5) erschlossen wird vermöge der Hilfsformel

$$\sum_{\lambda=0}^{2n} \frac{(-1)^\lambda}{\binom{2n}{\lambda}} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Die letztere beweist man wegen

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1} \qquad \begin{cases} 0 < x \\ 0 < y \end{cases}$$

durch

$$\sum_{\lambda=0}^{2n} (-1)^\lambda \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(2n+1-\lambda)}{\Gamma(2n+2)} = \int_0^1 dt \sum_{\lambda=0}^{2n} (-t)^\lambda (1-t)^{2n-\lambda}$$

$$= \int_0^1 dt\, \frac{\{(1-t)^{2n+1} + t^{2n+1}\}}{1} = \frac{1}{n+1}.$$ [2])

§ 2.

Algebraische Hilfsmittel.

Wie oben vorgeschlagen, empfiehlt es sich die Abkürzung

$$\frac{B_\varkappa(x)}{\varkappa!} \cdot \frac{B_\lambda(x)}{\lambda!} \ldots = b_{\varkappa,\lambda,\ldots}(x) \qquad (\varkappa, \lambda, \ldots = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

einzuführen und

$$b_{\varkappa,\lambda,\ldots}(0) = b_{\varkappa,\lambda,\ldots} \tag{1'}$$

zu setzen. Nach (1.3) gilt dann

$$\mathfrak{D}\, b_\varkappa(x) = b_{\varkappa-1}(x), \tag{2}$$

wenn identisch in x erklärt wird $b_{-1}(x) = 0$.

Vermöge (2) und der Differenzengleichung, die mit $\frac{1}{(-1)!} = 0$ als

$$\Delta\, b_\varkappa(x) = \frac{x^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!} \tag{3}$$

erscheint, kann nun

$$\int_0^1 dx\, b_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_m}(x) = c_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_m} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ \varkappa_1, \ldots, \varkappa_m = 0, 1, \ldots \end{pmatrix} \tag{4}$$

---

[2]) Vgl. „Aufgaben zur Integralrechnung", Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung 1927, H. 4.

bestimmt werden; die rationelle Auswertung der bestimmten Integrale (4) ist unser nächstes Ziel. Die Algebra der Konstanten $c_{\varkappa_1 \dots \varkappa_m}$ liefert einige merkwürdige Beziehungen, welche die Ergebnisse des § 3 sehr kurz herzuleiten gestatten.

Die Resultate der Differenzenrechnung — wie sie mit (3) in unsere Betrachtungen eingeht — machen auch in einfachen Fällen die Unterscheidung von Ausnahmen für kleine Zeiger $\varkappa_1 \dots \varkappa_m$ nötig, so daß statt einer Endformel eine Ergebnistabelle dasteht mit einem Haupt- und mehreren Ergänzungssätzen: eine Erscheinung, die im Gegensatz zwischen Differenzenrechnung und komplexer Funktionentheorie begründet ist.

Die einfachsten c-Werte folgen aus (1.3), nämlich

$$(5) \qquad \int_0^1 dx\, b_\varkappa(x) = \begin{array}{c|c|c} c_\varkappa & = 1 & \text{oder } = 0 \\ \hline \text{je nachdem } \varkappa & = 0 & \text{oder } > 0 \end{array}$$

ebenso nach (1.5)

$$(5') \qquad \int_0^1 dx\, b_{\varkappa,\lambda}(x) = \begin{array}{c|c|c|c} c_{\varkappa,\lambda} & = 1 & 0 & (-1)^{\varkappa-1} b_{\varkappa+\lambda} \\ \hline \text{für: } \varkappa & = 0 & > 0 & > 0 \\ \hline \lambda & = 0 & 0 & > 0 \end{array}$$

Weiter erhält man für jedes $\varkappa > 0$ durch Teilintegration

$$\int_0^1 dx\, b_{\varkappa,1,1}(x) = b_{\varkappa+1,1,1}(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 dx\, b_{\varkappa+1,1}(x)$$

nach (1.2.5)

$$(5'') \qquad = -2\, b_{\varkappa+2}$$

und für jedes $\varkappa, \lambda > 0$:

$$\int_0^1 dx\, b_{\varkappa,\lambda,1}(x) = b_{\varkappa+1,\lambda,1}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx\, [b_{\varkappa+1,\lambda}(x) + b_{\varkappa+1,\lambda-1,1}(x)]$$

nach (3)

$$= b_{\varkappa+1,\lambda} + (-1)^\lambda b_{\varkappa+\lambda+1} - \int_0^1 dx\, b_{\varkappa+1,\lambda-1,1}(x)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\lambda-1} [(-1)^{\mu-1} b_{\varkappa+\mu,\lambda+1-\mu} + (-1)^\lambda (\lambda-1)\, b_{\varkappa+\lambda+1}]$$

$$+ (-1)^{\lambda-1} \int_0^1 dx\, b_{\varkappa+\lambda-1,1,1}(x)$$

nach (5''):

$$= (-1)^\lambda (\lambda+1)\, b_{\varkappa+\lambda+1} + \sum_{\mu=0}^{\lambda-2} (-1)^\mu b_{\varkappa+1+\mu,\lambda-\mu}.$$

Durch $\varkappa \rightarrow \lambda$ Tausch und Invarianz der linken Seite entsteht ein neuer Beweis für (1.4″). Mit (5″) erhält man entsprechend (5) und (5′) die c-Tabelle

(5‴) $$\int_0^1 dx\, b_{\varkappa,\lambda,1}(x)$$

$= c_{\varkappa,\lambda,1}$	0	$b_{\varkappa+1}$	$(-1)^\lambda(\lambda+1)b_{\varkappa+\lambda+1} + \sum_{\mu=0}^{\lambda-2}(-1)^\mu b_{\varkappa+1+\mu,\lambda-\mu}$
für: $\varkappa$	0	>0	>0
λ	0	0	>0

Anstatt für mehr als zwei Parameter ähnliche Formelsysteme auszuführen, erscheint es praktisch, die Ergänzungssätze, die den Fällen $\prod_{\varrho=1}^{m}\varkappa_\varrho = 0$ entsprechen, nicht mitzuschleppen; wegen:

$$c_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{m-1},0} = c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{m-1}}$$

sind sie ja durch die Hauptsätze in weniger Zeigern schon bestimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setze man so

(4′) $$0 < \varkappa_1 \leqq \varkappa_2 \leqq \ldots \leqq \varkappa_m.$$

Weiter empfiehlt sich, wie in der Theorie der algebraischen Formen, nicht nur die Anzahl m der eingehenden Zeiger $\varkappa_\varrho$ zur Darstellung der c heranzuziehen, sondern auch deren Summe

(6) $$\sum_{\varrho=1}^{m}\varkappa_\varrho = g.$$

Statt (4) werden wir also besser ausführlich anschreiben

$$\int_0^1 dx\, b_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(x) = c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(g).$$

Z. B. wird für $\varkappa_1 = \ldots = \varkappa_m = 1$ nach (1.2, 2.1) mit $g = m$

(7) $$c_{1,1,\ldots,1}(m) = \int_0^1 dx\left(x-\frac{1}{2}\right)^m = \frac{2^{-m-1}}{m+1}[1+(-1)^m]$$

$$= 2^{-m}\cdot\frac{1}{m+1} \quad \text{für} \quad m \equiv 0\,(1),$$

aber

$$= 0 \qquad \text{„} \quad m \equiv 1\,(2).$$

Es entsteht jetzt die Frage nach dem vollen Lösungssystem der

Gleichungen

$$c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(g) = 0 \tag{8}$$

für unsere positiven, ganzen, nicht abnehmenden Zeiger $\varkappa_\varrho$. Aus dem Verschwinden der höheren ungeraden Bernoullischen Zahlen folgt mit (1.3.5) ein triviales Teilsystem

$$c_{\varkappa_1,\varkappa_2}(g) = 0 \quad \text{mit} \quad g \equiv 1\,(2).$$

Allgemeiner ergibt sich aus den Symmetrieeigenschaften der $b_\varkappa(x)$ bezüglich des Punkts und der Geraden $x = \frac{1}{2}$

$$c_{\varkappa_1,\ldots\varkappa_m}(g) = 0 \quad \text{für} \quad g \equiv 1\,(2); \tag{8'}$$

denn hier wird sogar

$$b_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(x) + b_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(1-x) = 0,$$

so daß das Lösungssystem (8′) von (8) nicht erst durch Integraleigenschaften von (4), sondern schon einfach durch Integrandeneigenschaften von (1) gegeben wird.

Jedes von (8′) verschiedene Lösungssystem $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ kann „nichttrivial“ genannt werden, insofern es eine Integraleigenschaft der c zum Ausdruck bringt.

Insbesondere handelt es sich in diesem komplizierteren Fall

$$g \equiv 0\,(2),$$

in welchem

$$\int_0^1 dx\, b_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(x) = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} dx\, b_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(x)$$

wird, um Erscheinungen des Halbintervalls $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$. Durch teilweise Integration lassen sich solche $\varkappa$-Systeme leicht herstellen; man erhält für $0 < \varkappa$

$$c_{\varkappa,\ldots,\varkappa,\varkappa-1}(m\varkappa - 1) = b_{\varkappa,\ldots,\varkappa}(x)\Big|_0^1 - (m-1)\, c_{\varkappa,\ldots,\varkappa,\varkappa-1}(m\varkappa - 1),$$

$$m \cdot c_{\varkappa,\ldots,\varkappa,\varkappa-1}(m\varkappa - 1) = b_\varkappa^m(1) - b_\varkappa^m$$

und wegen (3)

$$= 0 \quad \text{für} \quad 1 < \varkappa; \tag{9}$$

aber

$$= \frac{1-(-1)^m}{m \cdot 2^m} \quad \text{für} \quad 1 = \varkappa,$$

wo dann wieder das oben bei (7) Bewiesene erscheint. Nach (8′) ist (9) trivial für

$$m\varkappa \equiv 0\,(2);$$

es wird von Interesse, wenn

$$m\varkappa \equiv 1\,(2)$$

gewählt ist, d. h. bei ungeradem m und $\varkappa$ mit $m, \varkappa > 1$.

Das zuletzt Gezeigte kann so aufgefaßt werden, daß für

$$1 < m, \varkappa \equiv 1\,(2),$$

$$(9') \quad c_{\varkappa,\ldots,\varkappa,\varkappa-1}(m\varkappa-1) = \frac{1}{m}\int_0^1 dx\, b_{\varkappa-1}(x)\cdot b_\varkappa^{m-1}(x) = \frac{1}{m}\int_0^1 d[b_\varkappa^m(x)] = 0$$

wird; insbesondere

$$c_{332} = 0,$$

$$c_{33332} = c_{554} = 0.$$

Die naheliegende Frage, ob durch (9′) die Gesamtheit der nichttrivialen Möglichkeiten $c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m} = 0$ erschöpft werden, oder ob ein $\varkappa$-System existiert, so daß

$$c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(g) = 0,$$

wird zugleich mit

$$g \equiv 0\,(2); \quad m > 2; \quad 0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \ldots$$

scheint noch nicht entschieden.

Die Zusammenstellung der einfachsten c-Werte in eine Tafel soll, wie schon angedeutet, nach wachsenden g geordnet werden; $g \equiv 1\,(2)$ kann gleich ausgelassen werden, da nach (8′) jene $c(g) = 0$ sind. Für feste g möge im Sinne steigender m fortgeschritten werden, wobei die durch (5. 5′) vorweggenommenen Möglichkeiten $m = 1, 2$ ausgelassen seien. Bei konstanten m beginne man mit kleinsten $\varkappa$-Differenzen und lasse deren Summe nie abnehmen. Mit den Hilfsgrößen

$$(10) \qquad \begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= -\frac{1}{2}, \\ b_2 &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!} = \frac{1}{12}, \\ b_4 &= \frac{-1}{30}\cdot\frac{1}{4!} = \frac{-1}{720}, \\ b_6 &= \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6!} = \frac{1}{30240}, \\ b_8 &= \frac{-1}{30}\cdot\frac{1}{8!} = \frac{-1}{1209600}, \\ b_{10} &= \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10!} = \ldots \end{aligned}$$

wird für

$$g = 4: \; c_{2,1,1} \equiv -2b_4,$$

$$= 6: \; c_{2,2,2} = b_6, \quad c_{3,2,1} = -\frac{1}{2}b_6, \quad c_{4,1,1} = -2b_6,$$

$$c_{2,2,1,1} = \frac{11}{2}b_6, \quad c_{3,1,1,1} = -\frac{9}{2}b_6, \quad c_{2,1,1,1,1} = 18b_6;$$

$$= 8: \; c_{3,3,2} = 0; \quad c_{422} = \frac{2}{3}b_8; \quad c_{431} = -\frac{2}{3}b_8; \quad c_{521} = -\frac{1}{3}b_8;$$

$$c_{6,1,1} = -2b_8; \quad c_{2222} = -5b_8; \quad c_{3221} = \frac{5}{3}b_8;$$

(11)
$$c_{3311} = \frac{-10}{3}b_8; \quad c_{4211} = \frac{14}{3}b_8; \quad c_{5111} = -4b_8;$$

$$c_{32211} = -10b_8; \quad c_{33111} = 5b_8; \quad c_{41111} = 16b_8;$$

$$c_{221111} = -45b; \quad c_{311111} = 25b_8; \quad c_{2111111} = -150b_8;$$

$$= 10: \; \ldots; \quad c_{631} = -\frac{7}{10}b_{10}; \quad \ldots;$$

$$= 12: \; c_{444} = -\frac{8967}{691}b_{12}; \quad \ldots; \quad c_{921} = -\frac{2652}{691}b_{12}; \quad \ldots$$

$$\vdots$$

Die hier eingehenden rationalzahligen Koeffizienten $\frac{c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(g)}{b_g}$ wachsen bei festem g mit m „zuletzt“ ähnlich einer Fakultät an. Die Arithmetik der auftretenden Nenner scheint von Interesse.

§ 3.

Quasi Eulersche Summen.

Wendet man auf (1.1) den Integralsatz Cauchys an, bezeichnet eine positive, hinreichend enge Umschlingung des Punktes $y = 0$ durch $\oint_{0+} dy$, so gilt nach (2.1)

$$b_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \frac{dy}{y^\nu} \frac{e^{xy}}{e^y - 1} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \ldots \\ -\infty < x < \infty \end{pmatrix}.$$

Um den Zeiger ν durch kontinuierliche Zahlbereiche hindurchführen zu können, schränken wir x ein auf das offene Einheitsintervall

(1) $$0 < x < 1,$$

verzerren den Integrationsweg zu einer Schleife $\to +\infty$ und schlitzen die y-Ebene vom Null-Punkt innerhalb dieser Schleife nach rechts. Für

(1′) $$1 \leqq \alpha < \infty$$

bestimme man den vieldeutigen Integranden in der geschlitzten y-Ebene durch die Angabe:

1″) $$e^{+\pi i a}\cdot y^{-a}\big|_{y=-1}=1.$$

Es sei dann

2) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{0+}\frac{dy}{y^{\alpha}}\frac{e^{xy}}{e^{y}-1}=-Z_{\alpha}(x),$$

so daß insbesondere für $\alpha=1,2,\ldots$ und $0<x<1$ zusammenfällt:

2′) $$-Z_{\alpha}(x)=b_{\alpha}(x).$$

Weil der Integrand in (2) bei beliebiger Annäherung an die wesentliche Singularität $y=\infty$ hinreichend klein bleibt, darf der Integrationsweg nach links gezogen werden, überstreicht dabei die sämtlichen Pole des Integranden in $y=2\lambda\pi i$, $\lambda=\pm 1,\pm 2,\ldots$, und zieht sich zuletzt in einen Punkt zusammen. So gewinnt man aus (2) die Reihenentwickelung, worin $\sum_{\lambda}'=\sum_{\lambda}^{\lambda\neq 0}$:

3) $$Z_{\alpha}(x)=\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i\lambda x}}{(2\pi i\lambda)^{\alpha}}\qquad\begin{pmatrix}0<x<1,\\ 1\leqq\alpha<\infty\end{pmatrix},$$

die in jedem kleineren abgeschlossenen Intervall $\varepsilon<x<1-\varepsilon$ sogar gleichmäßig in x, für $1<\alpha$ überdies absolut konvergiert, und der vieldeutige Nenner des Summanden bestimmt sich wegen (1″) aus

3′) $$e^{\pi i a}\cdot(i\lambda)^{-\alpha}\big|_{i\lambda=-1}=1,$$

wenn λ komplex gedacht wird.

Für $\alpha=2,4,\ldots$ pflegt man die Ausdrücke $\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^{-\alpha}$ als „Eulersche Summen“ zu bezeichnen. Ihre Darstellung in geschlossener Form durch die eine transzendente Zahl π und die in (2.10) gegebenen rationalen Zahlen, nämlich mit $\alpha=2,4,\ldots$

4) $$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda^{\alpha}}=-b_{\alpha}\cdot(2\pi i)^{\alpha}$$

kann aus (3) entnommen werden, und zwar auf doppelte Weise: Entweder durch Ausführung des Grenzübergangs $x\to 0$ in (3), der hier, bei in x gleichmäßiger Konvergenz, noch erlaubt ist, oder auf Parsevalsche Art durch bestimmte Produktintegration vermöge (2.5′). Das letztere Verfahren kann verallgemeinert werden und liefert neue Reihentypen, die den Eulerschen verwandt sind.

Hilfssatz 1. Für $m = 2, 3, \ldots$ und $1 \leqq \alpha$ gilt, wenn vermöge (3′) eine jede der vieldeutigen Potenzen $\lambda_\varrho^{-\alpha}$ $(\varrho = 1, \ldots, m)$ durch die, längs $(0, -i\infty)$ geschlitzten λ_ϱ Ebenen hierdurch eindeutig bestimmt werden,

$$\lim_{\alpha \to 1} \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0}{}' \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m)^\alpha} = \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0}{}' \frac{1}{(\lambda_1 \ldots \lambda_m)}. \tag{5}$$

Beweis. Die behauptete Tauschbarkeit der Grenzübergänge in α und λ erfordert den Nachweis gleichmäßiger Konvergenz in α der linksstehenden Summe in (5). Nach einem allgemeinen Satz über Dirichletsche Reihen genügt es hierzu,

$$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m)^{\frac{1}{2m} - 1} \tag{5′}$$

als konvergent zu erkennen; (5′) konvergiert sogar absolut. Um dies zu zeigen, betrachte man im m-dimensionalen euklidischen Raum ein kartesisches Koordinatensystem, markiere die ganzzahligen Gitterpunkte $(\lambda_1, \ldots \lambda_m)$, greife die in einem linearen $(m-1)$-dimensionalen Raum ausgebreitete Teilmenge

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 0 \tag{5″}$$

heraus und zerlege den $(m-1)$-dimensionalen Raum in kreisringartige Gebiete entsprechend der Folge von Ungleichungen

$$l^2 \leqq \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho^2 < (l+1)^2 \qquad (l = 1, 2, \ldots). \tag{5‴}$$

Dann liegen Gitterpunkte der Anzahl

$$r_l < 4 \cdot 2^{m-1} \cdot l^{m-2} = 8 \cdot (2l)^{m-2}$$

im l-ten Ring.

Durch (5′) wird jedem Gitterpunkt ein Summand zugeordnet, dessen Betrag b_l im l-ten Ring gleichmäßig nach oben geschätzt werden kann, und zwar nach (5″. 5‴)

$$b_l < \left(\frac{l}{2}\right)^{-m\left(1 - \frac{1}{2m}\right)} = \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{1}{2} - m}.$$

Somit ist in

$$\sum_{l=1}^{\infty} r_l b_l < \sqrt{2} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} l^{\frac{1}{2} - 2}$$

eine Majorante für (5′) gefunden, deren Konvergenz die in α gleichmäßige von (5) nach sich zieht. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Es sei vorerst

$$m = 2, 3, \ldots; \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, m; \qquad 1 < \alpha_\varrho; \tag{6}$$

die vieldeutigen Potenzen $\lambda_\varrho^{-\alpha_\varrho}$ seien wie in (1″, 3′) fixiert, indem jede λ_ϱ-Ebene nach unten geschlitzt wird. Dann konvergiert in $x; \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ gleichmäßig die Reihe

$$\sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}{}' e^{2\pi i x(\lambda_1+\ldots+\lambda_m)} \prod_{\varrho=1}^{m} (2\pi i \lambda_\varrho)^{-\alpha_\varrho}.$$

Also wird

$$\int_0^1 dx \prod_{\varrho=1}^{m} Z_{\alpha_\varrho}(x) = \int_0^1 dx \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}{}' e^{2\pi i x(\lambda_1+\ldots+\lambda_m)} \prod_{\varrho=1}^{m} (2\pi i \lambda_\varrho)^{-\alpha_\varrho}$$

$$= \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}{}' \int_0^1 dx \ldots$$

$$= \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m=0}{}' \int_0^1 dx \ldots + \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m\neq 0}{}' \int_0^1 dx \ldots$$

$$= (2\pi i)^{-\sum_{\varrho=1}^{m}\alpha_\varrho} \cdot \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m=0}{}' \prod_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho^{-\alpha_\varrho} \cdot \int_0^1 dx\, e^{2\pi i x(\lambda_1+\ldots+\lambda_m)},$$

denn jeder Summand in $\sum_{\lambda}^{\lambda_1+\ldots\neq 0}$ wird infolge der Periodizität von $e^{2\lambda\pi i x}$ durch die bestimmte Integration vernichtet; schließlich

$$(7)' \qquad (2\pi i)^{\sum_{\varrho=1}^{m}\alpha_\varrho} \int_0^1 dx \prod_{\varrho=1}^{m} Z_{\alpha_\varrho}(x) = \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m=0}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_m^{\alpha_m}},$$

$$\varrho = 1 \ldots m, \quad 1 < \alpha_\varrho.$$

Wegen Hilfssatz 1 und 2 darf die Beschränkung der α_ϱ sogar fallen zugunsten von

$$(6') \qquad 1 \leqq \alpha_\varrho \qquad (\varrho = 1 \ldots m).$$

In der Bezeichnungsweise von (2. 4. 6.) erhält man aus (3. 2′)

$$(7') \qquad \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m=0}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\varkappa_1}\ldots\lambda_m^{\varkappa_m}} = (-1)^m \cdot c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}(g) \cdot (2\pi i)^g$$

$$\text{mit} \quad m = 2, 3, \ldots, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, m, \quad \varkappa_\varrho = 1, 2, \ldots.$$

Als Analogon zu (4), wo jetzt die in (7′) links stehende $(m-1)$-fache Summe mit den rationalen Zahlen der Tafel (2. 11) in Verbindung gebracht ist. Im einzelnen wird z. B.

$$(7'') \qquad \sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_{2n}=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{2n}=0}{}' \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{2n}} = \frac{(\pi i)^{2n}}{2n+1},$$

was für $n = 1$ schon lang bekannt;

$$\sum_{\varkappa,..\nu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu+\nu=0}{}' \frac{1}{\varkappa\lambda\mu\nu} = -\frac{9}{2}\cdot\sum_{\varkappa,\lambda,\mu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu=0}{}' \frac{1}{\varkappa^2\lambda\mu} = 9\cdot\sum_{\varkappa,\lambda=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda=0}{}' \frac{1}{\varkappa^2\lambda^2} = \frac{\pi^4}{5};$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\sum_{\varkappa,\lambda,\mu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu=0}{}' \frac{1}{\varkappa\cdot\lambda^2\cdot\mu^3} = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu=0}{}' \frac{1}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2} = \sum_{\varkappa,\lambda=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda=0}{}' \frac{1}{\varkappa^3\lambda^3} = b_6(2\pi)^6 = \frac{2\pi^6}{945}$$

(7″)
$$\sum_{\varkappa,\lambda,\mu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu=0}{}' \frac{1}{\varkappa^3\lambda^3\mu^3} = 0;$$

$$\sum_{\varkappa,..\nu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu+\nu=0}{}' \frac{1}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2\nu^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2\pi)^8}{8!};$$

$$\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3=\pm\infty}^{\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3=0}{}' \frac{1}{\varkappa_1^5\cdot\varkappa_2^5\,\varkappa_3^4} = \sum_{\lambda_1,..\lambda_5=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_5=0}{}' \frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^3\lambda_4^3\lambda_5^2} = 0.$$

Es entsprechen (7‴) und die beiden letzten Identitäten den Aussagen (2. 9′ ff.); man beachte, daß auch bei der gegenwärtigen Darstellung dieser drei c-Werte durch unendliche Reihen ihr Verschwinden nicht verursacht wird durch paarweises Wegheben je zweier Summanden entgegengesetzten Vorzeichens, wohl aber durch das Wegfallen von Summandentripeln in

$$\sum_{\varkappa,\lambda,\mu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu=0}{}' \frac{\varkappa+\lambda+\mu}{(\varkappa\lambda\mu)^3} = 3\cdot\sum_{\varkappa,\lambda,\mu=\pm\infty}^{\varkappa+\lambda+\mu=0}{}' \frac{\varkappa}{(\varkappa\lambda\mu)^3}.$$

Allgemein gilt bei solcher Asymmetrie der Summanden für $m = 2, 3, 4, \ldots$; $1 < \Re(s)$:

$$\sum_{\lambda_1,..\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m=0}{}' \frac{\lambda_1}{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m)^s} = 0,$$

eine Identität, worin die Form der Nebenbedingung und der von den Zeigern durchlaufene Zahlbereich noch verallgemeinert werden kann; und dies unabhängig von der Bestimmungsweise der s-ten Potenz in jeder einzelnen λ-Ebene.

§ 4.

Zusammenhang mit Riemanns ζ-Funktion.

Es sei wieder wie oben zur Kürzung gesetzt

$\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m = g$, wo $m = 2, 3, \ldots$; $\varrho = 1, \ldots, m$; $\varkappa_\varrho = 1, 2, \ldots$.

Schreibt man den größten gemeinsamen Teiler T mehrerer ganzer Zahlen

$a, b, \ldots$ durch das Symbol

$$(a, b, \ldots) = T,$$

so wird durch

(1) $$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = 1$$

die Teilerfremdheit der m ganzen, nicht verschwindenden Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ausgesagt, die Existenz einer, in allen λ' zugleich aufgehenden und von 1 verschiedenen positiv ganzen Zahl also verneint. Fügt man die Zusatzbedingung (1) zu den drei Summationsbeschränkungen links in (3.7′) noch hinzu, so entstehen Teilsummen, die absolut konvergieren:

(2) $$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\substack{(\lambda_1, \ldots \lambda_m)=1 \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0}}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\varkappa_1} \ldots \lambda_m^{\varkappa_m}},$$

und die in einfacher Weise mit den vollen Summen (3.7′) in Verbindung zu bringen sind. Erweitert man nämlich (2) mit λ^{-g} und bildet $\sum_{\lambda=1}^{\infty}$, so wird die linke Seite von (3.7′) gerade ausgefüllt.

Schreibt man weiter (3.4) in der Gestalt

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{-g} = -\frac{1}{2} b_g (2\pi i)^g \qquad (g = 2, 4, \ldots)$$

so kann π eliminiert werden, und es entsteht

(3) $$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\substack{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)=1 \\ (\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)=0}}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\varkappa_1} \ldots \lambda_m^{\varkappa_m}} = (-1)^{m-1} \cdot \frac{2 c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m}(y)}{b_g},$$

wo links eine absolut konvergente, $(m-1)$-fach erstreckte Reihe, rechts im wesentlichen die Konstanten der Tabelle (2.11) erscheinen. Im einzelnen wird nach (2.7″) für $n = 1, 2, \ldots$

(4) $$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_{2n} = \pm\infty}^{\substack{(\lambda_1, \ldots \lambda_{2n})=1 \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{2n} = 0}}{}' \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{2n}} = -\frac{2^{1-2n}}{1+2n} \cdot \frac{1}{b_{2n}},$$

as den Zählerfaktoren der Bernoullischen Zahlen eine bestimmte Bedeutung für die Rationalität von $\sum_{\lambda}^{(\ldots)=1}{}'$ verleiht; für $n = 1$ wird (4) zur endlichen Summe, während alle höheren Fälle etwas Neues geben, wie

$$\sum_{\varkappa, \ldots \nu = \pm\infty}^{\substack{(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)=1 \\ \varkappa + \lambda + \mu + \nu = 0}}{}' \frac{1}{\varkappa \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \nu} = 18; \qquad \sum_{\varkappa, \lambda, \mu = \pm\infty}^{\substack{(\varkappa, \lambda, \mu)=1 \\ \varkappa + \lambda + \mu = 0}}{}' \frac{1}{\varkappa \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2} = -1.$$

Die in (2.11) begonnene Tafel kann jetzt in ihren „letzten“ Zeilen durch Grenzformeln ergänzt werden. Denkt man sich nämlich in (3) die sämtlichen Exponenten $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m \to +\infty$ anwachsend, so liefern links nach unten beschränkte Beiträge nur noch die endlich vielen Summanden mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m = \pm 1$. Da deren Summe verschwinden soll, kann ihre Anzahl nur geradzahlig sein, so daß für ungerades $m > 1$, also für $\begin{cases} m = 3, 5, 7, \ldots \\ \varrho = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$

$$\lim_{\varkappa_\varrho \to \infty} \frac{c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m}(g)}{b_g} = 0 \tag{5}$$

ist; und schärfer könnte durch Heraufmultiplizieren mit dem kleinsten $2^{\varkappa_\varrho}$ rechts ein endlicher Grenzwert gebildet werden. Bei geraden Werten von m ist der (5) entsprechende Grenzwert rechts noch von Restklassen der $\varkappa_\varrho$ abhängig und erfordert die kombinatorische Bestimmung der Zerlegungsmöglichkeiten der 0 in m Summanden des Absolutwertes 1 mit Nebenbedingungen in den $\varkappa_\varrho$. Z. B. wird für $\begin{cases} g \equiv 0\,(2) \\ m = 2 \end{cases}$, also für $\varkappa_2 \equiv \varkappa_1\,(2)$

$$\lim_{\varkappa_\varrho \to \infty} \frac{c_{\varkappa_1, \varkappa_2}(g)}{b_g} = 2 \cdot (-1)^{\varkappa_1}.$$

Sei nun s komplex veränderlich, und es bedeute $\Gamma(s)$ die von Euler eingeführte meromorphe Funktion. Dann betrachte man eine Ebene komplexer Zahlen z, schlitze sie von $0 \to +\infty$, erkläre $\log(-z)$ auf der negativen z-Achse reell, setze allgemein

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$$

und bilde ein Kurvenintegral $\oint_{0+} dz$, dessen Weg, schleifenartig aus $+\infty$ kommend, möglichst knapp den obigen Schlitz umfährt, — in positivem Umlauf —, so wird durch

$$\frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi} \oint_{0+} \frac{dz(-z)^{s-1}}{e^z - 1} = \zeta(s) \tag{6}$$

eine in s eindeutige analytische Funktion erklärt, die sogar für jedes feste $s \neq 1$, $s \neq \infty$ beschränkt bleibt.

Der Vergleich von (6) mit (3.2) läßt die Bedeutung von $\zeta(s)$ für die Interpolation der Folge

$$b_0, b_1, b_3, \ldots, b_g, \ldots$$

erwarten; nicht so selbstverständlich ist das durch (4) vermittelte Auftreten von $\frac{1}{\zeta(2n)}$ und noch seltsamer wäre, wenn für einen besonderen Wert von m eine sonst nicht existierende ζ-Aussage existierte. Das ist

aber in der Tat der Fall für den einzigen Wert $m = 3$; dieser liefert eine abzählbare Folge rationaler Zahlen, die das Verhalten von $\zeta(s)$ im komplexen „kritischen Streifen“ $0 < \Re(s) \leqq 1$ widerspiegeln.

Um dies zu erkennen, seien einige analytische und geometrische Tatsachen erwähnt.

Verfolgen wir zunächst den Wertevorrat der Funktion $\zeta(s)$ und die Mittel zu seiner Beherrschung! Wendet man auf (6) Cauchys Integralformel an und benutzt die elementaren Beziehungen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(s) = 2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right), \qquad \Gamma(1-s)\cdot\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

so folgt nach Riemann die Invarianz der Funktion $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ gegen Spiegelung am Punkt $s = \frac{1}{2}$; es genügt daher, die Funktion nur in einer Halbebene mit Grenzgeraden durch $s = \frac{1}{2}$ zu kennen, etwa im Gebiet $\frac{1}{2} \leqq \Re(s)$. In der nach rechts verschobenen Halbebene $1 < \Re(s)$ darf aber ohne Konvergenzstörung der Darstellung (6) die Integrationsschleife nach $z = +\infty$ gestrafft werden und längs des Weges $0 < z < \infty$ konvergiert eine geometrische Reihe, welche den Integranden nach Potenzen von e^{-z} entwickelt. Die bestimmte Integration über z führt so zu Eulers Entwicklung:

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s}, \qquad 1 < \Re(s). \tag{7}$$

Formal vom gleichen Typ der Dirichletschen Reihen, aber gültig für einen größeren Bereich der s-Ebene ist die Darstellung der reziproken Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s} \sum_{0<\lambda\leqq\nu}^{(\lambda,\nu)=1} e^{2\pi i\frac{\lambda}{\nu}}, \tag{7'}$$

die bei Annäherung von rechts

$$\lim_{s\to 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s} \sum_{0<\lambda\leqq\nu}^{(\lambda,\nu)=1} e^{2\pi i\frac{\lambda}{\nu}} = 0$$

liefert. Die Konvergenzuntersuchung von (7′) führt aber zur Bildung der Abschnitte

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-s} \sum_{0<\lambda\leqq\nu}^{(\lambda,\nu)=1} e^{2\pi i\frac{\lambda}{\nu}}$$

und zur Größenschätzung der v. Mangoldschen Doppelsumme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{0<\lambda\leqq\nu}^{(\lambda,\nu)=1} e^{2\pi i\frac{\lambda}{\nu}} = M(n); \tag{8}$$

v. Mangold fand

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} M(n) = 0. \tag{8'}$$

Riemann vermutete für das ganze, noch kritische Gebiet $\frac{1}{2} < \Re(s) \leqq 1$ die Ungleichung $\zeta(s) \neq 0$. Wenn Riemann recht hat, so verschärft sich (8′) für jedes $\varepsilon > 0$ zu

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} M(n) = 0; \tag{8''}$$

(8) und (8″) allein sind für uns weiterhin von Interesse.

Nun betrachte man im dreidimensionalen kartesischen Raum Würfel der Kantenlänge 1, deren Ecken bei dichtester Packung ein Punktgitter orthogonaler Maschen bildet. Zeichnet man willkürlich einen Gitterpunkt als Ursprung O aus und legt durch O drehbar eine Ebene, speziell etwa unter Annahme rechtwinkliger Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die „Mittelebene“

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \tag{9}$$

so ordnen sich die mit (9) inzidenten Ecken unseres kubischen Gitters nach Parallelogrammen, sogar als Rhombennetz mit O als Ecke; die Längen der Rhombendiagonalen sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{6}$.

Denkt man sich O als Lichtquelle, so zerfällt die Menge aller Raumgitterpunkte in zwei Klassen: die hellen und die dunklen Punkte. Jeder helle Punkt verursacht abzählbar viele dunkle, die sich mit gleichen Abständen in seinen Schattenstrahl einbetten. Denkt man sich die Gesamtheit der hellen Punkte durch ein Bündel von Vektoren OH charakterisiert, so erreicht man von O aus alle beschatteten Punkte durch die Vektoren $\lambda \cdot OH$ mit $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$.

Die Vorschrift, welche die hellen Punkte aus der Gesamtmenge auswählt, findet sich nun in (3) und in (8) realisiert durch

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 \quad \text{für} \quad m = 3$$

bzw. durch

$$(\lambda, \nu) = 1,$$

falls es gelingt, den Ausdruck (8) als abhängig zu erkennen von der Anordnung gewisser Gitterpunkte in einer ν, λ-Ebene.

Eine Ebene durch O sei eben von dort aus in Quadratmaschen eingeteilt, deren Seiten die Länge 1 besitzen und eine positive ν- und λ-Achse bestimmen. Als „1. Oktant“ kann der Winkelraum $\begin{cases} 0 \leqq \lambda \leqq \nu \\ 0 < \nu < \infty \end{cases}$ eingeführt werden. Denkt man wieder O leuchtend, so entspricht den hellen Punkten des Oktanten und nur diesen je ein Summand in (8); jede Angabe über die Lagerung der Punkte des 1. Oktanten überträgt sich durch Symmetrien und bedeutet eine Aussage über sämtliche hellen Punkte der Ebene ν, λ.

Um nun die Anordnung der hellen Punkte des ersten Oktanten mit der Größenschätzung des Ausdrucks (8) zu verknüpfen, summiere man dort nicht erst nach λ-Spalten, sondern sektoriell mit wachsendem $0 \leqq \frac{\lambda}{\nu} \leqq 1$. Die Realität der λ-Summen findet in unserer Darstellung ihren geometrischen Ausdruck durch eine weitere Symmetrie innerhalb der Spalten festen ν's, so daß endgültig nur die Gitterpunkte eines schmäleren Sektors

$$0 \leqq \frac{\lambda}{\nu} \leqq \frac{1}{2} \qquad (0 < \nu \leqq n)$$

im Sinne der obigen Klasseneinteilung untersucht werden müssen. Sind „zuletzt" für große n die Sektoren mit $\frac{\lambda}{\nu}$ bei 0 von hellen Punkten durchschnittlich stärker besetzt als jene Sektoren, deren $\frac{\lambda}{\nu}$ nahe bei $\frac{1}{2}$ liegt, dann wächst der Ausdruck (8) zu großen positiven Werten an; umgekehrt wird er stark negativ bei Überfüllung der Zone $\frac{\lambda}{\nu} = \frac{1}{2} - \varepsilon$ für kleine positive ε. Als „sektoriell gleichverteilt" seien Punktsysteme λ, ν bezeichnet, die, in (8) eingeführt, nicht nur (8'), sondern sogar (8'') zur Folge haben.

Dreht man nun die λ, ν-Ebene geeignet um O bis zur Koinzidenz mit der Mittelebene (9) des $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-Raumes, verzerrt die λ, ν-Quadrate zu Rhomben der Kantenlänge $\sqrt{2}$ und des Öffnungswinkels $\frac{\pi}{3}$, so lagern sich die hellen Punkte der acht λ, ν-Oktanten genau auf die hellen Punkte der Ebene $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Die sektorielle Verteilung im λ, ν-System beeinflußt daher nicht nur die Größe des Ausdrucks (8), sondern ebenso die der aus (3) hervorgehenden Reihe

$$(3') \qquad \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \pm\infty \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0}}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\varkappa_1} \lambda_2^{\varkappa_2} \lambda_3^{\varkappa_3}} = 2 \frac{c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3}(g)}{b_g} \quad \text{für} \quad \varkappa_\varrho = 1, 2, \ldots .$$

Der dreizähligen Symmetrie der Rhomben, welche in

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

lückenlos eingebettet werden können, entspricht die Invarianz von $c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3}(g)$ gegen $\varkappa_\varrho$-Tausch, wie sie unmittelbar aus (2.1.4) hervorgeht.

Die Frage nach der Lage der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ wird so über die Schätzung von $|M(n)|$ hinweg in Zusammenhang gebracht mit der sektoriellen Verteilung der λ' in (3') in ihrer Auswirkung auf die Funktionen $c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3}(g) : b_g$, und die Tatsache, daß rechter Hand in (3') rational bestimmbare Zahlen stehen für jedes $\varkappa_\varrho$-System, gibt ebenso viele Aussagen über die Größe der v. Mangoldschen Summe.

Beachtenswert scheint, wie eng dieser ζ-Zusammenhang gerade an der hier benutzten Reihentyp mit ausfallenden 0-Summanden $\sum_{\lambda}'$ gekettet ist; während die Überlegungen von § 3 sich auf § 5 weithin übertragen lassen, ist dies nicht der Fall für den gegenwärtigen Paragraphen.

§ 5.

Durchlaufende Summation.

Der Akzent am Symbol $\sum_{\lambda=\pm\infty}'$ in (3.7′) bedeutete den Ausfall gewisser Summanden, mit denen die Reihe selbst sinnlos geworden wäre; im übrigen durchlief λ alle ganzen rationalen Zahlen. Ungestörte Beweglichkeit der Summationszeiger treffen wir bei allgemeineren Reihenbildungen, die erst nach Abzug singulärer Glieder durch Grenzübergang wieder zu unseren früheren Ergebnissen führen. Denkt man sich entsprechend (1.1)

$$\frac{e^{xy}}{e^{y}-1}-\frac{1}{y}$$

nach Potenzen nicht von y, sondern von $(y-z)$ entwickelt, was unter einschränkenden Bedingungen möglich ist, setzt also etwa

$$-\frac{1}{y-z}+\frac{e^{x(y-z)}}{e^{y-z}-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+1}(x,z)\cdot y^{\nu},$$

so entstehen als Entwicklungskoeffizienten gewisse in x ganze, in z meromorphe Funktionen $b_{\mu}(x,z)$ die für verschwindendes z in die früher erklärten Polynome (2.1) entarten:

$$b_{\mu}(x,0)=b_{\mu}(x) \quad \text{falls} \quad \mu=1,2,\ldots,$$

und die entsprechend (1.2.4) Rekursionen zulassen. Da wir jedoch bei niederen Zeigern ν stehen bleiben, soll nur die Analogie zu (3.2.3) betont werden; auch wollen wir wieder — für diesen ganzen Paragraphen — die Eindeutigkeit der Potenzen

$$(\lambda_{\varrho}-u_{\varrho})^{-\alpha_{\varrho}} \qquad (\varrho=1,\ldots,m;\quad m=2,3,\ldots;\quad 1\leqq\alpha_{\varrho});$$

durch Schlitzung jeder u_{ϱ}-Ebene von λ_{ϱ} aufwärts gegen $i\infty$, mit der Annahme

$$(\lambda_{\varrho}-u_{\varrho})^{-\alpha_{\varrho}}\big|_{u_{\varrho}=\lambda_{\varrho}-1}=1$$

erreichen.

Hilfssatz 2. Voraussetzung. $0<x<1$; u beliebig komplex;

$$\Re(u)<\lambda_0\equiv 0\,(1); \qquad 1\leqq\alpha<\infty;$$

$$\sum_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}\frac{e^{2\lambda\pi i x}}{(\lambda-u)^{\alpha}}=\vartheta(\alpha).$$

Behauptung. $s(\alpha)$ ist Summe der konvergenten Reihe $\sum_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}$, und bleibt gleichmäßig in α beschränkt.

Beweis. Wird die in n gleichmäßige Beschränktheit der Teilsummen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}, \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

vorausgesetzt, so kommt man durch Anwendung Abelscher Summation elementar zum Ziel. Im Hinblick auf spätere Folgerungen ziehen wir alles zu Zeigende einheitlich aus Cauchys Integralsatz. Setzt man für $\lambda_0 < l$ die Teilreihe

$$\sum_{\lambda=l}^{l^2-1} \frac{e^{2\pi i \lambda x}}{2\pi i \cdot (\lambda - u)^{\alpha}} = s_l,$$

benutzt in einer komplexen t-Ebene das positiv durchfahrene Rechteck aus den Geradenstücken

$$\Re(t) = l - \frac{1}{2}, \quad l^2 - \frac{1}{2}; \qquad J(t) = +\sqrt{l}, \quad -\sqrt{l}$$

als Integrationsweg des Kurvenintegrales $\oint dt$, so wird

$$s_l = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dt}{(t-u)^{\alpha}} \frac{e^{2\pi i x t}}{1 - e^{2\pi i t}}$$

und wir schätzen

$$|s_l| < \frac{2}{\sqrt{l}} + \frac{2}{l} + \frac{2l^2}{e^{\sqrt{l}}} < \frac{3}{\sqrt{l}}$$

gleichmäßig in α, wenn $l > l_0(x, u)$ mit $\frac{\partial l_0}{\partial \alpha} = 0$. Die behauptete Konvergenz von s folgt jetzt durch Vergleich mit der Majorante, wo zuletzt

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |s_{l^\mu}| < 3 \sum_{\mu=1}^{\infty} l^{-(2^{\mu-2})} < 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{l} - 1} < \frac{4}{\sqrt{l}}$$

beliebig (mit $l^{-\frac{1}{2}}$) klein wird; aber auch die in α gleichmäßige Beschränktheit von s folgt aus obiger Schätzung unmittelbar, wie die Bildung der absoluten Beträge jedes Summanden und deren Vergleich bei zu 1 abnehmendem α zeigt.

Damit ist Hilfssatz 2. bewiesen und speziell die Zulässigkeit des Tausches

$$\lim_{\alpha \to 1} \int_0^1 dx = \int_0^1 dx \lim_{\alpha \to 1}$$

(3. 7').

Es sei fernerhin

$$0 < x < 1; \quad 1 \leqq \alpha < \infty; \quad 0 \not\equiv u(1).$$

Setzt man analog (3.3), aber für Zeiger λ, die von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen,

$$(1) \qquad \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda x}}{\{2\pi i(\lambda-u)\}^{\alpha}} = Z_{\alpha}(x, u),$$

dann folgt nach Fourier oder Cauchy für $Z_1(x, u) = Z(x, u)$ als Summe

$$(1') \qquad Z(x, u) = \frac{e^{2\pi i u x}}{1 - e^{2\pi i u}}$$

und durch gliedweise Differentiation nach u, die hier zulässig ist,

$$(1'') \qquad Z_2(x, u) = x \frac{e^{2\pi i u x}}{1 - e^{2\pi i u}} + \frac{e^{2\pi i u (1+x)}}{(1 - e^{2\pi i u})^2}.$$

Wenn $m = 2, 3, 4, \ldots$, so bilde man mit m komplexen Konstanten

$$(2) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_m \not\equiv 0 \,(1)$$

und zunächst mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 1$ die absolut konvergierende Reihe für das Produkt

$$Z_{\alpha_1}(x, u_1) \cdot Z_{\alpha_2}(x, u_2) \cdot \ldots \cdot Z_{\alpha_m}(x, u_m) = \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = -\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x (\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)}}{\prod_{\varrho=1}^{m} \{2\pi i(\lambda_\varrho - u_\varrho)\}^{\alpha_\varrho}}.$$

Wegen (2′) darf gliedweise integriert werden $\int_0^1 dx \ldots$, woraus

$$(3) \qquad \int_0^1 dx \prod_{\varrho=1}^{m} Z_{\alpha_\varrho}(x, u_\varrho) = \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} \prod_{\varrho=1}^{m} \{2\pi i(\lambda_\varrho - u_\varrho)\}^{-\alpha_\varrho}.$$

Der Grenzfall $\alpha_\varrho \to 1$ wird durch Formel (3) noch mitumfaßt, denn die Grenzübergänge rechts sind tauschbar nach Hilfssatz 1, links nach Hilfssatz 2. Wegen (1′) wird so

$$(4) \qquad \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} \frac{1}{(\lambda_1 - u_1) \ldots (\lambda_m - u_m)} = \frac{(2\pi i)^m}{(1 - e^{2\pi i u_1}) \ldots (1 - e^{2\pi i u_m})} \cdot \frac{e^{2\pi i (u_1 + \ldots + u_m)} - 1}{2\pi i (u_1 + \ldots + u_m)}$$

und für $u_1 + \ldots + u_m = 0$:

$$(4') \qquad \sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} \frac{1}{(\lambda_1 - u_1) \ldots (\lambda_m - u_m)} = \frac{(2\pi i)^m}{(1 - e^{2\pi i u_1}) \ldots (1 - e^{2\pi i u_m})};$$

für $u_1 + \ldots + u_m = \pm 1, \pm 2$:

(4″) $$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} \frac{1}{(\lambda_1 - u_1) \ldots (\lambda_m - u_m)} = 0.$$

Unter (4′) subsummiert sich z. B.

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{u} \operatorname{ctg} \pi u,$$

unter (4″) verschiedene elementare Reihensummationen.

Die Spezialisierung $m = 2$, $u_2 = -2u_1 = -2u$ von (4) zeigt

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + u)(\lambda + 2u)} = \frac{\pi}{u \sin 2\pi u};$$

ähnlich wird

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \pm\infty}^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0} \frac{1}{(\lambda_1 - u)\left(\lambda_2 - u - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda_3 - 2u + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi^2}{u}$$

für $m = 3$, $u_1 = u$, $u_2 = u + \frac{1}{2}$, $u_3 = 2u - \frac{1}{2}$;

und mit $m = 2, 3, \ldots$; $\varrho = 1, \ldots, m$; $u \not\equiv 0\,(1)$; $u_\varrho = u + \frac{\varrho}{m+1}$

$$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm\infty}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} \prod_{\varrho=1}^{m} \frac{1}{\lambda_\varrho - u_\varrho} = \frac{(2\pi i)^{m-1}}{m\left(u + \frac{1}{2}\right)} \frac{(1 - e^{2\pi i u})\{1 + (-1)^{m-1} e^{2\pi i m u}\}}{1 - e^{2\pi i u (m+1)}},$$

sowie mit $m = 2, 3, \ldots$; $\varrho = 1, \ldots, m$; $u \not\equiv 0\,(1)$; $v_\varrho = u + \frac{\varrho}{m}$

$$\sum_{\lambda_1, \ldots \lambda_m = \pm 0}^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0} \prod_{\varrho=1}^{m} \frac{1}{\lambda_\varrho - v_\varrho} = \frac{(2\pi i)^{m-1}}{\left(mu + \frac{m+1}{2}\right)} \frac{\{1 + (-1)^m e^{2\pi i m u}\}}{\{1 - e^{2\pi i m u}\}},$$

was für ungerade m zu elementaren Ausdrücken rechts führt.

Aus (4) kann durch Differentiation nach $u_1, \ldots, u_m$ ein Aussagensystem gewonnen werden in gleichem Umfang wie durch bestimmte Produktintegration $\int_0^1 dx$ über (1), (1″) ff.

Läßt man in (4) m beliebig wachsen, erweitert mit $\prod_{\varrho=1}^{m} u_\varrho$, und fordert die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} u_\varrho$, so entsteht links ein neuer Reihentyp, rechts ein konvergentes Produkt, verknüpft mit Ausdrücken wie etwa 2^π im Falle $u_\varrho = \frac{(-1)^{\varrho \cdot i}}{\varrho}$.

§ 6.

Inhomogene Nebenbedingung.

Die bisher angewandten unendlichen Reihen wurden summiert über ein System von Zeigern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, und die Schlußformeln (3.7′), (5.4) enthielten dann eine homogene Summationsbeschränkung:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 0. \tag{1}$$

Die Form dieser Einschränkung ist nicht wesentlich, sondern kann allgemeiner gefaßt werden.

Verfolgen wir doch die Entstehung der Identitäten (3.7′)ff.! Für $\varrho = 1, 2, \ldots, m$; $0 < x < 1$; $\alpha_\varrho = 1, 2, \ldots$; u_ϱ komplex; $P_\alpha(x)$ Polynom α-ten Grades in x wurde aus konvergenten trigonometrischen Reihen

$$e^{2\pi i u_\varrho x} P_{\alpha_\varrho}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i \nu x};$$

nach Parseval gebildet:

$$\int_0^1 dx\, e^{2\pi i x \sum_{\varrho=1}^{m} u_\varrho} \prod_{\varrho=1}^{m} P_{\alpha_\varrho}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} d_\nu \int_0^1 dx\, e^{2\pi i \nu x}; \tag{2}$$

dies war wegen Orthogonalität $= d_0$, wo die d_ν $(m-1)$-fach erstreckte Reihen, abhängig von α_ϱ und u_ϱ, bilden; sie werden ausgelesen aus m-fachen Reihen durch die Bindung (1); zugleich war links in (2) die Integration elementar ausführbar.

Hätte man vor Ausübung der Integration in (2) noch mit $e^{2\pi i n x}$ erweitert, so könnte dies links aufgefaßt werden als Transformation

$$u_\varrho \to u_{\varrho+1},$$

was von x unabhängig ist und die Integration nicht stört; rechts wäre d_n an Stelle von d_0 ausgesondert.

Die Leistungsfähigkeit dieses erweiterten Konstruktionsprinzips ist gering in bezug auf (5.4), wo die zusätzlichen Resultate auch einfacher zu gewinnen sind.

Dagegen wird so (3.7′) als Teilergebnis umfangreicherer Entwickelungen neu bewiesen. Im einzelnen wird z. B.:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2 = \pm\infty}^{\lambda_1 \pm \lambda_2 = n}{}' \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \mp \frac{2}{n^2} \qquad (\pm n = 1, 2, \ldots)$$

was einen Schluß zuläßt auf die Unbestimmtheitsgrenzen von $\sum_{\lambda_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ in Abhängigkeit von der Summationsvorschrift, nach welcher die $\lambda_1 \lambda_2$ erfaßt wurden. Ähnlich

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=\pm\infty}^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=n}{}' \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = -\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3};$$

$$\sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_4=\pm\infty}^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=n}{}' \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \frac{12\pi^2}{n^2} - \frac{24}{n^4}; \tag{3}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2=\pm\infty}^{\lambda_1+\lambda_2=n}{}' \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} = \frac{2\pi^2}{3n^2} - \frac{6}{n^4};$$

. . . . . .

wird in bezug auf die letzte Gleichung $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ gebildet, so entsteht rechts in (3) eine lineare Kombination Eulerscher Summen, links ein Produkt zweier solcher, falls dort die fehlenden Glieder $\sum_{\lambda_1,\lambda_2=-\infty}^{\lambda_1+\lambda_2=0}{}'$ ergänzt werden; das entsprechende Korrektiv für die rechte Seite ist dann durch (3.7′) gegeben.

Bildet man allgemeiner für

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m = g, \quad \gamma = 0, 1, \ldots, g-2; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

mit rationalzahligen Koeffizienten $d_\gamma(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m) = d_\gamma$ durch Teilintegration

$$\sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m=n}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\varkappa_1}\lambda_2^{\varkappa_2}\ldots\lambda_m^{\varkappa_m}} = \sum_{\gamma=0}^{g-1} \frac{(2\pi i)^\gamma}{n^{g-\gamma}} d_\gamma \tag{3′}$$

wählt $1 < \varkappa_1, \ldots, \varkappa_m \equiv 0\,(1)$, bildet $\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ und addiert (3.7′) so ist

$$\sum_{\lambda_1,\ldots\lambda_m=\pm\infty}{}' \frac{1}{\lambda_1^{\varkappa_1}\ldots\lambda_m^{\varkappa_m}} = (-1)^m c_{\varkappa_1,\ldots\varkappa_m}(g)(2\pi i)^g + \sum_{\gamma=0}^{g-2}(2\pi i)^\gamma d_\gamma \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^{g-\gamma}}. \tag{3″}$$

Die Reihe linker Hand in (3″) zerfällt in das Produkt von m absolut konvergierenden Reihen, während die rechte Seite nicht identisch verschwindet in bezug auf ihre γ-Summanden, falls $g \equiv 0\ (2)$ gewählt wird. Wenn nun

$$\sum_{\gamma=0}^{g-1} d_\gamma^2 > 0$$

ist, so liefert (3″) mit (2.9′) für die besonderen Exponentensysteme

$$\begin{cases} \varkappa_1 = \varkappa_2 = \ldots = \varkappa_{m-1} = 3, 5, 7, \ldots \\ \varkappa_m = \varkappa_1 - 1, \end{cases} \tag{4′}$$

welche $\sum_{\lambda_1=-\infty}^{\infty}{}'$ und $c_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_m}$ zum Verschwinden bringen, eine lineare Rekursion zwischen (höchstens) $g-1$ Bernoullischen Zahlen, welche sich aber

von der klassischen Beziehung (1.2) wesentlich unterscheidet, sofern sie nicht für alle positiven $g = 2, 3, \ldots$ gilt, sondern nur für die Teilmenge (4.4'), deren Häufigkeit aus dem Primzahlsatz asymptotisch unterhalb g zu

$$\frac{g}{2}\left(1 - \frac{2}{\log g}\right)$$

bestimmt wird.

Die erste dieser singulären linearen Rekursionen für die Bernoullischen Zahlen hat statt für $g = 8$ und wird wohl am einfachsten gewonnen indem aus der Identität in x, deren Existenz funktionentheoretisch zu erschließen ist:

$$(5) \quad b_3^2(x)\, b_3(x) = d_0 + d_1\, b_2(x) + d_2\, b_4(x) + d_3\, b_6(x) + 560\, b_8(x),$$

vier lineare Bestimmungsgleichungzn entnommen werden für die freien Koeffizienten $d_0, \ldots, d_3$. Wegen (3.3) und (3'') folgt allgemein für jedes g aus (4') mit $b_\varrho(0) = b_\varrho$

$$\sum_{\varrho=0}^{g-2} d_\varrho\, b_\varrho = 0,$$

wo die d_ϱ entsprechend (5) gewonnen werden.

(Eingegangen am 27. Juli 1927.)

Über Systeme hyperkomplexer Zahlen.

Von

Richard Brauer in Königsberg i. Pr.

Die Theorie der Systeme hyperkomplexer Zahlen über einem Grundkörper K hängt aufs engste mit der Theorie der Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem gegebenen Körper zusammen, also mit denjenigen gruppentheoretischen Betrachtungen, die im allgemeinen als arithmetische Untersuchungen über Gruppen linearer Substitutionen bezeichnet werden. Dem Fall, daß K der Körper *aller* Zahlen ist, entspricht die Theorie der Gruppen linearer Substitutionen mit *beliebigen* Koeffizienten; hier hat der erwähnte Zusammenhang von Anfang an bei den Untersuchungen eine wesentliche Rolle gespielt. In der neuen Theorie dagegen, bei der als Grundkörper ein beliebiger Körper zugelassen wird, ist der Zusammenhang wohl durchweg unberücksichtigt geblieben.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Systeme hyperkomplexer Größen mit Hilfe von gruppentheoretischen Sätzen der genannten Art zu untersuchen. Dementsprechend werden von der Theorie der hyperkomplexen Größen nur die Begriffe und die einfachsten Sätze vorausgesetzt, während gruppentheoretische Sätze in weitem Maße herangezogen werden sollen[1]). Als Grundkörper K werden nicht nur beliebige Zahlkörper, sondern allgemein vollkommene Körper[2]) zugelassen. Bei den Systemen hyperkomplexer Größen beschränke ich mich im wesentlichen auf die Behandlung halbeinfacher (Dedekindscher) Systeme. Ich setze außerdem voraus, daß der

[1]) Für die Theorie der hyperkomplexen Zahlen vergleiche man etwa: L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927 (umgearbeitete deutsche Übersetzung von Algebras and their arithmetics, Chicago 1923). Ich zitiere das Buch mit Dickson. — Eine Reihe der verwendeten gruppentheoretischen Sätze findet man in § 1 der vorliegenden Arbeit zusammengestellt.

[2]) Vgl. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 137 (1909), S. 167–309. — Wegen der Voraussetzung, daß K vollkommen ist, vgl. die in Anm. [4]) zitierte Arbeit von Frl. E. Noether.

Rang in bezug auf K endlich ist[3]). Auf schon bekannte Sätze soll im folgenden nur verhältnismäßig kurz eingegangen werden.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit werden die verschiedenen Begriffe vom gruppentheoretischen Standpunkt aus untersucht und die Reduktion der halbeinfachen Systeme auf einfache Systeme behandelt. Diese Betrachtungen sollen als Grundlage für das Folgende dienen.

Im § 2 wird zunächst aus gruppentheoretischen Sätzen der Wedderburnsche Satz über die Darstellbarkeit eines einfachen Systems als direktes Produkt $A \times B$ hergeleitet; dabei bedeutet A ein System ohne Nullteiler, B besteht aus allen Matrizen eines wohlbestimmten Grades mit Koeffizienten aus K. Weiterhin ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein einfaches System A keine Nullteiler besitzt, daß für eine absolut irreduzible Darstellung von A der Schursche Index und der Grad übereinstimmen.

Bei Behandlung der Frage, in welchen algebraischen Körpern über dem Grundkörper K eine absolut irreduzible Darstellung eines Systems A sich rational machen läßt, kann man sich auf den Fall beschränken, daß A keine Nullteiler besitzt. Wie in § 3 gezeigt wird, kann man diese Körper vollständig durch die größten Unterkörper von gewissen einfachen Systemen hyperkomplexer Größen charakterisieren. Es handelt sich dabei gerade um die Systeme, die bei Darstellung als direktes Produkt nach dem Wedderburnschen Satz gerade das System A als nullteilerfreien Faktor enthalten — Frl. E. Noether hat diese Sätze unabhängig auf ganz anderem Wege bewiesen und die Betrachtungen auch für den Fall durchgeführt, daß der Grundkörper nicht vollkommen ist. Wir haben darüber gemeinsam ohne Beweise berichtet[4]).

Nach diesen Untersuchungen wende ich mich im § 4 zu der Bestimmung aller Systeme A ohne Nullteiler über einem gegebenen Grundkörper K. Diese Aufgabe ist vollständig mit der anderen äquivalent, alle Faktorensysteme[5]

---

[3]) Gewisse andere Systeme sind in neuerer Zeit von Herrn E. Artin in der Abhandlung: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg 5 (1927), S. 251—260 in die Theorie einbezogen worden. Für die vorliegende Arbeit ist die Beschränkung auf Systeme, die von endlichem Rang in bezug auf einen Grundkörper sind, wesentlich.

[4]) R. Brauer und E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Berl. Sitzungsberichte 1927, S. 221—228. Der Noethersche Beweis wird in einer demnächst in der Math. Zeitschr. erscheinenden Arbeit von Frl. E. Noether durchgeführt. Im Spezialfall $t = 1$ waren die Sätze 4 und 5 der vorliegenden Arbeit Frl. Noether bereits wesentlich früher als dem Verfasser bekannt.

[5]) Man vgl. dazu R. Brauer, Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 677—696. Ich zitiere diese Arbeit im folgenden mit U.

bezug auf diejenigen Körper Z anzugeben, die algebraisch (von endchem Grade) über K sind; Z wird dabei dem Zentrum von A einstufig omorph. Wie man aber alle Faktorensysteme zu Z aufstellen kann, abe ich in der in Anm. [5]) zitierten Arbeit angegeben. Man kann daher gen, daß die Aufstellung aller Systeme ohne Nullteiler auf diesem Wege öglich ist. Praktisch können dabei noch Schwierigkeiten auftreten[6]), da notwendig ist, Struktureigenschaften der algebraischen Körper über K, B. gewisse Eigenschaften der Galoisschen Gruppe zu beherrschen. Immerin darf man wohl derartige Fragen, die sämtlich Körper, also elementarere egenstände als Systeme hyperkomplexer Zahlen betreffen, für unsere ntersuchungen als bekannt voraussetzen.

Kennt man ein zu einem gegebenen Faktorensystem assoziiertes, das u einem Körper möglichst niedrigen Grades gehört, so kann man das zuehörige System hyperkomplexer Größen mit Hilfe einer Darstellung durch latrizen explizit angeben[7]). Ich erläutere den Sachverhalt an zwei einchen Beispielen: 1. K sei der Körper aller reellen Zahlen. Dann kommen ur drei wesentlich verschiedene, sofort angebbare Faktorensysteme in Beracht; dem entsprechen als einzige Systeme ohne Nullteiler über K die eiden Körper K und $K(i)$ und das System der Quaternionen[8]). Gruppenheoretisch entsprechen den drei Faktorensystemen die drei Typen von ruppen linearer Substitutionen in bezug auf den reellen Körper als Grundereich. 2. K sei ein endlicher Körper. Dann kommt, wie ich zeige, für den algebraischen Körper Z über K nur das Einheitsfaktorensystem in etracht. Das ergibt einerseits den Satz von Wedderburn[9]), daß bei endchen Körpern das kommutative Gesetz der Multiplikation eine Folge der nderen Axiome ist. Andererseits findet man daraus den Satz, daß ein bsolut irreduzibler Bestandteil einer Gruppe linearer Substitutionen mit oeffizienten aus einem endlichen Körper immer im Körper seines Chakters darstellbar ist.

---

[6]) Insbesondere soll nicht behauptet werden, daß es stets möglich ist, mit unsern ilfsmitteln unendlich viele Systeme ohne Nullteiler gleichzeitig zu übersehen.

[7]) In gewissen ziemlich speziellen Fällen finden sich die Darstellungen schon i Cecioni, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 47 (1923), p. 203—254; vgl. auch das Kapitel des Dicksonschen Buches.

[8]) Das wurde bekanntlich zuerst von Frobenius im Journal f. d. reine u. angew. ath. 84 (1878), S. 59 bewiesen; später wurden von verschiedenen Autoren eine ganze eihe von Beweisen angegeben.

[9]) Trans. of the Am. Math. Soc. 6 p. 349, vgl. auch Dickson S. 253. Ein benders einfacher Beweis findet sich bei Herrn E. Artin, Über einen Satz von Herrn H. Maclagan Wedderburn, Abhandl. a. d. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), S. 245—250. tzt man diesen Satz als bekannt voraus, so kann man den folgenden Satz aus ihm rleiten.

Im § 5 behandle ich schließlich unter anderem einige Sätze über direkte Produkte von Systemen. Dabei ergibt sich eine einfache Deutung für den Exponenten l, den ich früher bei anderen Untersuchungen verwandt habe[10]) — Ich hebe hier nur einen Satz hervor: Ist $\mathfrak{A}$ ein System hyperkomplexer Zahlen ohne Nullteiler, ist $\mathfrak{K}$ — wie man ohne Einschränkung annehmen kann — das Zentrum von $\mathfrak{A}$, ist schließlich m^2 der Rang[11]) von $\mathfrak{A}$ und $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, so kann man $\mathfrak{A}$ als direktes Produkt $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_r$ darstellen, wo $\mathfrak{A}_\varrho$ auch das Zentrum $\mathfrak{K}$ hat, ebenfalls keine Nullteiler besitzt und den Rang $(p_\varrho^{a_\varrho})^2$ hat.

§ 1.

Ich beginne damit, einige Sätze der Theorie der Gruppen linearer Substitutionen zu nennen, die im folgenden mehrfach verwendet werden[12]) In der Literatur sind diese Sätze nur für den Fall behandelt worden daß der Grundkörper $\mathfrak{K}$ ein gewöhnlicher Zahlkörper ist. Die meisten von ihnen sind aber auf den Fall eines vollkommenen Körpers $\mathfrak{K}$ zu übertragen Die Beweise müssen dabei manchmal etwas modifiziert werden, doch treten keine wesentlichen Schwierigkeiten auf; ich werde darauf noch an anderer Stelle eingehen.

Eine Gruppe mit Koeffizienten aus irgendeinem Körper $\mathfrak{K}$ heißt absolut irreduzibel, wenn sie in allen Erweiterungskörpern von $\mathfrak{K}$ irreduzibel ist Eine Gruppe heißt absolut vollständig reduzibel, wenn sie in einem Erweiterungskörper vollständig in absolut irreduzible Bestandteile zerlegt werden kann. Ähnliche (äquivalente) Gruppen gelten als nicht wesentlich verschieden. Die Gruppe, die aus lauter Nullen besteht, werde als Nullgruppe bezeichnet.

Satz α: Dann und nur dann ist eine von der Nullgruppe verschiedene Gruppe des Grades f absolut irreduzibel, wenn sie f^2 linear unabhängige Matrizen enthält.

---

[10]) R. Brauer, Über Zusammenhänge von arithmetischen und invariantentheoretischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1926, S. 410.

[11]) Dieser Rang ist stets eine Quadratzahl. — Unter dem Rang ist im folgenden stets die Maximalanzahl linear unabhängiger Elemente von $\mathfrak{A}$ in bezug anf $\mathfrak{K}$ zu verstehen

[12]) Man vergleiche: W. Burnside, Proceedings of the London Math. Soc. 2. Ser. Vol. III (1905), p. 430 (Satz α); G. Frobenius und I. Schur, Über die Äquivalenz von Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte d. Berliner Akademie 1906, S. 209 (Satz β und γ); I. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen Transactions of the American Math. Soc., .2 Ser., Vol. XV (1909), p. 159—175 (Satz bis ϑ). Satz δ findet sich bereits bei H. Taber, Comptes Rendus 142 (1906), S. 948 bis 951. — Ein Satz, der nicht mehr gilt, wenn die Charakteristik des Grundkörpers von Null verschieden ist, ist z. B. der Satz III der eben genannten Arbeit von Frobenius und Schur.

Satz β: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei absolut irreduzible Darstellungen einer Gruppe; alle Koeffizienten mögen einem gewissen Körper angehören. Dann und nur dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich, wenn sie denselben Charakter haben.

Satz γ: Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei absolut vollständig reduzibel; die von der Nullgruppe und untereinander wesentlich verschiedenen irreduziblen Bestandteile seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ mit den Graden $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Dann enthält $\mathfrak{G}$ genau $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2$ linear unabhängige Elemente.

Satz δ: Eine in einem Körper K rationale und irreduzible Gruppe ist absolut vollständig reduzibel.

Satz ε: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien beide im Körper K rational und irreduzibel und nicht ähnlich. Dann haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch keinen absolut irreduziblen Bestandteil gemeinsam.

Satz ζ: Eine Gruppe $\mathfrak{G}_1$ sei in dem algebraischen Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ über K rational, $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$ seien die Konjugierten von ϑ in bezug auf K. Ersetzt man in allen Elementen von $\mathfrak{G}_1$ die Größe ϑ durch ϑ_ϱ, so geht $\mathfrak{G}_1$ in eine isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_\varrho$ über $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$, die vollständig in die Bestandteile $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r$ zerfällt, ist dann in K rational darstellbar.

Satz η: Ist $\mathfrak{G}$ in K irreduzibel, sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ die wesentlich verschiedenen absolut irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$, so kommt jedes $\mathfrak{G}_\varkappa$ in $\mathfrak{G}$ gleich oft, etwa m-mal vor. Durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{G}_1$ zu K entsteht ein algebraischer Körper Z vom Grade k über K; geht man von $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots, \mathfrak{G}_k$ aus, so kommt man zu den konjugierten Körpern. $\mathfrak{G}_1$ ist in einem algebraischen Körper vom Grade m über Z rational darstellbar. Ist $\mathfrak{G}_1$ in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rational und ersetzt man in $\mathfrak{G}_1$ die Größe ϑ durch eine in bezug auf K konjugierte, so erhält man (abgesehen von Ähnlichkeit) eine der Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ und zwar bei passender Wahl der Konjugierten eine beliebig vorgegebene von ihnen.

Satz ϑ: Ist bei den Bezeichnungen von Satz η die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ in einem Erweiterungskörper Ω von K rational darstellbar, so ist Z in Ω enthalten. Ist Ω algebraisch vom Grade t über Z, so ist t durch m teilbar. — m werde als Schurscher Index von $\mathfrak{G}_1$ in bezug auf den Grundkörper bezeichnet.

Außer diesen Sätzen werden im folgenden die Ergebnisse meiner hier mit U. zitierten Arbeit aus der Math. Zeitschr. 28 weitgehend verwendet.

Der Grundkörper werde im folgenden stets als vollkommener Körper vorausgesetzt. A sei ein System hyperkomplexer Zahlen (eine Algebra) über als Grundbereich. Man nennt ein System $\mathfrak{A}$ von Matrizen eines festen

Grades f mit Koeffizienten aus einem Erweiterungskörper von K eine Darstellung von A, wenn den Elementen von A eindeutig Elemente von $\mathfrak{A}$ zugeordnet sind derart, daß Isomorphie bezüglich Addition und Multiplikation besteht, daß ferner der Multiplikation eines Elementes von A mit einer Größe $\varkappa$ von K die Multiplikation der zugeordneten Matrix mit $\varkappa$ entspricht. Die Matrizen von $\mathfrak{A}$ bilden eine Gruppe[13]). Wir wenden die Begriffe der Gruppentheorie, wie z. B. Ähnlichkeit, auch auf Darstellungen von Systemen hyperkomplexer Zahlen an; ähnliche Darstellungen gelten als nicht wesentlich verschieden. Ordnet man jedem Element von A die Größe 0 zu, so erhält man eine Darstellung, die Nulldarstellung. Diese wird aber im folgenden im allgemeinen ausgeschlossen.

Bekanntlich kann man zu A immer eine einstufig isomorphe, in K rationale Darstellung finden[14]).

Eine Größe α von A heißt *Wurzel der Null* oder *nilpotent*, wenn eine Potenz von α verschwindet. α heißt *Wurzelgröße* oder *eigentlich nilpotent*, wenn für alle ζ aus A stets $\alpha\zeta$ Wurzel der Null ist. Enthält A außer 0 keine Wurzelgrößen, so heißt A ein *Dedekindsches* oder ein *halbeinfaches System*[15]).

Es gilt dann der Satz[16]): *Dann und nur dann ist eine einstufig isomorphe, in* K *rationale Darstellung* $\mathfrak{A}$ *von* A *eine vollständig reduzible Gruppe, wenn* A *halbeinfach ist.*

Aus dem in Anmerkung [15]) angegebenen Grunde skizziere ich noch einen neuen Beweis dieses Satzes: Man kann die Darstellung $\mathfrak{A}$ von A von

---

[13]) Bei einer Gruppe von Matrizen (oder linearen Substitutionen) verlangen wir nur, daß mit je zwei Elementen auch immer das Produkt zum System gehört. Dagegen wird über die Existenz eines Einheitselementes oder von Inversen nichts vorausgesetzt.

[14]) Vgl. z. B. Dickson, S. 33.

[15]) Sind $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Basiselemente von A und ist $e_\alpha e_\beta = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma\alpha\beta} e_\gamma$, so ist, falls K die Charakteristik 0 hat, die notwendige und hinreichende Bedingung für Halbeinfachheit, daß die Determinante der n^2 Größen $d_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\varkappa\lambda} a_{\sigma\varrho\sigma}$ nicht verschwindet. Falls aber die Charakteristik von K von 0 verschieden ist, kann dieses Kriterium versagen; wir dürfen daher im folgenden keinen Gebrauch von ihm machen.

[16]) Vgl. die in Anm. [13]) zitierte Arbeit von Taber. Einen anderen Beweis für die Hälfte dieses Satzes findet man bei I. Schur, Über Ringbereiche im Gebiet der ganzzahligen linearen Substitutionen, Sitzungsber. d. Berl. Akademie (1923), S. 145–168 und M. Herzberger, Über Systeme hyperkomplexer Größen, Dissertation (Berlin 1923). Da bei diesen Beweisen aber das in der vorigen Anmerkung genannte Kriterium verwandt wird, reichen sie für den Zweck der vorliegenden Arbeit nicht vollständig aus. Nachträglich erkennt man noch, daß die Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ sich einschränken lassen, was für uns aber unwesentlich ist.

vornherein in K in irreduzible Bestandteile zerlegt annehmen, es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & & & \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}_{k1} & \mathfrak{A}_{k2} & \cdots & \mathfrak{A}_k \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wo die $\mathfrak{A}_\varkappa$ in K rationale und irreduzible Darstellungen von A sind. Neben $\mathfrak{A}$ betrachte man die Darstellung $\mathfrak{A}$, die aus $\mathfrak{A}$ entsteht, wenn man in (1) alle $\mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}$ mit $\varkappa > \lambda$ durch Null ersetzt. Notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{A}$ nicht vollständig reduzibel ist, ist, daß es in $\mathfrak{A}$ mehr linear unabhängige Elemente als in $\mathfrak{A}^*$ gibt[17]). Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es lineare von Null verschiedene Verbindungen von Elementen von $\mathfrak{A}$ mit Koeffizienten aus K, für die die entsprechende Verbindung aus den zugeordneten Elementen von $\mathfrak{A}^*$ verschwindet. Es gibt also in $\mathfrak{A}$ von Null verschiedene Elemente A, bei denen bei der Schreibweise (1) in der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen. Ist Z ein beliebiges Element von $\mathfrak{A}$, so stehen auch in AZ in und unter der Hauptdiagonale lauter Nullen; daher verschwindet eine Potenz von AZ. A und wegen der einstufigen Isomorphie also auch das zugeordnete Element von A sind Wurzelgrößen. Daher ist A sicher nicht halbeinfach.

Umgekehrt sei α Wurzelgröße, die zugeordnete Matrix sei A. In $\mathfrak{A}_\varkappa$ entspreche A etwa $A_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$). Für ein beliebiges $Z_\varkappa$ aus $\mathfrak{A}_\varkappa$ muß dann eine geeignete Potenz von $A_\varkappa Z_\varkappa$ verschwinden. Nach Satz δ ist $\mathfrak{A}_\varkappa$ im absoluten Sinn vollständig reduzibel. $\mathfrak{B}$ sei einer der absolut irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{A}_\varkappa$, B sei die $A_\varkappa$ in $\mathfrak{B}$ entsprechende Matrix. Dann muß für alle Y aus $\mathfrak{B}$ eine geeignete Potenz von BY verschwinden. Daher sind alle charakteristischen Wurzeln und folglich auch die Spur von BY Null

$$\chi(BY) = 0. \tag{2}$$

---

[17]) Man beweist meist diese Tatsache mit Hilfe des hier zu beweisenden Satzes; man kann sie aber direkt mit den Hilfsmitteln der Theorie der Gruppen linearer Substitutionen nachweisen, so daß kein Zirkelschluß vorliegt. Ich werde darauf noch in einer andern Arbeit in der Math. Zeitschrift eingehen. Die durchgeführte Betrachtung läßt ohne Verwendung dieses gruppentheoretischen Satzes erkennen, daß ein halbeinfaches System A eine in K rationale einstufig isomorphe Darstellung besitzt; denn enthält $\mathfrak{A}$ mehr linear unabhängige Elemente wie $\mathfrak{A}^*$, so folgt aus dem Beweis, daß A nicht halbeinfach sein kann. Enthält aber $\mathfrak{A}$ ebenso viele linear unabhängige Elemente wie $\mathfrak{A}^*$, so ist $\mathfrak{A}^*$ eine einstufig isomorphe vollständig reduzible Darstellung von A. Bei dem Beweis der Umkehrung, daß ein nicht halbeinfaches System nicht vollständig reduzible Darstellungen besitzt, wird der gruppentheoretische Satz nicht benützt. Nur diese in der Anmerkung genannten Tatsachen werden im folgenden verwendet.

Bei festem B stellt (2) eine lineare homogene Relation für die Koeffizienten von Y dar, wobei Y ein beliebiges Element der absolut irreduziblen Gruppe $\mathfrak{B}$ ist. Ist f der Grad von $\mathfrak{B}$, so kann wegen dieser Relation $\mathfrak{B}$ nicht f^2 linear unabhängige Elemente enthalten. Man erhält einen Widerspruch zu Satz α, außer wenn $B = 0$ ist. Da $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Bestandteil der vollständig reduziblen Gruppe $\mathfrak{A}_\varkappa$ war, folgt $A_\varkappa = 0$. Bei der Schreibweise (1) stehen also in der Hauptdiagonale von A lauter Nullen. Das zeigt unmittelbar, daß $\mathfrak{A}$ nicht vollständig reduzibel ist, da sonst A zu 0 ähnlich, also $A = 0$ sein müßte.

Unsere Betrachtung ergibt auch noch, daß bei der Schreibweise (1) von $\mathfrak{A}$ ein Element dann und nur dann Wurzelgröße ist, wenn in der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen.

A sei im folgenden halbeinfach; eine in K rationale, einstufig isomorphe Darstellung kann man in der Form

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & & & \\ & \mathfrak{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{A}_k \end{pmatrix} \tag{3}$$

annehmen, wo die $\mathfrak{A}_\varkappa$ in K rational und irreduzibel sind. Ferner darf man ohne wesentliche Einschränkung annehmen, daß alle $\mathfrak{A}_\varkappa$ wesentlich verschieden sind, und daß die Nulldarstellung unter ihnen nicht vorkommt. Nach den Sätzen δ und ε sind alle Gruppen $\mathfrak{A}_\varkappa$ absolut vollständig reduzibel; für $\varkappa \neq \lambda$ haben $\mathfrak{A}_\varkappa$ und $\mathfrak{A}_\lambda$ keinen absolut irreduziblen Bestandteil gemeinsam.

Es sei $k > 1$. ϱ sei ein fester der Werte $1, 2, \ldots, k$. Wir fragen: Wieviel linear unabhängige Elemente in $\mathfrak{A}$ gibt es, bei denen bei der Schreibweise (3) außer in $\mathfrak{A}_\varrho$ lauter Nullen stehen? Ersichtlich ist diese Anzahl gleich der Anzahl u der linear unabhängigen Elemente von $\mathfrak{A}$ vermindert um die Anzahl u^* der linear unabhängigen Elemente derjenigen Gruppe $\mathfrak{A}^*$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Fortlassen des Bestandteiles $\mathfrak{A}_\varrho$ entsteht. Die Anzahl der linear unabhängigen Elemente in $\mathfrak{A}_\varkappa$ sei $u_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$. Wegen der eben erwähnten Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{A}_\varkappa$ folgt aus Satz γ

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k, \qquad u^* = u_1 + u_2 + \ldots + u_{\varrho-1} + u_{\varrho+1} + \ldots + u_k.$$

Also ist $u - u^* = u_\varrho$. Folglich gibt es in $\mathfrak{A}$ genau ebensoviel linear unabhängige Elemente, bei denen nur an Stelle von $\mathfrak{A}_\varrho$ etwas von Null verschiedenes steht, wie es in $\mathfrak{A}_\varrho$ überhaupt linear unabhängige Elemente gibt. Daher muß $\mathfrak{A}$ alle Elemente von

$$\mathfrak{B}_\varrho = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{A}_\varrho \\ & \iddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

wo $\mathfrak{A}_\varrho$ in der ϱ-ten Zeile, ϱ-ten Spalte stehen soll), enthalten. Das gilt für $\varrho = 1, 2, \ldots, k$. Jedes Element von $\mathfrak{A}$ kann man eindeutig in der Form $B_1 + B_2 + \ldots + B_k$ mit $B_\varkappa < \mathfrak{B}_\varkappa$ dastellen. $\mathfrak{B}_\varkappa$ stellt ein invariantes Teilsystem[18]) von $\mathfrak{A}$ dar. Multipliziert man ein Element von $\mathfrak{B}_\varkappa$ mit einem Element von $\mathfrak{B}_\lambda$, so erhält man für $\varkappa \neq \lambda$ stets 0. Wegen dieses Sachverhaltes sagt man, $\mathfrak{A}$ sei als direkte Summe[18]) der invarianten Teilsysteme $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_k$ dargestellt. $\mathfrak{B}_\varkappa$ ist zu $\mathfrak{A}_\varkappa$ einstufig isomorph.

Wir wollen ein System A von hyperkomplexen Größen *einfach* nennen, wenn es eine in K rationale und irreduzible, einstufig isomorphe Darstellung besitzt[19]). Jedes einfache System ist also sicher halbeinfach. — Bei unseren Betrachtungen stellt $\mathfrak{B}_\varkappa$ ein einfaches System dar, wir haben also bewiesen: *Ein halbeinfaches System hyperkomplexer Größen läßt sich als direkte Summe einfacher Systeme darstellen.*

Ein einfaches System A besitzt überhaupt nur eine einzige in K irreduzible Darstellung. Denn ist $\mathfrak{A}$ die nach Definition vorhandene einstufig isomorphe, in K irreduzible Darstellung; ist $\mathfrak{B}$ eine zweite in K irreduzible und von $\mathfrak{A}$ wesentlich verschiedene Darstellung, so bildet auch

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix}$$

eine Darstellung. Die Anzahl der linear unabhängigen Elemente von $\mathfrak{C}$ ist aber wegen der Sätze γ und ε größer als die entsprechende Anzahl bei $\mathfrak{A}$ und folglich auch bei A. Man hat also einen Widerspruch. Genau analog folgt, daß A außer den absolut irreduziblen Bestandteilen von $\mathfrak{A}$ keine absolut irreduziblen Darstellungen besitzt.

Satz 1. *Ein einfaches System hyperkomplexer Zahlen besitzt nur eine einzige in* K *irreduzible Darstellung. Durch Zerlegung in absolut irreduzible Bestandteile erhält man alle absolut irreduziblen Darstellungen.*

---

[18]) Vgl. etwa Dickson, S. 85—86.

[19]) Diese Definition, die von der üblichen verschieden ist, ist für unsere Zwecke bequem. Gewöhnlich definiert man ein einfaches System als ein System, das kein invariantes Teilsystem besitzt (vgl. Dickson, S. 92). Nach dieser Definition muß man dann aber auch das durch (4) gegebene System als einfach bezeichnen, das nach unserer Definition nicht einfach ist; im übrigen sind, wie später gezeigt wird, beide Definitionen äquivalent. In älteren Untersuchungen (Molien, Cartan, Frobenius) waren Systeme wie (4) ausgeschlossen; es ist nicht zweckmäßig, es unter die einfachen Systeme zu zählen, da seine Struktur völlig anders ist.

A sei ein System hyperkomplexer Größen, das kein invariantes Teilsystem besitzt. Ist A halbeinfach, so muß es einfach sein, da es sicher nicht als direkte Summe darstellbar ist. Ist A nicht halbeinfach, so darf es nur aus Wurzelgrößen bestehen, weil sonst die Wurzelgrößen ein invariantes Teilsystem, das sogenannte Radikal von A, bilden, wie sich aus der oben gegebenen Darstellung der Wurzelgrößen unmittelbar ergibt. Man schließt dann weiter sehr einfach (vgl. Dickson, S. 102), daß A einstufig isomorph mit dem System aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ist, wo a eine beliebige Zahl aus K sein darf.

Umgekehrt besitzt ein einfaches System kein invariantes Teilsystem. Der Beweis, der sich auf verschiedene Weisen führen läßt, soll hier der Kürze halber auf § 2 verschoben werden. Wenn er geführt ist, ist gezeigt, daß die hier gegebene Definition der einfachen Systeme hyperkomplexer Größen abgesehen von dem durch (4) gegebenen Ausnahmefall mit der üblichen Definition äquivalent ist (vgl. [19]).

Ein System hyperkomplexer Größen ohne Nullteiler besitzt sicher keine Wurzelgrößen und ist daher halbeinfach. Da es sich nicht als direkte Summe mehrerer Systeme darstellen lassen kann, muß es einfach sein.

§ 2.

Eine Gruppe linearer Substitutionen $\mathfrak{G}$ heiße in bezug auf den Körper K *komplett*, wenn alle linearen Verbindungen von Elementen von $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus K zu $\mathfrak{G}$ gehören. Die Matrizen jeder in bezug auf K rationalen und kompletten Gruppe lassen sich als Elemente eines Systems hyperkomplexer Größen über K auffassen.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{F}$ sei ein absolut irreduzibler Bestandteil einer in bezug auf* K *kompletten und irreduziblen Gruppe $\mathfrak{A}$. Der durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{F}$ zu* K *entstehende algebraische Körper* [20]) *über* K *heiße* Z. *Dann ist $\mathfrak{F}$ auch in bezug auf* Z *komplett.*

Beweis. $\mathfrak{F}$ ist nach Satz η in einem algebraischen Körper Ω über Z rational darstellbar; wir können von vornherein $\mathfrak{F}$ in Ω rational annehmen. Zu $\mathfrak{F}$ gehört eine wohlbestimmte in bezug auf Z komplette Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus allen linearen Verbindungen von endlich vielen Elementen von $\mathfrak{F}$ mit Koeffizienten aus Z besteht. Es ist auch $\mathfrak{G}$ in Ω rational. Ω ist ebenfalls in bezug auf K algebraisch. — Ist G ein Element aus $\mathfrak{G}$, so seien

[20]) Unter einem algebraischen Körper ist im folgenden immer ein algebraischer Körper endlichen Relativgrades gemeint.

$G = G_1, G_2, \ldots, G_r$ die algebraisch zu G in bezug auf K konjugierten Elemente; analog seien $F = F_1, F_2, \ldots, F_r$ die zu einer Matrix $F < \mathfrak{F}$ algebraisch konjugierten Matrizen. Wir setzen

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_r \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Bildet man für alle G aus $\mathfrak{G}$ das Element $\tilde{G}$, so erhält man eine einstufig zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$. Diese ist nach Satz ζ in K rational darstellbar, es sei $\mathfrak{G}^* = Q^{-1}\tilde{\mathfrak{G}}Q$ in K rational. Bildet man $\tilde{G}$ nur für alle G aus $\mathfrak{F}$, so erhält man eine Untergruppe $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$; $Q^{-1}\tilde{\mathfrak{F}}Q = \mathfrak{F}^*$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$ auch in K rational. Die von allen Matrizen G_ϱ bei festem ϱ gebildete Gruppe heiße $\mathfrak{G}_\varrho$; entsprechend sei $\mathfrak{F}_\varrho$ die aus allen Matrizen F_ϱ gebildete Gruppe. $\mathfrak{G}_\varrho$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ sind einstufig isomorph, ebenso $\mathfrak{F}_\varrho$ und $\mathfrak{F}_\sigma$ für $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r$. Da $\mathfrak{F}$ und daher auch $\mathfrak{G}$ irreduzibel sind, sind auch $\mathfrak{F}_\varrho$ und $\mathfrak{G}_\varrho$ irreduzibel. Dann und nur dann sind $\mathfrak{G}_\varrho$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ ähnlich, wenn $\mathfrak{F}_\varrho$ und $\mathfrak{F}_\sigma$ ähnlich sind[21]).

Aus (5) ergibt sich, daß die absolut irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}^*$ die Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r$ sind; die Bestandteile von $\mathfrak{F}^*$ sind analog $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_r$. Die Anzahl der wesentlich verschiedenen Bestandteile ist in beiden Fällen gleich, alle Bestandteile haben denselben Grad. Nach dem Satz γ besitzen $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{F}^*$ dieselbe Anzahl von linear unabhängigen Elementen. Wegen $\mathfrak{F}^* < \mathfrak{G}^*$ kann man daher jedes Element von $\mathfrak{G}^*$ als lineare Verbindung von Elementen von $\mathfrak{F}^*$ darstellen. Da ferner $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{G}^*$ in K rational sind, kann man die dabei auftretenden Koeffizienten als Zahlen von K wählen. Nun ist aber mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{F}$ in K komplett. Das gleiche gilt dann auch für $\mathfrak{F}^*$ und daher gehört jede lineare Verbindung von Elementen von $\mathfrak{F}^*$ mit Koeffizienten aus K zu $\mathfrak{F}^*$. Es folgt also $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{G}^*$. Daraus ergibt sich $\tilde{\mathfrak{F}} = \tilde{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Folglich ist $\mathfrak{F}$ wirklich in Z komplett.

A sei jetzt ein einfaches System hyperkomplexer Größen über dem Grundkörper K; $\mathfrak{A}$ sei die in K irreduzible Darstellung von A, die nach § 1 eindeutig bestimmt und einstufig isomorph ist. Nach Satz δ und η

---

[21]) Ist $\mathfrak{F}_\varrho$ zu $\mathfrak{F}_\sigma$ ähnlich, so haben beide denselben Charakter $\chi_\varrho = \chi_\sigma$. Adjunktion dieses Charakters zu K ergibt einen zu Z konjugierten Körper $Z_\varrho = Z_\sigma$. Ein beliebiges G_ϱ ist als lineare Verbindung von Elementen von $\mathfrak{F}_\varrho$ mit Koeffizienten aus Z_ϱ darstellbar, der Charakter gehört also auch zu Z_ϱ. Das zugehörige algebraisch konjugierte G_σ hat infolgedessen denselben Charakter, also sind $\mathfrak{G}_\varrho$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ nach Satz β ähnlich. Aus der Ähnlichkeit von $\mathfrak{G}_\varrho$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ folgt unmittelbar die Ähnlichkeit von $\mathfrak{F}_\varrho$ und $\mathfrak{F}_\sigma$.

ist $\mathfrak{A}$ absolut vollständig reduzibel, seine absolut irreduziblen Bestandteile lassen sich als algebraisch in bezug auf K konjugierte Gruppen schreiben und sind daher untereinander und zu $\mathfrak{A}$ einstufig isomorph. $\mathfrak{F}$ sei einer dieser Bestandteile, dann bildet auch $\mathfrak{F}$ eine einstufig isomorphe Darstellung von A.

Ist $\mathfrak{F}$ eine absolut irreduzible Gruppe, die in bezug auf K komplett und in einem algebraischen Körper über K rational ist, so ist $\mathfrak{F}$ nach Satz ζ irreduzibler Bestandteil einer in bezug auf K rationalen, irreduziblen und kompletten Gruppe $\mathfrak{A}$. Nach dem eben durchgeführten Schluß sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ einstufig isomorph; man kann daher die Matrizen von $\mathfrak{F}$ auch als Elemente eines einfachen Systems hyperkomplexer Zahlen über K auffassen.

Durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{F}$ zu K entsteht ein algebraischer Körper Z über K; ist der zugehörige Schursche Index m, so kann man $\mathfrak{F}$ in einem Körper $Z(\vartheta)$ vom Grade m über Z rational darstellen. Die Konjugierten zu ϑ seien $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$. Das Faktorensystem von $\mathfrak{F}$ [22]) in bezug auf Z als Grundkörper sei $c_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m)$. Wir bilden dann alle Systeme von m^2 Zahlen $l_{\alpha\beta}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $l_{\alpha\beta}$ ist eine Zahl aus $Z(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta)$ für $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$.

2. Eine Permutation der Galoisschen Gruppe von $Z(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m)$ in bezug auf Z als Grundkörper, bei der ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ übergeht, führt $l_{\alpha\beta}$ in $l_{\gamma\delta}$ über.

Für alle derartigen Systeme $l_{\alpha\beta}$ bilden wir die Matrizen

$$(6) \qquad D = \left(\frac{1}{c_{\varkappa\lambda 1}} l_{\varkappa\lambda}\right) \qquad (\varkappa \text{ Zeilen-}, \lambda \text{ Spaltenindex}; \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Gesamtheit dieser Matrizen bildet nach U. [23]) eine absolut irreduzible Gruppe $\mathfrak{D}$, deren Charakter zu Z gehört. Das Faktorensystem ist ebenfalls $c_{\alpha\beta\gamma}$ (genauer zu $c_{\alpha\beta\gamma}$ assoziiert) und der zugehörige Schursche Index daher m. $\mathfrak{D}$ ist ferner in bezug auf Z komplett.

Der Grad f von $\mathfrak{F}$ ist ein Vielfaches von m, es sei $f = t \cdot m$.

Die Gesamtheit aller Matrizen F vom Grade t, deren Koeffizienten beliebige Matrizen aus $\mathfrak{D}$ sind,

$$(7) \qquad F = (D_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, t;\ D_{\varkappa\lambda} < \mathfrak{D})$$

bildet eine absolut irreduzible, in bezug auf Z komplette Gruppe $\mathfrak{F}^*$ vom Grade mt, deren Charakter zu Z gehört und die das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$

---

[22]) Vgl. etwa U. § 1.

[23]) Vgl. insbesondere den Beweis von Satz IV von U. Dort wird von einer zu $\mathfrak{D}$ ähnlichen Gruppe $R\mathfrak{D}R^{-1}$ gezeigt, daß ihr Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ ist; nach U. Satz VIII ist daher das Faktorensystem von $\mathfrak{D}$ zu $c_{\alpha\beta\gamma}$ assoziiert.

esitzt. Durch diese Eigenschaften ist aber $\mathfrak{F}^*$ nach U. Satz V bis auf hnlichkeitstransformation eindeutig bestimmt. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ sind also ähnch und daher nicht wesentlich verschieden. Wir ersetzen im folgenden durch $\mathfrak{F}^*$ und schreiben für $\mathfrak{F}^*$ wieder $\mathfrak{F}$.

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein infaches System hyperkomplexer Größen* A *keine Nullteiler besitzt, ist, aß für eine absolut irreduzible Darstellung der Grad und der Schursche ndex übereinstimmen.*

Beweis. Jede absolut irreduzible Darstellung von A ist nach § 1 ein estandteil von $\mathfrak{A}$, wir können annehmen, daß es gerade $\mathfrak{F}$ ist. Ist nun $> m$, also $t > 1$, so kann man leicht zwei von Null verschiedene Eleente F_1 und F_2 angeben, deren Produkt verschwindet. Man setze z. B. F_1 nach (7) $D_{11} \neq 0$, alle anderen $D_{\varkappa\lambda} = 0$; in F_2 aber $D_{22} = 0$, alle nderen $D_{\varkappa\lambda} \neq 0$. Da A und $\mathfrak{F}$ einstufig isomorph sind, hat auch A ullteiler.

Ist dagegen $f = m$, also $t = 1$, so wird $\mathfrak{F} = \mathfrak{D}$. Hat ein Element F on $\mathfrak{D}$ die Determinante 0, so ist für alle $X < \mathfrak{F}$ ebenfalls $|XF| = 0$, lso 0 charakteristische Wurzel von XF. Nach U. Satz VII und Anerkung [16]) von U. ist 0 dann m-fache Wurzel von XF, also überhaupt ie einzige Wurzel. Daher verschwindet die Spur $\chi(XF)$ für alle $X < \mathfrak{F}$. Vie in § 1 folgt daraus $F = 0$. Für alle $F \neq 0$ ist also auch $|F| \neq 0$. Daher besitzt $\mathfrak{F}$ und damit auch A keine Nullteiler, womit alles beiesen ist.

Im allgemeinen Fall $t \geqq 1$ stellt das durch (6) definierte $\mathfrak{D}$ stets ein ystem Δ von hyperkomplexen Größen ohne Nullteiler dar. Denn $\mathfrak{D}$ ist bsolut irreduzibel, in einem algebraischen Körper über K rational und in ezug auf K komplett; für $\mathfrak{D}$ stimmen der Grad und der Schursche Index berein. *Nach* (7) *ist das einfache System* A *einstufig isomorph zu dem ystem aller Matrizen, deren Koeffizienten beliebige Elemente aus* Δ *sind, obei* Δ *ein System ohne Nullteiler bedeutet.* Das ist ein bekannter Satz on Wedderburn [24]).

---

[24]) Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proceedings of the London Math. ociety 6 (1907), p. 77–118. — Man kann diesen Satz auch so formulieren: Ist A n einfaches System, so kann man A als direktes Produkt $\Delta \times \mathsf{M}$ darstellen; Δ bezt dabei keine Nullteiler nnd M ist dem System aller Matrizen vom Grade t mit oeffizienten aus K einstufig isomorph. — Man zeigt auch noch leicht, daß Δ durch A ndeutig festgelegt ist; denn soll $\mathsf{A} = \Delta \times \mathsf{M}$ sein, so muß das Faktorensystem einer bsolut irreduziblen Darstellung von Δ auch das Faktorensystem einer absolut irreuziblen Darstellung von A, also das von $\mathfrak{F}$ oder einer algebraisch konjugierten Gruppe in. Infolgedessen muß es sich um ein zu $c_{\alpha\beta\gamma}$ algebraisch in bezug auf K konjugiertes aktorensystem handeln; das liefert dann aber ein einstufig zu $\mathfrak{D}$ isomorphes System.

Eine ganz einfache Betrachtung, die man z. B. bei Dickson S. 121 findet, zeigt, daß jedes auf diese Weise darstellbare, also jedes einfache System A kein invariantes Teilsystem besitzt (vgl. § 1).

Setzt man in (6) $l_{\alpha\alpha} = 1$, $l_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$, so erhält man für L wegen $c_{\alpha\alpha 1} = 1$ (vgl. U. § 2) die Einheitsmatrix E_m[25]). In (7) setze man $D_{\varkappa\varkappa} = E_m$, $D_{\varkappa\lambda} = 0$ für $\varkappa \neq \lambda$. Man erkennt, daß auch $\mathfrak{F}$ die Einheitsmatrix enthält. Daher besitzt ein einfaches System A ein Einheitselement. — Soll $\mathfrak{F}$ eine Matrix cE enthalten, so muß, wie aus (6) und (7) folgt, c eine Zahl aus Z sein.

A sei ein einfaches System, $\mathfrak{F}$ eine absolut irreduzible Darstellung. Der Charakter von $\mathfrak{F}$ gehöre zu K, nach § 4 bedeutet diese Voraussetzung keine wesentliche Einschränkung. Nach Satz 1 und Satz η ist dann $\mathfrak{F}$ die einzige absolut irreduzible Darstellung von A. Ist $\alpha < A$, A die zugeordnete Matrix von $\mathfrak{F}$, so bezeichnen wir die Determinante $|A|$ als Norm $N(\alpha)$ von α. Offenbar ändert sich $N(\alpha)$ nicht, wenn man $\mathfrak{F}$ durch eine ähnliche Darstellung ersetzt. Nach Definition gilt

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

Ist $N(\alpha) \neq 0$, so existiert A^{-1}. Es sei

$$\varphi(A) = A^k + a_1 A^{k-1} + \ldots + a_{k-1} A + a_k E = 0 \tag{8}$$

die Gleichung niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus K, der A genügt. Dann ist $a_k \neq 0$, da sonst $A^{-1}\varphi(A) = 0$ eine Gleichung niedrigeren Grades ergeben würde. Dann folgt aber

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_k}(A^{k-1} + a_1 A^{k-2} + \ldots + a_{k-1} E).$$

Da die rechte Seite zu $\mathfrak{F}$ gehört, gehört auch A^{-1} zu $\mathfrak{F}$. Infolgedessen enthält A, falls $N(\alpha) \neq 0$ ist, ein zu α inverses Element.

Ist $N(\alpha) = 0$, so ist in (8) $a_k = 0$, weil sonst die letzte Formel ein zu A inverses Element liefern würde. (8) kann man aber schreiben

$$A(A^{k-1} + a_1 A^{k-2} + \ldots + a_{k-1} E) = 0.$$

Die Klammer ist hier wegen der Minimaleigenschaft von k von 0 verschieden. Daher ist A und folglich auch α Nullteiler.

Es soll noch ein Hilfssatz bewiesen werden, der später nützlich ist.

Hilfssatz 2. *$\mathfrak{F}$ sei eine absolut irreduzible Darstellung eines einfachen Systems; ihr Grad sei f. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ seien zwei ähnliche Untergruppen von $\mathfrak{F}$, d. h. es gebe eine Matrix P vom Grade f mit von Null*

[25]) Allgemein bezeichnen wir die Einheitsmatrix n-ten Grades mit E_n.

erschiedener Determinante, für die

9) $$P^{-1}\mathfrak{B}P=\mathfrak{C}$$

t. Dann kann man P als Element von $\mathfrak{F}$ wählen.

Beweis. K sei ein unendlicher Körper[26]), $\mathfrak{F}'$ sei die Gruppe aller ransponierten von Matrizen von $\mathfrak{F}$. Ist Z wieder der Körper, der aus K urch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{F}$ entsteht, so kann man nach U. atz II das Kroneckersche Produkt $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ in Z rational darstellen; $^{-1}(\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}')Q=\mathfrak{G}$ sei in Z rational. $\mathfrak{G}$ enthält die beiden Untergruppen

10) $$\mathfrak{R}=Q^{-1}(\mathfrak{F}\times E_f)Q, \qquad \mathfrak{S}=Q^{-1}(E_f\times\mathfrak{F}')Q.$$

t seinerseits enthält als Untergruppen

11) $$\mathfrak{U}=Q^{-1}(\mathfrak{B}\times E_f)Q, \qquad \mathfrak{V}=Q^{-1}(\mathfrak{C}\times E_f)Q.$$

etzt man noch $T=Q^{-1}(P\times E_f)Q$, so ist $|T|\neq 0$. Aus (9), (10) nd (11) folgt

12) $$\mathfrak{U}T=T\mathfrak{V}, \qquad \mathfrak{S}T=T\mathfrak{S}.$$

Umgekehrt sei T eine Matrix, die (12) erfüllt und für die $|T|\neq 0$ ist. ist dann wegen der Vertauschbarkeit mit $\mathfrak{S}$ von der Form $Q^{-1}(P\times E_f)Q$, a nach U. § 1 die mit $E_f\times\mathfrak{F}'$ vertauschbare Matrix QTQ^{-1} die Form $\times E_f$ hat. P ist dabei vom Grade f, es ist $|P|\neq 0$. Aus der ersten leichung (12) folgt dann aber wegen (11) wieder $P^{-1}\mathfrak{B}P=\mathfrak{C}$.

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ sind als Untergruppen von $\mathfrak{G}$ in Z rational. Die leichungen (12) stellen daher für die Koeffizienten einer unbekannten latrix T eine Reihe von linearen Gleichungen mit Koeffizienten aus Z ar. Da wir wissen, daß diese Gleichungen eine Lösung haben, für die $T|\neq 0$ ist, und da Z unendlich viele Elemente enthält, gibt es auch ine in Z rationale Lösung T mit $|T|\neq 0$. Konstruieren wir aus diesem T ie eben eine Matrix P, so erfüllt P die Gleichung (9). Wir behaupten, aß dieses P zu $\mathfrak{F}$ gehört.

Da nämlich $\mathfrak{F}$ absolut irreduzibel ist, enthält es (nach Satz α) f^2 linear nabhängige Elemente; man kann daher P als lineare Verbindung von Ele- ienten von $\mathfrak{F}$ darstellen; wegen (10) also $T=Q^{-1}(P\times E_f)Q$ als lineare erbindung von Elementen von $\mathfrak{R}$. Da T und $\mathfrak{R}$ in Z rational sind, kann an dabei die Koeffizienten aus Z wählen, folglich auch bei der Darstellung on P durch Elemente von $\mathfrak{F}$. Da aber $\mathfrak{F}$ in bezug auf Z komplett ist, t wirklich $P<\mathfrak{F}$.

---

[26]) Ist K ein endlicher Körper, so versagt der hier gegebene Beweis. Wie sich us § 4 ergibt, gilt der Hilfssatz auch noch in diesem Falle.

§ 3.

A sei ein einfaches System, $\mathfrak{A}$ die in K irreduzible Darstellung. $\mathfrak{A}$ enthalte r wesentlich verschiedene, absolut irreduzible Bestandteile; der Grad derselben, der für alle nach Satz η derselbe ist, sei f. Nach den Sätzen δ und γ enthält dann $\mathfrak{A}$ genau rf^2 linear unabhängige Elemente; der Rang von A ist folglich rf^2. Dabei läßt r sich auch als Relativgrad desjenigen Körpers Z deuten, der aus K durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{F}$ entsteht, wo $\mathfrak{F}$ wie früher eine absolut irreduzible Darstellung von A bezeichnet.

Das System derjenigen Größen von A, die mit allen Größen von A vertauschbar sind, bezeichnen wir als das Zentrum von A. Ist α eine Größe des Zentrums von A, so muß die zugeordnete Matrix von $\mathfrak{F}$ mit allen Elementen der absolut irreduziblen Gruppe $\mathfrak{F}$ vertauschbar und daher eine Multiplikation cE_f sein. Wie aus der Darstellung (6) und (7) von $\mathfrak{F}$ folgt, muß dabei c eine Zahl aus Z sein (vgl. § 2). Für alle $c < Z$ enthält $\mathfrak{F}$ umgekehrt cE_f, da $\mathfrak{F}$ in bezug auf Z komplett ist und E_f enthält. Das Zentrum von A wird also durch die Elemente cE_f dargestellt und ist daher zu Z einstufig isomorph.

Satz 3. *Ist* A *ein einfaches System,* $\mathfrak{F}$ *eine der absolut irreduziblen Darstellungen, und ist* Z *der durch Adjunktion des Charakters von* $\mathfrak{F}$ *zu* K *entstehende Körper, so ist* Z *zum Zentrum von* $\mathfrak{F}$ *einstufig isomorph. Ist* r *der Relativgrad von* Z *in bezug auf* K *und hat* $\mathfrak{F}$ *den Grad* f, *so ist der Rang von* A *in bezug auf* K *genau* rf^2.

Δ sei im folgenden ein festes System hyperkomplexer Größen ohne Nullteiler, $\mathfrak{D}$ wie oben eine absolut irreduzible Darstellung. Ist $t > 0$ eine ganze rationale Zahl, so bilden die Matrizen des Grades t, deren Koeffizienten beliebige Elemente aus Δ sind, ein einfaches System; es werde mit A_t bezeichnet. Man erhält so alle einfachen Systeme, denen bei Zerlegung nach dem Wedderburnschen Satz gerade Δ als nullteilerfreies System zugeordnet ist. Die Elemente von $\mathfrak{D}$ kann man wieder durch (6) gegeben annehmen, (7) liefert eine absolut irreduzible Darstellung von A_t, die jetzt deutlicher mit $\mathfrak{F}_t$ bezeichnet werde. Da $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}_t$ nach § 2 das gleiche Faktorensystem haben, sind die Körper, in denen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}_t$ rational dargestellt werden können, für beide Gruppen die gleichen; wir wollen sie die Darstellungskörper von $\mathfrak{F}_t$ nennen [26a]). Sie enthalten alle Z. Die Zentren aller

[26a]) In der in Anmerkung [4]) zitierten Arbeit werden diese Körper und ihre Konjugierten in bezug auf Z als *Zerfällungskörper* der in K rationalen irreduziblen Darstellung von A_t bezeichnet. Abweichend von der genannten Arbeit sollen im folgenden unter *Körpern* immer kommutative Körper, also Körper im gewöhnlichen Sinne verstanden werden.

Systeme A_t sind nach Satz 3 zu Z isomorph; wir können direkt das durch cE dargestellte Element des Zentrums von A_t mit c identifizieren und dementsprechend ohne Gefahr einer Verwechslung das Zentrum von A_t ebenfalls mit Z bezeichnen.

Unter einem Teilkörper Γ von A_t verstehen wir ein Teilsystem, das einen Körper bildet und Z enthält; Z selbst ist auch ein Teilkörper von A_t. Ein Teilkörper heißt maximal, wenn er in keinem andern enthalten ist. Ist Γ' ein Teilkörper von A_s, so soll eine Abbildung von Γ auf Γ' nur dann isomorph genannt werden, wenn sie einstufig ist, und die Elemente von Z sich selbst entsprechen.

Ist Γ ein Teilkörper von A_t, so ist Γ ein Körper endlichen Ranges über Z. Da mit K auch Z vollkommen ist, entsteht Γ aus Z durch Adjunktion eines Elementes γ, das in Z einer irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ genügt. Der höchste Koeffizient von $f(x)$ sei 1, der Grad heiße k. C sei die γ in $\mathfrak{F}_t$ entsprechende Matrix, $\varphi(x) = 0$ sei die charakteristische Gleichung von C. Da man nach Satz η $E_m \times \mathfrak{F}_t$ und damit auch $E_m \times C$ in Z rational machen kann, ist die charakteristische Gleichung von $E_m \times C$ in Z rational; das ist aber $\varphi(x)^m = 0$. Da Z vollkommen ist, ist daher auch $\varphi(x)$ selbst in Z rational. Wegen $f(C) = 0$ sind alle Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ auch Wurzeln von $f(x) = 0$, und wegen der Irreduzibilität von $f(x)$ ist $\varphi(x)$ eine Potenz von $f(x)$. Nun hat $\varphi(x)$ nach (6) und (7) den Grad $t \cdot m$, also folgt $k \mid tm$

$$\varphi(x) = f(x)^{\frac{t \cdot m}{k}}. \tag{13}$$

Γ^* sei ein zu Γ isomorpher Teilkörper von A_t. γ^* sei die γ entsprechende Größe, C^* die zugeordnete Matrix von $\mathfrak{F}_t$. Dann ist auch $f(C^*) = 0$. Da $f(x) = 0$ in Z irreduzibel ist und daher nur einfache Wurzeln hat, sind C und C^* ähnlich. Nach Hilfssatz 2 gibt es dann in $\mathfrak{F}_t$ ein Element P, so daß $C^* = P^{-1} C P$ ist[37]). Ist π das entsprechende Element von A_t, so ist $\gamma^* = \pi^{-1} \gamma \pi$ und daher $\Gamma^* = \pi^{-1} \Gamma \pi$. Ist Γ in einem Teilkörper B enthalten, so ist $\Gamma^* < \pi^{-1} \mathsf{B} \pi$ und ist daher gleichfalls nicht maximal.

Hilfssatz 3. *Der Relativgrad k eines Teilkörpers Γ von A_t in Bezug auf Z ist ein Teiler von tm. Sind Γ und Γ^* isomorphe Teilkörper von A_t, so gibt es ein Element π in A_t, so daß $\Gamma^* = \pi^{-1} \Gamma \pi$ ist. Γ und Γ^* sind dann gleichzeitig maximal.*

s sei ein Teiler von t, etwa $zs = t$. Γ sei jetzt ein Teilkörper von A_s, $\mathfrak{F}$ die entsprechende Untergruppe von $\mathfrak{F}_s$. Wegen (6) und (7) kann man

[37]) Ist K ein endlicher Körper, so gilt nach § 4 Hilfssatz 2 auch noch.

$\mathfrak{F}_t$ auch als Gesamtheit der Matrizen vom Grade z deuten, deren Koeffizienten selbst Elemente aus $\mathfrak{F}_s$ sind:

$$F = (G_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, z;\ G_{\varkappa\lambda} < \mathfrak{F}_s). \tag{14}$$

G sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{C} < \mathfrak{F}_s$; man setze $G_{\varkappa\lambda} = 0$ für $\varkappa \neq \lambda$ und $G_{\varkappa\varkappa} = G$ für alle $\varkappa$. Die so entstehenden Matrizen $\mathfrak{F}$ bilden offenbar ein zu Γ isomorphes Teilsystem von $\mathfrak{F}_t$, die zugehörigen Elemente folglich, da Z sich selbst entspricht, einen zu Γ isomorphen Teilkörper Γ^* von A_t.

Hilfssatz 4. *Ist Γ ein Teilkörper von A_s und s ein Teiler von t, so enthält A_t einen zu Γ isomorphen Teilkörper Γ^*.*

$\Omega = Z(\eta)$ sei ein Darstellungskörper, sein Relativgrad in bezug auf Z ist nach Satz η durch m teilbar; er sei mt. $\mathfrak{F}_t^*$ sei eine in Ω rationale, zu $\mathfrak{F}_t$ ähnliche Gruppe, $c^*_{\alpha\beta\gamma}$ ihr Faktorensystem. Bildet man alle Matrizen

$$U = \left(\frac{1}{c^*_{\varkappa\lambda 1}} l_{\varkappa\lambda}\right) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, mt), \tag{15}$$

wo die $l_{\varkappa\lambda}$ analogen Bedingungen wie in § 2 unterliegen, so erhält man nach U. § 2 eine zu $\mathfrak{F}_t^*$ und also auch zu $\mathfrak{F}_t$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{F}_t^{**}$.

Man setze in (15), was zulässig ist,

$$l_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda, \qquad l_{\varkappa\varkappa} = a_\varkappa,$$

wo a_1 eine beliebige Zahl aus $Z(\eta)$, $a_2, a_3, \ldots, a_{mt}$ ihre Konjugierten in bezug auf Z sind. Da $c^*_{\varkappa\varkappa 1} = 1$ ist, wird dann

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{mt} \end{pmatrix}.$$

Diese speziellen Matrizen U bilden ein zum Körper $Z(\eta)$ isomorphes Teilsystem. Dieses enthält das Zentrum von $\mathfrak{F}_t^{**}$, das man erhält, wenn man a_1 als beliebige Zahl aus Z wählt. Folglich enthält auch A_t einen zu $Z(\eta)$ isomorphen Teilkörper Γ. Der Relativgrad von $Z(\eta)$ in bezug auf Z ist mt, also ist Γ nach Hilfssatz 3 maximal. Also gilt

Satz 4. *$\mathfrak{F}$ sei eine absolut irreduzible Darstellung eines einfachen Systems A, Z bedeute den durch Adjunktion des Charakters von $\mathfrak{F}$ zu K entstehenden Körper. Nach dem Wedderburnschen Satz gibt es ein nullteilerfreies System Δ, so daß A dem System aller Matrizen eines festen Grades isomorph ist, deren Koeffizienten beliebige Elemente aus Δ sind. Ist $\mathfrak{F}$ in dem algebraischen Körper Ω vom Grade mt rational darstellbar, so ist Ω einem maximalen Teilkörper desjenigen einfachen Systems A_t isomorph, das aus allen Matrizen vom Grade t mit Koeffizienten aus Δ*

esteht. Dem Teilkörper Z von Ω entspricht bei der isomorphen Zuord-ung das Zentrum von A_t.[28])

Es sei wieder Γ ein Teilkörper von A_t. γ, C, k, $f(x)$ und $\varphi(x)$ nögen analoge Bedeutung wie beim Beweis von Hilfssatz 3 haben. Da Z vollkommen ist, hat $f(x)$ lauter verschiedene Wurzeln. Ist γ' eine von hnen, so ist $Z(\gamma')$ isomorph zu Γ; nach (13) hat γ' als Wurzel der harakteristischen Gleichung von C die Vielfachheit $\frac{tm}{k}$. Nach U. Satz VII nd Anmerkung [16]) von U. ist daher der Schursche Index μ von $\mathfrak{F}_t$ in ezug auf $Z(\gamma')$ ein Teiler von $\frac{tm}{k}$. Es sei $Z(\eta)$ ein Darstellungskörper om Relativgrad μ über $Z(\gamma')$. Der Relativgrad von $Z(\eta)$ in bezug auf Z ist dann μk, also ein Teiler von tm. Andererseits ist dieser Relativ-rad nach Satz ϑ durch m teilbar, er sei etwa sm. Dann ist $s \mid t$.

Nach Satz 4 ist $Z(\eta)$ als Darstellungskörper einem maximalen Teil-örper von A_s und daher nach Hilfssatz 4 einem Teilkörper P von A_t iso-morph. Da $Z(\eta) > Z(\gamma')$ und $Z(\gamma')$ isomorph zu Γ ist, muß P einen zu Γ somorphen Teilkörper Γ^* enthalten. Ist nun Γ in A_t maximal, so ist nach Hilfssatz 3 auch Γ^* maximal und daher $P = \Gamma^*$, also auch $Z(\eta) = Z(\gamma')$. Daher ist Γ dem Darstellungskörper $Z(\eta)$ vom Relativgrad ms über Z somorph. Das liefert die Umkehrung zu Satz 4:

Satz 5. *Ist Γ maximaler Unterkörper des einfachen Systems A_t und ist $\mathfrak{F}$ eine absolut irreduzible Darstellung von A_t oder allgemeiner von einem System A, das bei Zerlegung nach dem Wedderburnschen Satz zum selben nullteilerfreien System wie A_t gehört, so ist $\mathfrak{F}$ in einem zu Γ iso-morphen Körper rational darstellbar.*

Für $t = 1$ ist der Grad eines maximalen Teilkörpers Γ von A_1 in ezug auf Z nach Hilfssatz 3 ein Teiler von m. Da andererseits Γ einem Darstellungskörper isomorph ist, ist der Grad durch m teilbar, also genau m.

Dagegen braucht für $t > 1$ der Grad der maximalen Teilkörper von A_t icht genau tm zu sein, es brauchen ja überhaupt keine algebraischen örper vom Grade tm über Z zu existieren.

Der Körper A heiße *regulär*, wenn es in bezug auf jeden algebraischen örper über K als Grundkörper noch algebraische Körper von beliebigem elativgrad gibt. Z. B. ist jeder algebraische Zahlkörper regulär, der Körper er reellen Zahlen dagegen nicht.

Satz 6. *Ist K regulär, so haben alle maximalen Teilkörper von A_t en Relativgrad mt in bezug auf das Zentrum. Das gleiche gilt stets, wenn $= 1$ ist.*

---

[28]) Vgl. hierzu und zu Satz 5 die Anm. [4]).

Beweis. Ist Γ maximaler Teilkörper von A_t, so ist es nach Satz 5 einem Darstellungskörper $\mathsf{Z}(\gamma)$ isomorph. Der Relativgrad von $\mathsf{Z}(\gamma)$ ist ms mit $s \mid t$. Mit K ist auch Z regulär, also kann man $\mathsf{Z}(\gamma)$ in einen Körper $\mathsf{Z}(\eta)$ vom Relativgrad $\frac{t}{s}$ über $\mathsf{Z}(\gamma)$ einbetten. In bezug auf Z hat $\mathsf{Z}(\eta)$ den Relativgrad mt. Wie beim Beweis von Satz 5 schließt man, daß $\mathsf{Z}(\gamma) = \mathsf{Z}(\eta)$ ist. Daher ist $s = t$, und $\mathsf{Z}(\gamma)$ hat den Relativgrad mt in bezug auf Z.

§ 4.

Wir gehen jetzt dazu über, die nullteilerfremden Systeme A von hyperkomplexen Zahlen über einem gegebenen vollkommenen Grundkörper K aufzustellen. Das Zentrum Z eines derartigen Systems ist nach Satz 3 ein algebraischer Körper über K. Man kann A auch auffassen als nullteilerfreies System hyperkomplexer Zahlen über Z. Ist umgekehrt Z ein beliebiger algebraischer Körper vom Grade r über K und ist umgekehrt A ein nullteilerfreies System vom Range n über Z mit dem Zentrum Z, so kann man A als System vom Range rn über K auffassen. Man kann sich daher auf den Fall beschränken, daß Grundkörper und Zentrum identisch sind.

Es sei jetzt also K selbst schon das Zentrum von A; in den alten Bezeichnungen ist dann $\mathsf{Z} = \mathsf{K}$, $r = 1$. Daher besitzt A nur eine einzige irreduzible Darstellung $\mathfrak{F}$; der Charakter von $\mathfrak{F}$ gehört zu Z. Das Faktorensystem von $\mathfrak{F}$ werde mit c bezeichnet; m sei der zugehörige Schursche Index. Dann ist der Grad von $\mathfrak{F}$ nach Satz 2 ebenfalls m. Wir sehen assoziierte Faktorensysteme wie in U. als nicht wesentlich verschieden an, ebenso gelten ähnliche Gruppen als nicht wesentlich verschieden. Nach U. Satz V ist dann $\mathfrak{F}$ durch c vollständig eindeutig bestimmt, da sein Grad gleich dem Index m des Faktorensystems ist und $\mathfrak{F}$ in bezug auf K komplett ist.

Geht man umgekehrt von einem Faktorensystem c mit dem Schurschen Index m in bezug auf K aus, so gehört dazu eine eindeutig bestimmte absolut irreduzible und in bezug auf K komplette Gruppe des Grades m, deren Charakter zu K gehört und die das Faktorensystem c besitzt. Da man $\mathfrak{F}$ als absolut irreduziblen Bestandteil einer in K irreduziblen und kompletten Gruppe auffassen kann, ist $\mathfrak{F}$ die absolut irreduzible Darstellung eines einfachen Systems A. Nach Satz 3 hat A das Zentrum K. Da ferner für $\mathfrak{F}$ der Grad und der Schursche Index m übereinstimmen, hat nach Satz 2 $\mathfrak{F}$ und daher auch A keine Nullteiler. Nach Satz 3 ist m^2 der Rang von A in bezug auf K als Grundkörper.

Satz 7. *Jedem System* A *ohne Nullteiler über dem Körper* K, *für das* K *auch das Zentrum ist, ist umkehrbar eindeutig ein Faktoren-*

ystem c in bezug auf K *als Grundkörper zugeordnet (genauer eine Klasse ssoziierter Faktorensysteme). c ist das Faktorensystem der absolut irreduiblen Darstellung* $\mathfrak{A}$ *von* A. *Hat c den Schurschen Index m, so hat* A *den Rang* m^2, $\mathfrak{A}$ *hat den Grad m.*

Zusatz. *Um überhaupt alle Systeme ohne Nullteiler über* K *zu bestimmen, hat man für jeden algebraischen Körper* Z *über* K *alle nullteilerfreien Systeme* A *über* Z *mit dem Zentrum* Z *zu bestimmen und* A *als System über* K *aufzufassen.*

Die Aufgabe, alle Systeme ohne Nullteiler zu bestimmen, ist damit uf die Bestimmung aller Faktorensysteme zurückgeführt. Diese ist in U. 2 behandelt. Dort wird folgendes gezeigt: Es sei $Z(\vartheta)$ ein algebraischer Körper, etwa vom Grade s, über Z, $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s$ die Konjugierten u ϑ. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein System von s^3 Zahlen $_{\alpha\beta\gamma}$ ein zu $Z(\vartheta)$ gehöriges Faktorensystem in bezug auf Z als Grundörper bildet, sind die folgenden Bedingungen:

1. $c_{\alpha\beta\gamma}$ ist eine von 0 verschiedene Zahl aus $Z(\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta, \vartheta_\gamma)$ für $, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, s$.

2. Eine Permutation der Galoisschen Gruppe von $Z(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s)$ in ezug auf Z als Grundkörper, bei der ϑ_α in $\vartheta_{\alpha'}$, ϑ_β in $\vartheta_{\beta'}$, ϑ_γ in $\vartheta_{\gamma'}$ übereht, führt $c_{\alpha\beta\gamma}$ in $c_{\alpha'\beta'\gamma'}$ über.

3. Es ist $c_{111} = 1$.

4. Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, s$ ist $c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\delta} c_{\beta\gamma\delta}$.

Läßt man $Z(\vartheta)$ alle algebraischen Körper über Z durchlaufen, so rhält man alle Faktorensysteme in bezug auf Z als Grundkörper.

Da aber für uns nur daran liegt, aus jeder Schar assoziierter Fakorensysteme mindestens eins zu finden, können wir uns nach U. Satz XI uf den Fall beschränken, daß alle Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ Einheitswurzeln sind. oll m der Index des Faktorensystems sein, so kommen genauer nur m-te inheitswurzeln in Betracht; man braucht ferner nur Körper $Z(\vartheta)$ zu beachten, deren Relativgrade in bezug auf Z kleiner als eine nur von m bhängige feste Schranke sind[29]).

Übersieht man also die algebraischen Körper über Z, so ist damit ie Aufstellung aller Faktorensysteme und damit auch aller Systeme hne Nullteiler gelungen. Ist z. B. Z der Körper der rationalen Zahlen,) ist es möglich, die Faktorensysteme in eine abzählbare Anordnung u bringen und bis zu beliebig weiter Stelle diese Folge wirklich zu erechnen.

[29]) Z. B. genügt es, $s < m!\,(m-1)\,m^{m-1}$ zu wählen, wie sich leicht aus U. § 4 gibt.

Von Wichtigkeit ist ferner die Entscheidung der Frage, ob zwei Faktorensysteme assoziiert sind. Ich verweise auf U. § 4, wo gezeigt wird, daß die Antwort davon abhängt, ob es gewisse Körper von geeigneter Struktur gibt.

Sind die Bezeichnungen wie oben gewählt, und genügen s^3 Zahlen $l_{\alpha\beta}$ analogen Bedingungen wie in § 2, so bildet die Gesamtheit aller Matrizen

$$Z = \left(\frac{1}{c_{\varkappa\lambda 1}} l_{\varkappa\lambda}\right) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, s) \tag{16}$$

die Darstellung eines einfachen Systems hyperkomplexer Größen, das bei Zerlegung nach dem Wedderburnschen Satz aus § 2 auf dasjenige System ohne Nullteiler führt, das zum Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ gehört. Es ist also die Angabe eines derartigen Systems stets explizit möglich.

Besonders einfach ist der Fall $s = m$, den man immer dadurch erhalten kann, daß man zu einem assoziierten Faktorensystem übergeht (das aber nicht mehr aus Einheitswurzeln zu bestehen braucht!). In diesem Fall liefert (16) direkt eine absolut irreduzible Darstellung des zum Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ gehörigen Systems A ohne Nullteiler. Man vergleiche auch Anm. [7]).

Wir wollen den Sachverhalt an zwei einfachen schon bekannten Beispielen erläutern.

A. K *sei der Körper der reellen Zahlen.* Für Z kommen nur K und $\mathsf{K}(i)$ in Betracht. Im ersten Fall kann $\mathsf{Z}(\vartheta)$ entweder K oder $\mathsf{K}(i)$ sein. Wir haben also drei Fälle:

1. $\mathsf{K} = \mathsf{Z} = \mathsf{K}(\vartheta)$. Man hat nur das Einheitssystem $c_{111} = 1$. Das System A ist zu K einstufig isomorph.

2. $\mathsf{K} = \mathsf{Z}$, $\mathsf{Z}(\vartheta) = \mathsf{K}(i)$, also $s = 2$. Es wird $c_{\alpha\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\beta} = 1$ für $\alpha, \beta = 1, 2$; $c_{121} = c_{212}$ ist eine in $\mathsf{Z}(\vartheta)$ enthaltene Einheitswurzel zweiter Ordnung, also 1 oder -1. Das erstere führt auf den Fall 1, man kann also annehmen $c_{121} = -1$. Wie unmittelbar ersichtlich ist, ist dieses System nicht zum Einheitssystem assoziiert, also $m = 2$. Die Zahlen $l_{\alpha\beta}$ in (16) müssen den Bedingungen $l_{11} = \bar{l}_{22}$, $l_{12} = \bar{l}_{21}$ unterliegen. Ist $l_{11} = x_1 + i x_2$, $l_{12} = x_3 + i x_4$, so wird nach (16)

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 & -x_3 - i x_4 \\ x_3 - i x_4 & x_1 - i x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sind beliebige reelle Zahlen. Daraus ergibt sich, daß es sich um die Quaternionen handelt.

3. $\mathsf{Z} = \mathsf{K}(i)$. Es muß $\mathsf{K}(\vartheta) = \mathsf{K}(i)$ sein, und daher kommt nur das Einheitsfaktorensystem von Z in Betracht. Daher ist A zu Z, d. h. zum Körper aller Zahlen isomorph.

Daher gibt es nur diese drei Systeme ohne Nullteiler über K, was bekanntlich zuerst von Frobenius bewiesen worden ist (a. a. O. Anm. [8]). Den drei Typen von Faktorensystemen entsprechen andererseits die drei Typen von irreduziblen Gruppen linearer Substitutionen $\mathfrak{G}$ in bezug auf K. 1. $\mathfrak{G}$ ist im Körper der reellen Zahlen darstellbar. 2. $\mathfrak{G}$ ist nicht im Körper der reellen Zahlen darstellbar, aber der Charakter ist reell. 3. Der Charakter ist nicht reell.

B. K *sei ein endlicher Körper.* Dann sind auch Z und $Z(\vartheta)$ endlich. Wir behaupten, *der Schursche Index m ist dann stets* 1.

Zum Beweise brauchen wir die beiden bekannten und leicht beweisbaren Tatsachen: 1. Jeder algebraische Körper $Z(\vartheta)$ über Z ist zyklisch. 2. Zu jeder Zahl ζ aus Z gibt es eine Zahl in $Z(\vartheta)$, deren Relativnorm in bezug auf Z gerade ζ ist.

Es sei $c_{\alpha\beta\gamma}$ ein zu $Z(\vartheta)$ gehöriges Faktorensystem in bezug auf Z als Grundkörper. Wir können annehmen, daß der Relativgrad von $Z(\vartheta)$ mit dem Index m übereinstimmt. Die Konjugierten zu ϑ seien so numeriert, daß die Galoissche Gruppe von $Z(\vartheta)$ in bezug auf Z durch den Zyklus $(1, 2, \ldots, m)$ erzeugt wird. Ist l eine Größe aus $Z(\vartheta)$ mit den Konjugierten $l_1, l_2, \ldots, l_m$, so setzen wir, falls $m > 1$ ist,

$$l_{12} = l_1,\ l_{23} = l_2,\ \ldots,\ l_{m-1,m} = l_{m-1},\ l_{m1} = l_m$$
$$l_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für alle andern Paare } \varkappa, \lambda.$$

Dann wird nach (16)

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & l_1 c_{121} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & l_2 c_{231} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & l_{m-1} c_{m-1,m,1} \\ l_m c_{m11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von Z, die sicher Koeffizienten aus Z hat, ist

$$\varphi(x) = x^m - (l_1 l_2 \ldots l_m \cdot c_{121} c_{231} \ldots c_{m-1,m,1} c_{m11}) = x^m - l_1 l_2 \ldots l_m \cdot c,$$

wo mit $l_1 l_2 \ldots l_m$ auch c zu Z gehört. Dann kann man l_1 so bestimmen daß $l_1 l_2 \ldots l_m = c^{-1}$, also $\varphi(x) = x^m - 1$ wird. Dann ist aber $\varphi(1) = 0$, also $|Z - E| = 0$ und also A kein System ohne Nullteiler. Daher ist stets $m = 1$.

Da für alle nullteilerfreien Systeme A dann wegen $m = 1$ nach Satz 7 auch die absolut irreduziblen Darstellungen den Grad 1 haben, ist in A die Multiplikation kommutativ, also A ein Körper.

Ist A irgendein System mit endlich vielen Elementen, das alle Körpereigenschaften bis auf die Kommutativität der Multiplikation besitzt, so bildet das Zentrum von A sicher einen Körper Z und A läßt sich als

System ohne Nullteiler über Z auffassen. Dann folgt aber $A = Z$. Das liefert einen Satz von Wedderburn (vgl. Anm. [9]). *Bei endlichen Körpern ist das kommutative Gesetz der Multiplikation eine Folge der anderen Axiome.*

Umgekehrt kann man aus diesem Satz auch schließen, daß für einen endlichen Körper K stets $m = 1$ ist.

Es ergibt sich jetzt noch, daß ein einfaches System hyperkomplexer Größen über K durch das System aller Matrizen mit Elementen aus einem endlichen Körper $Z > K$ dargestellt wird. Daher gilt Hilfssatz 2 auch für einen endlichen Körper K [30]).

§ 5.

Sind A und B zwei Systeme hyperkomplexer Größen über demselben Körper K, und sind die Basiselemente

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \quad \text{bzw.} \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,$$

so versteht man unter dem *direkten Produkt* $A \times B$ ein System, dessen Basiselemente zweckmäßig mit

$$\alpha_1 \times \alpha_1,\ \alpha_1 \times \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_1 \times \beta_n,\ \alpha_2 \times \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_m \times \beta_n$$

bezeichnet werden. Die Rechenregeln sind durch

$$(\alpha_\varkappa \times \beta_\lambda)(\alpha_\mu \times \beta_\nu) = \alpha_\varkappa \alpha_\mu \times \beta_\lambda \beta_\nu;$$
$$k(\alpha_\varkappa \times \beta_\lambda) = (k\alpha_\varkappa) \times \beta_\lambda = \alpha_\varkappa \times (k\beta_\lambda) \quad \text{für} \quad k < K$$

vollkommen bestimmt.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Darstellungen von A bzw. B, so bilde man (im Sinne von U. § 1) $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Es sei $\mathfrak{G}$ die in Bezug auf K komplette Gruppe, die aus allen linearen Verbindungen von Elementen von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ mit Koeffizienten aus K besteht. Offenbar ist $\mathfrak{G}$ eine Darstellung von $A \times B$.

Wir wollen jetzt annehmen, daß A und B einfache Systeme sind, und daß für beide K auch das Zentrum ist (vgl. § 4). $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien beide irreduzibel; dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einstufig isomorph mit A bzw. B. Wir behaupten: $\mathfrak{G}$ ist eine einstufig isomorphe Darstellung von $A \times B$. Denn sind μ und ν die Grade von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist $m = \mu^2$, $n = \nu^2$. $\mathfrak{G}$ ist ebenfalls irreduzibel und hat den Grad $\mu\nu$. $\mathfrak{G}$ enthält daher $(\mu\nu)^2 = mn$ linear unabhängige Elemente, also ebensoviel linear unabhängige Elemente wie $A \times B$. Daher ist die Darstellung einstufig isomorph.

Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ folgt weiter, da auch der Charakter von $\mathfrak{G}$ zu K gehört, daß $A \times B$ ebenfalls einfach ist und daß sein Zentrum zu K einstufig isomorph ist.

---

[30]) Man beachte, daß bei diesem Beweis keine Folgerung aus Hilfssatz 2 verwendet ist.

Wählt man insbesondere B als das zu A reziproke System hyperomplexer Größen[31]), so kann man $\mathfrak{B}$ als die Gruppe $\mathfrak{A}'$ wählen, die aus en Transponierten aller Matrizen von $\mathfrak{A}$ besteht. Nach U. Satz II hat $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ den Schurschen Index 1. Daher ist das dann zu $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ gehörige ystem ohne Nullteiler K selbst. Hat A den Rang n, so hat unser System en Rang n^2.

Satz 8. *Ist* A *ein einfaches System hyperkomplexer Größen über* K *om Rang* n *und ist* K *das Zentrum von* A, *bedeutet ferner* A′ *das zu reziproke System, so ist* $A \times A'$ *dem System aller Matrizen vom Grade* n *it Koeffizienten aus* K *isomorph.*

Das direkte Produkt eines Systems A mit sich bezeichnen wir mit A^2, nalog sei A^n definiert. Analog wie Satz 8 folgt aus U. Satz I und den Beziehungen zwischen Exponent und Index eines Faktorensystems (vgl. atz I der in Anm. [10]) angegebenen Arbeit).

Satz 9. A *sei ein einfaches System hyperkomplexer Größen über* K *om Range* f^2 *und es sei* K *das Zentrum von* A. *Dann gibt es eine gerisse positive kleinste ganze rationale Zahl* l, *für die* A^l *dem System ller Matrizen eines bestimmten Grades mit Koeffizienten aus* K *einstufig somorph ist. Jede andere Zahl, die die gleiche Eigenschaft hat, ist durch* l *eilbar, und umgekehrt gilt für alle durch* l *teilbaren Exponenten das leiche.* l *ist der Exponent des zu* A *gehörigen Faktorensystems, es geht n* f *auf. Besitzt* A *keine Nullteiler* $(m = f)$, *so gehen alle Primteiler on* f *auch in* l *auf.*

Es sei jetzt c ein Faktorensystem vom Index m in bezug auf K als rundkörper. Die Primzahlzerlegung von m sei

17) $$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Vir setzen

18) $$t_\varrho = \frac{m}{p_\varrho^{\alpha_\varrho}} \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

nd bestimmen die ganzen rationalen Zahlen u_ϱ so, daß

19) $$u_1 t_1 + u_2 t_2 + \dots + u_r t_r = 1$$

ird. Das ist möglich, da die Zahlen t_ϱ untereinander teilerfremd sind.

Für irgendein ganzes rationales ν $\left(\nu \gtreqless 0\right)$ bezeichnen wir mit c^ν das aktorensystem, das aus den ν-ten Potenzen der Zahlen von c besteht. sei der zum Faktorensystem c gehörige Exponent. Es sei c_ϱ das Fakorensystem $c^{t_\varrho u_\varrho}$; l_ϱ sei der zugehörige Exponent, m_ϱ der zugehörige Index.

[31]) Vgl. Dickson S. 31.

Da $t_\varrho u_\varrho p_\varrho^{a_\varrho}$ durch m und also auch durch l teilbar ist, ist

$$c_\varrho^{p_\varrho^{a_\varrho}} = c^{t_\varrho u_\varrho p_\varrho^{a_\varrho}}$$

zum Einheitssystem assoziiert, also l_ϱ ein Teiler von $p_\varrho^{a_\varrho}$ und daher eine Potenz von p_ϱ. m_ϱ ist nur durch Primzahlen teilbar, die in l_ϱ aufgehen und daher auch von der Form $p_\varrho^{\beta_\varrho}$. Ist $\mathfrak{F}$ eine irreduzible Gruppe mit dem Faktorensystem c, so hat nach U. § 1 $\mathfrak{F}^\nu$ für $\nu > 0$ und $\mathfrak{F}'^\nu$ für $\nu < 0$ das Faktorensystem c^ν. Da $\mathfrak{F}^\nu$ bzw. $\mathfrak{F}'^\nu$ in allen Körpern rational darstellbar sind, in denen $\mathfrak{F}$ rational darstellbar ist, ist der Index von c^ν ein Teiler von m. Insbesondere folgt $m_\varrho \mid m$ und daher ist $\beta_\varrho \leqq \alpha_\varrho$.

Zu c_ϱ gehört ein bestimmtes System A_ϱ ohne Nullteiler mit dem Zentrum K. $\mathfrak{A}_\varrho$ sei die absolut irreduzible Darstellung von A_ϱ. Dann hat $\mathfrak{A}_\varrho$ den Grad $m_\varrho = p_\varrho^{\beta_\varrho}$; A_ϱ hat den Rang m_ϱ^2. Wir setzen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_r. \tag{20}$$

Der Grad von $\mathfrak{A}$ ist dann $f = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$. Das zu $\mathfrak{A}$ gehörige Faktorensystem ist

$$c_1 c_2 \ldots c_r = c^{t_1 u_1 + t_2 u_2 + \ldots + t_r u_r} = c$$

nach (19). Der Index von $\mathfrak{A}$ ist folglich m, und da der Index im Grad aufgeht, ist $m \mid f$, also $\alpha_\varrho \leqq \beta_\varrho$. Daher folgt $\alpha_\varrho = \beta_\varrho$, $f = m$. Die zu $\mathfrak{A}$ gehörige komplette Gruppe stellt daher ein System A ohne Nullteiler dar, wegen (20) ist

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_2 \times \ldots \times \mathsf{A}_r. \tag{21}$$

A ist das zu dem gegebenen Faktorensystem c gehörige nullteilerfreie System.

Satz 10. *Ist* A *ein System hyperkomplexer Größen ohne Nullteiler über* K, *ist* K *zugleich das Zentrum von* A, *ist schließlich* m^2 *der Rang von* A

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r},$$

so kann man A *als direktes Produkt* $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_2 \times \ldots \times \mathsf{A}_r$ *darstellen, wo* A_ϱ *ein System ohne Nullteiler mit dem Zentrum* K *vom Rang* $(p_\varrho^{a_\varrho})^2$ *bedeutet.*

Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, daß, wenn z. B. in Satz 10 $m = 4$ ist, es eintreten kann, daß A als direktes Produkt zweier Systeme ohne Nullteiler vom Rang 4 dargestellt werden kann; daß das aber durchaus nicht der Fall zu sein braucht.

Bevor wir die Eindeutigkeit der Darstellung (21) untersuchen, beweisen wir

Satz 11. *Ist* A *ein einfaches System über* K *als Grundkörper und ist* K *auch das Zentrum von* A, *so ist jeder Automorphismus von* A, *bei dem* K *in sich übergeht, ein innerer Automorphismus*[81a]).

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ die absolut irreduzible Darstellung von A, so entspricht jedem $\alpha < \mathsf{A}$ ein wohlbestimmtes $A < \mathfrak{A}$. Ist nun ein Automorphismus von A gegeben, bei dem dem Element α etwa α^* zugeordnet ist, und ist etwa A^* die α^* entsprechende Matrix von $\mathfrak{A}$, so erhält man eine Darstellung $\mathfrak{A}^*$ von A, wenn man zu α die Matrix A^* zuordnet. $\mathfrak{A}^*$ ist ebenfalls irreduzibel. Da aber A nach Satz 1 nur eine irreduzible Darstellung besitzt, sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ ähnlich. Nun kommen alle Elemente von $\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{A}$ vor, man kann daher Hilfssatz 2 anwenden und erkennt: Es gibt ein Element P in $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A}^* = P^{-1}\mathfrak{A}P$ ist. Ist π das P entsprechende Element von A, so folgt $\alpha^* = \pi^{-1}\alpha\pi$ für je zwei bei dem Automorphismus entsprechende Elemente α und α^*. Das ist gerade die Behauptung.

Es sei jetzt $\mathsf{A} = \mathsf{B}_1 \times \mathsf{B}_2 \times \ldots \times \mathsf{B}_r$ eine zweite Zerlegung von der Art wie in Satz 10, $\mathfrak{B}_\varrho$ sei die absolut irreduzible Darstellung von B_ϱ. Dann hat

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r \tag{22}$$

das Faktorensystem c, das Faktorensystem von $\mathfrak{B}_\varrho$ sei c'_ϱ. Der Grad und nach Satz 2 auch der Index von $\mathfrak{B}_\varrho$ sind Potenzen von p_ϱ. Daher hat wegen (18) $\mathfrak{B}_\varrho^{t_\varrho}$ dasselbe Faktorensystem wie $\mathfrak{B}^{t_\varrho}$. Das ist das Faktorensystem c^{t_ϱ} und das ist analog auch das Faktorensystem von $\mathfrak{A}_\varrho^{t_\varrho}$. Da t_ϱ zum Exponenten von $\mathfrak{A}_\varrho$ und $\mathfrak{B}_\varrho$ teilerfremd ist, haben $\mathfrak{A}_\varrho$ und $\mathfrak{B}_\varrho$ das gleiche Faktorensystem; $\mathfrak{A}_\varrho$ und $\mathfrak{B}_\varrho$ sind einstufig isomorph. Das gilt für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$. ϱ sei fest gewählt. Ersetzt man in (20) alle $\mathfrak{A}_\sigma$ für $\sigma \neq \varrho$ durch die Einheitsmatrix, so erhält man eine zu $\mathfrak{A}_\varrho$ einstufig isomorphe Untergruppe $\tilde{\mathfrak{A}}_\varrho$ von $\mathfrak{A}$. Die entsprechenden Elemente von A bilden ein zu A_ϱ einstufig isomorphes System, das mit $\tilde{\mathsf{A}}_\varrho$ bezeichnet sei. Für $\varrho \neq \sigma$ sind alle Elemente von $\tilde{\mathsf{A}}_\varrho$ mit allen Elementen von $\tilde{\mathsf{A}}_\sigma$ vertauschbar. Jedes Element von A läßt sich als Summe in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_1^{(\nu)} \alpha_2^{(\nu)} \ldots \alpha_r^{(\nu)} \tag{23}$$

darstellen, wo $\alpha_\sigma^{(\nu)}$ zu $\tilde{\mathsf{A}}_\sigma$ gehört. Zu (22) gehören analog Untergruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ und Teilsysteme $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ von A. Für jedes ϱ sind ferner $\tilde{\mathsf{A}}_\varrho$ und $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ beide zu A_ϱ einstufig isomorph. Das liefert eine isomorphe Abbildung von A_ϱ

[81a]) Dieser Satz findet sich auch in der kürzlich erschienenen Abhandlung von Herrn Th. Skolem, Theorie der assoziativen Zahlensysteme, Skrifto utgitt av det norske Videnskaps-Akademi i Oslo 1927, die mir erst nach Abschluß der vorliegenden Arbeit bekannt geworden ist.

auf $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ und diese Abbildung erzeugt eine isomorphe Abbildung von A auf sich, bei der $\tilde{\mathsf{A}}_\varrho$ in $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ übergeht. In der Art von Satz 11 können wir aber diese Abbildung von A auf sich durch ein Element π von A herstellen.

Satz 12. *Die in Satz* 10 *angegebene Zerlegung ist eindeutig. D. h. hat man zwei Zerlegungen der Art wie in Satz* 10

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_2 \times \ldots \times \mathsf{A}_r = \mathsf{B}_1 \times \mathsf{B}_2 \times \ldots \times \mathsf{B}_r,$$

so sind A_ϱ *und* B_ϱ *einstufig isomorph für* $\varrho = 1, 2, \ldots, r$. A *enthält ein wohlbestimmtes zu* A_ϱ *isomorphes Teilsystem* $\tilde{\mathsf{A}}_\varrho$. *Ist* $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ *das bei der zweiten Zerlegung* B_ϱ *entsprechende Teilsystem, so geht durch einen inneren Automorphismus von* A *jedes* $\tilde{\mathsf{A}}_\varrho$ *in* $\tilde{\mathsf{B}}_\varrho$ *über.*

Es sei A ein System ohne Nullteiler[32]), das zu dem Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ gehöre. Der Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$, zu dem $c_{\alpha\beta\gamma}$ gehöre, habe den Grad m, wo m der Index von $c_{\alpha\beta\gamma}$ ist. Nach § 4 bilden die Matrizen

$$Z = \left(\frac{1}{c_{\varkappa\lambda 1}} l_{\varkappa\lambda}\right)$$

eine Darstellung A von $\mathfrak{A}$. Dabei haben die $l_{\varkappa\lambda}$ den in § 2 angegebenen Bedingungen zu genügen. Um eine Basis von A anzugeben, haben wir nur m^2 linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{A}$ anzugeben. Das geschieht wie in U. § 2. $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$ seien die Konjugierten zu ϑ. $\mathfrak{R}$ sei die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m)$ in bezug auf K als Grundkörper. Zwei Indexpaare α, β und γ, δ heißen äquivalent, wenn es in $\mathfrak{R}$ eine Permutation gibt, die ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ überführt. Alle Indexpaare zerfallen in Klassen von äquivalenten. Diese Klassen seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_t$; $\mathfrak{K}_\tau$ sei eine feste Klasse. Es gebe in $\mathfrak{K}_\tau$ etwa s_τ Indexpaare $\varkappa, \lambda$ mit $\varkappa = 1$; dann gibt es in $\mathfrak{K}_\tau$ auch genau s_τ Paare, für die $\varkappa$ einen anderen vorgeschriebenen Wert hat. Insgesamt enthält $\mathfrak{K}_\tau$ genau $s_\tau \cdot m$ Paare. Wir ordnen $\mathfrak{K}_\tau$ die $s_\tau \cdot m$ Matrizen Z zu, für die

$$\begin{aligned} l_{\varkappa\lambda} &= 0, & &\varkappa, \lambda \text{ nicht in } \mathfrak{K}_\tau, \\ l_{\varkappa\lambda} &= \vartheta_\varkappa^\varrho \vartheta_\lambda^\sigma, & &\varkappa, \lambda \text{ in } \mathfrak{K}_\tau \end{aligned}$$

ist, und ϱ einen festen der Werte $0, 1, 2, \ldots, m-1$; σ einen festen der Werte $0, 1, 2, \ldots, s_\tau - 1$, bedeutet. Die Matrix Z, die man so erhält, sei mit $Z_{\varrho\sigma}^{(\tau)}$ bezeichnet. Nach U. § 2 erhält man so genau m^2 linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{A}$, wenn man τ der Reihe nach $1, 2, \ldots, t$ durchlaufen läßt.

---

[32]) Die Voraussetzung, daß A keine Nullteiler hat, ist nicht wesentlich; das Folgende läßt sich auf beliebige einfache Systeme übertragen, wenn man das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ geeignet wählt.

Als erste Klasse wählen wir etwa die von 1, 1. Hier ist $s_1 = 1$, es wird

$$Z_{\varrho\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vartheta_1^\varrho & & & \\ & \vartheta_2^\varrho & & \\ & & \ddots & \\ & & & \vartheta_m^\varrho \end{pmatrix} = (Z_{10}^{(1)})^\varrho.$$

Wir setzen $Z_{10}^{(1)} = T$. Dann wird $Z_{\varrho\sigma}^{(1)} = T^\varrho$. Ferner setzen wir $Z_{00}^{(\tau)} = Z^{(\tau)}$. Dann gilt $Z_{\varrho\sigma}^{(\tau)} = T^\varrho Z^{(\tau)} T^\sigma$. Bildet man also die m^2 Elemente

$$T^\varrho Z^{(\tau)} T^\sigma \tag{24}$$

$$(\tau = 1, 2, \ldots, t;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots, s_\tau - 1),$$

so erhält man eine Basis von $\mathfrak{A}$ und daher auch von A. Ist ϑ und $c_{\alpha\beta\gamma}$ wirklich gegeben, so kann man auch noch leicht die Gesetze aufstellen, durch die sich das Produkt von zwei der Größen (24) durch eben diese Größen linear ausdrücken lassen.

Verhältnismäßig einfach wird der Fall, daß $\mathsf{K}(\vartheta)$ ein Normalkörper wird, ein Fall, der von Herrn Dickson behandelt wurde. Man erhält aus unsern Ergebnissen sehr leicht die Sätze 12, 13, 14 des 3. Kapitels des Dicksonschen Buches. Nimmt man statt des nullteilerfreien Systems ein geeignetes zugehöriges einfaches System, so kann man stets erreichen, daß dieser Fall eintritt.

Ein anderer erwähnenswerter Fall ist der, daß $\mathfrak{R}$ zweifach transitiv ist. Dann gibt es nur zwei Klassen.

Unsere Methoden gestatten eine Reihe weiterer Ergebnisse für nullteilerfreie Systeme aufzustellen. Ich weise nur auf einiges hin. Besonders einfach ist der Fall $m = 2$, den man vollständig beherrscht. Die Ergebnisse, die man ohne weiteres erhält, werden in der Hauptsache im 3. Kapitel des Dicksonschen Buches nach anderer Methode abgeleitet. Ich verzichte daher auf die Behandlung.

Für $m = 3$ hat Herr Wedderburn[33]) bewiesen, daß es — in unserer Bezeichnungsweise — immer einen zyklischen Darstellungskörper 3. Grades gibt. Der Satz 10 ergibt dann, daß das analoge auch für $m = 6$ gilt. *Ein System ohne Nullteiler mit dem Zentrum* K *vom Rang* 36 *ist daher ein Dicksonsches System.*

---

[33]) Wedderburn, Transactions of the American Math. Ass. (1925), p. 163—196. Auch mit den hier durchgeführten Methoden kann der Beweis ohne Schwierigkeiten erbracht werden.

(Eingegangen am 23. April 1928.)

Das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen.

Von

W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Namhafte Forscher, wie Jacobi, Clebsch, Frobenius und Stickelberger, M. Simon und andere, haben das Schließungsproblem zweier Kegelschnitte (in der Ebene) in Beziehung gesetzt zu den elliptischen Funktionen.

Unbeschadet aller Kunst des Aufbaus und der Durchführung haftet diesen Untersuchungen doch eine gewisse Künstlichkeit an. Es werden zwar gewisse Formeln aus der Theorie der ganzzahligen Multiplikation der elliptischen Funktionen geometrisch gedeutet, und führen so zum Schließungsproblem und seiner Lösung.

Erhebt man aber die schlichte Frage, auf welchem inneren Grunde der Zusammenhang zwischen beiden Gebieten beruhe, so erhält man keine befriedigende Auskunft.

Überdies leidet die ausschließlich transzendente Behandlung der mit einer elliptischen Kurve 3. Ordnung c_3 verbundenen Schließungsfigur an der Einseitigkeit, daß sie nur die Geometrie *auf* der Kurve berücksichtigt, und die Rolle, welche die Figur im weiteren Sinne innerhalb der Ebene spielt, außer acht läßt.

In der Tat zeigen die folgenden Ausführungen, daß erst durch das Zusammenwirken von vier verschiedenen, je selbständigen Betrachtungsweisen — eine algebraische, eine rein geometrische, eine analytisch-geometrische, endlich eine transzendente — eine völlige Beherrschung der Schließungsfigur für den einfachsten, aber wichtigsten Fall von Dreiecken ermöglicht wird.

Dementsprechend gliedert sich das Folgende in vier Abschnitte.

Der erste Abschnitt (A) bringt eine algebraisch invariantentheoretische Einleitung.

Auf Grund einer projektiven Beziehung, die zwischen einem Ordnungs- nd einem Klassenkegelschnitte besteht, falls sich dieselben in „Schließungs- age“ befinden — so daß ∞^1 eigentliche Dreiecke existieren, die dem ersteren Kegelschnitte ein- und dem letzteren umbeschrieben sind —, läßt sich die Figur wiedergeben durch eine, in zwei Variablen λ, μ symmetrische und e quadratische „Korrespondenzgleichung“ $C = 0$, mit der Eigentümlich- eit, daß je zwei Lösungen (λ_1, λ_2), (λ_1, λ_3) eine dritte (λ_2, λ_3) nach sich iehen.

Diese Gleichung $C = 0$ läßt sich geometrisch deuten als eine elliptische Kurve 4. Ordnung c_4, die man jedoch besser vermöge einer geeigneten uadratischen Transformation in die Normalkurve, eine elliptische c_3 berführt.

Es entsteht dann als Schließungsfigur zuvörderst eine ∞^1-Schar. von er c_3 einbeschriebenen Gruppen von acht Punkten, unter denen sich zwei este Zentra u, u' befinden.

Im zweiten Abschnitte (B) wird diese Figur als von der c_3 abgelöst etrachtet, und als eine lediglich aus Punkten und Geraden der Ebene be- tehende Linearfigur (Konfiguration) mit rein geometrischen Hilfsmitteln erfolgt.

Es liegen dann zwei feste Zentralpunkte u, u' vor, von denen zwei Dreistrahlen, das sind Tripel (g_r, g_s, g_t). resp. (g_r', g_s', g_t') von Geraden usgehen, die die Ecken eines Dreiecks projizieren, und dadurch einander ugeordnet sind.

Die sechs Schnittpunkte $u_{rs} = (g_r, g_s')$ nicht zugeordneter Geraden ilden dann mit u und u' die Figur der früheren acht Punkte.

Durch diese geht ein c_3-Büschel B, dessen neunter Grundpunkt u'' ie Figur vervollständigt; in ihm treffen sich die drei Verbindungsgeraden $'' = (u_{rs}, u_{sr})$, usf.

Die Figur zerlegt sich dann in drei gleichberechtigte Dreiecke $\triangle(u, u', u'')$, $\triangle_1(u_{rs}, u_{st}, u_{tr})$, $\triangle_2(u_{sr}, u_{rt}, u_{ts})$ derart, daß je zwei der- elben dreifach eckenperspektiv liegen, und stets die drei Perspektivitäts- entra die Ecken des dritten Dreiecks bilden.

Zugleich stellt die Figur eine Konfiguration $(9_3, 9_3)$ dar.

Adjungiert man dieser Linearfigur hinterher irgendeine eigentliche c_3 es Büschels B als Grundkurve, so gelangt man zu der Schließungsfigur es ersten Abschnitts zurück.

Es ergibt sich noch, daß diese Totalfigur vermöge einer geeigneten uadratischen Punkt-Transformation in eine solche von demselben Charakter bergeht.

Im nächsten Abschnitte (C) wird die Linear- und Totalfigur analytisch-geometrisch untersucht. Die obigen Eigenschaften werden aufs neue gewonnen, aber auch nach verschiedenen Richtungen hin erweitert.

So existieren im Büschel B drei ausgezeichnete Paare von Partikularkurven, für die je eines der drei Dreiecke $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ zu einem Tangentialdreieck" wird, so daß bei zyklischem Fortschreiten — im einen oder andern Sinne — die Tangente jeder Ecke durch die nächstfolgende Ecke geht.

Setzt man das Büschel B aus den beiden Individuen eines solchen Paares linear zusammen, so lassen sich die beiden anderen Paare, sowie das Büschel B selbst und insbesondere eine geeignet (symmetrisch) in B ausgewählte Grundkurve c_3 übersichtlich darstellen.

Legt man ferner an jedem der neun Grundpunkte an irgendeine c_3 des Büschels B die Tangente, und bestimmt deren Restpunkt, so bilden die letzteren wiederum eine Figur desselben Charakters.

Ausgeschlossen ist in diesem Abschnitte nur der Sonderfall, daß irgendeines der drei Dreiecke $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ ein uneigentliches wird.

Der letzte Abschnitt (D) ist der transzendenten Behandlung gewidmet.

Nach Ausbreitung eines elliptischen Integrals 1. Gattung u als Parameter auf der Grundkurve c_3 des ersten Abschnittes läßt sich die ursprüngliche Schließungsfigur der acht Grundpunkte $u, u', u_{r_s}, \ldots$ durch ein System von sechs linearen Kongruenzen (mod. Per.) wiedergeben.

Der Schließungscharakter dieses Systems seigt sich darin, daß es bei beliebig auf der c_3 angenommenen u, u' hinsichtlich der sechs Unbekannten $u_{r_s} \ldots$ keine eigentliche Lösung zuläßt; existiert aber *eine* solche Lösung — wozu das Erfülltsein einer gewissen Lagen-Beziehung zwischen u und u' notwendig und hinreichend ist —, so existieren auch ∞^1 Lösungen derart, daß bei willkürlicher Wahl etwa von u_{r_s} die fünf Restargumente eindeutig bestimmt sind.

Die fragliche Beziehung zwischen u und u' ist eine $(2, 2)$-deutige. Denkt man sich etwa u fest gegeben, so kann u' noch zwei Werte annehmen; gibt man u' irgendeinen derselben, so wird der andere gerade das Argument des neunten Ergänzungspunktes u''.

Des weiteren bestätigen sich wiederum die früheren Eigenschaften der Schließungsfigur, soweit sie zur Geometrie *auf* der c_3 gehören.

Beachtenswert ist der Umstand, daß irgendeine invariante Sonderbeschränkung, die man der Schließungsfigur auferlegt, eine doppelte Deutung zuläßt; einmal auf der Grundkurve c_3 selbst, andererseits für eine endliche Anzahl von Partikulärkurven des Büschels B.

Endlich wird nunmehr auch der obige Sonderfall zugänglich, wo die Ecken irgendeines der drei Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ inzident werden; dies tritt dann und nur dann ein, wenn jene Ecken in die drei (reellen) Wendepunkte fallen.

Bei allen diesen Ausführungen haben wir uns der Kürze halber auf reelle Gebilde beschränkt, und weil so die Eigenart des Schließungsproblems am deutlichsten hervortritt.

Steinberg b. Goslar, Anfang Oktober 1927.

A. Algebraisch-invariantentheoretische Einführung.

1. Wie man weiß[1]), gibt es im allgemeinen kein eigentliches Dreieck $\triangle$ in der Ebene, das zugleich einem einteiligen Ordnungskegelschnitte c ein- und zugleich einem einteiligen Klassenkegelschnitte γ umbeschrieben wäre. Gibt es aber im besondern ein einziges solches Drei-

---

[1]) Vgl. z. B. W. Franz Meyer, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883. Kap. 2.

Die im Texte auftretenden Gebilde gestatten eine besonders einfache algebraische Behandlung, wenn man einen der beiden Kegelschnitte, etwa γ, als Normkegelschnitt $N_2 \equiv u_0 u_2 - u_1^2 = 0$ wählt, mit den expliziten Darstellungen: $x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^2 : 2\lambda : 1$, $u_2 : u_1 : u_0 = 1 : -\lambda : \lambda^2$.

Ist die Gleichung von $c : h_{00} x_0^2 + \ldots + h_{01} x_0 x_1 \ldots = 0$, so wird die Schließungsinvariante S der Ausdruck: $h_{00} h_{12} - h_{01} h_{12} + h_{11} (h_{11} + h_{02})$, oder in invarianter Gestalt: $J^2 - I$, wo (bei geeigneter Normierung numerischer Faktoren) J die bilineare Invariante von c und γ bedeutet, und I die der reziproken Formen.

Ist $S = 0$ erfüllt, so lassen sich zwei Reihen von Koeffizienten $a_0, \ldots, a_3$; $b_0, \ldots, b_3$ einführen, so daß c die Gestalt annimmt:

$$c \equiv c(s) \equiv \begin{vmatrix} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2, & a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 \\ b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2, & b_1 s_0 + b_2 s_1 + b_3 s_2 \end{vmatrix}$$
$$\equiv s_0^2 p_{01} + s_0 s_1 p_{02} + s_0 s_2 (p_{03} - p_{12}) + s_1^2 p_{12} + s_1 s_2 p_{13} + s_2^2 p_{23},$$

wo $p_{ik} = (ab)_{ik}$ und $s_2 : s_1 : s_0 = x_2 : x_1 : x_0 = \lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$ die Koordinaten eines Punktes sind, von dem die Tangenten λ_1, λ_2 an N_2 gehen.

Die Bedingung $S = 0$ fällt dann mit der bekannten Identität $\sum p_{ik} p_{lm} = 0$ zusammen.

Die ∞^1 Schließungstripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ auf N_2 hängen ab von zwei linearen Gleichungen:

$$(a\sigma) \equiv a_0 \sigma_0 + \ldots a_3 \sigma_3 = 0, \; (b\sigma) \equiv b_0 \sigma_0 + \ldots + b_3 \sigma_3 = 0,$$

also

$$\sigma_3 : \sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 : \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 : 1;$$

durch Elimination von λ_3 gelangt man zu $c(s) = 0$ zurück.

Die Korrespondenzgleichung $C(\lambda, \mu) = 0$ ergibt sich sofort aus $c(s) = 0$, wenn man die $s_2 : s_1, s_0$ ersetzt durch $\lambda\mu, \lambda + \mu, 1$.

Über ein entsprechendes Schließungsproblem im Raume siehe meine Abhandlung Hamburger Mitt. 6 (1928), S. 352.

eck $\triangle$ — wofür das Verschwinden einer gewissen simultanen Invariante S[1]) von c und γ, der „Schließungsinvariante", notwendig und hinreichend ist —, so gibt es auch ∞^1 solche Dreiecke $\triangle$; jede Tangente von γ ist Seite, und jeder Punkt von c Ecke eines $\triangle$.

Man sagt dann, daß sich c und γ in „Schließungslage" befinden, und jedes der Dreiecke $\triangle$ heißt ein „Schließungsdreieck" von c und γ. Es ist dann unmittelbar ersichtlich, daß vermöge der Schließung beide Kegelschnitte projektiv aufeinander bezogen sind: jeder Tangente von γ entspricht die, als Punkt von c aufgefaßte Gegenecke des zugehörigen Schließungsdreiecks. Denkt man sich auf jedem der beiden Kegelschnitte c, γ einen Parameter λ resp. μ ausgebreitet, so läßt sich die projektive Zuordnung einfach durch die Beziehung $\lambda = \mu$ festlegen.

2. Stellt man andererseits die „Korrespondenzgleichung" für c und γ auf, d. i. die Bedingung, daß ein Punkt (μ) von c auf einer Tangente (λ) von γ liegt, so ist das eine je in λ und μ quadratische Gleichung $C(\lambda, \mu) = 0$, die sich zweier besonderer Eigenschaften erfreut.

Einmal ist sie in den Variablen λ und μ symmetrisch, so daß diese nur in Form der Quadrate und Produkte der beiden symmetrischen Verbindungen $\lambda\mu$ und $\lambda + \mu$ auftreten; jedem Lösungspaar (λ, μ) von $C = 0$ korrespondiert ein „Gegenpaar" (μ, λ).

Zweitens soll $C = 0$ die Schließungslage von c und γ charakterisieren.

Sind also $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_1, \lambda_3)$ zwei, zu einem beliebigen Ausgangswert $\lambda = \lambda_1$ gehörige Lösungspaare, wo λ_2, λ_3 die μ-Wurzeln von $C = 0$ bedeuten, so ist auch (λ_2, λ_3) ein Lösungspaar; die drei Paare bilden dann ein „Schließungstripel".

Vermöge der ersteren Eigenschaft sind dann auch die drei Gegenpaare $(\lambda_2, \lambda_1), (\lambda_3, \lambda_1), (\lambda_3, \lambda_2)$ Lösungspaare, und bilden das „Gegentripel" zu ersterem.

3. Man deute nunmehr die Gleichung $C = 0$ geometrisch in einer Hilfsebene E (λ, μ), wo λ, μ gewöhnliche rechtwinklige Punkt-Koordinaten seien. Die Gleichung stellt dann in E eine elliptische Kurve 4. Ordnung c_4 dar, die in den beiden unendlich-fernen Punkten der Koordinatenachsen Doppelpunkte besitzt; überdies verläuft sie symmetrisch zur Halbierungslinie $\lambda - \mu = 0$ des ersten und dritten Quadranten. Den beiden obigen Lösungstripeln entsprechen jetzt ein „Schließungsdreieck" und sein „Gegendreieck".

Da eine c_4 mit zwei Doppelpunkten nicht die einfachste elliptische Kurve der Ebene ist, sondern eine allgemeine c_3 als „Normalkurve", so wird man vorab durch eine möglichst einfache Punkttransformation die c_4 in eine solche c_3 überführen. Es empfiehlt sich zu dem Behuf eine invo-

torische quadratische Punkt-Transformation T_2, von deren drei Fundaentalpunkten zwei in die beiden Doppelpunkte der c_4 fallen, während r den dritten ein arbiträrer Punkt der c_4 gewählt werde.

Vermöge einer solchen T_2 geht die c_4 über in eine elliptische c_3; zwei er Fundamentalpunkte fallen in zwei Kurvenpunkte, die mit u und u' ezeichnet seien, während der dritte, der weiterhin nicht in Betracht kommt, ußerhalb der c_3 liegt.

Es kommen im folgenden nur reelle Punkte der c_3 in Frage.

4. Damit überträgt sich die Schließungsfigur der c_4 in eine solche der , die sich, wie folgt, formulieren läßt:

„Gegeben seien auf einer c_3 zwei feste, getrennte, als Zentra bezeichnete unkte u, u', sowie ein willkürlicher (vorerst von u und u' verschiedener) unkt u_{rs}. Man verbinde u_{rs} mit den beiden Zentra u, u' durch Gerade , g_s', die aus der c_3 die beiden Restpunkte u_{rt}, u_{ts} ausschneiden mögen. on neuem verbinde man u_{rt} mit u' durch eine Gerade g_t', und u_{ts} mit durch eine Gerade g_t; deren beide Restschnittpunkte seien u_{st} und u_{tr}. ndlich verbinde man wiederum u_{st} mit u, und u_{tr} mit u' durch zwei erade g_s und g_r'. Dann besteht der Schließungscharakter der Figur darin, aß sich, unabhängig von der Auswahl des Punktes u_{rs}, die beiden letzten eraden g_s und g_r' stets auf der Kurve, in einem mit u_{rs} zu bezeichnenden unkte, treffen müssen."

Aber auch der Grenzfall, wo der willkürliche Punkt u_{rs} auf der c_3 einen der beiden Zentralpunkte u, u', etwa den ersteren, rückt, erledigt ch sofort. Es gehen dann die beiden Geraden g_r, g_r' über in die Tangenten on u, u', während die beiden Geraden g_t und g_s' in die Verbindungslinie on u und u' fallen. Vgl. die Bestätigung in Abschnitt D, Nr. 16.

Wie sich in Abschnitt D zeigen wird, sind die beiden Zentralpunkte , u' auf der c_3 nicht unabhängig voneinander, sondern an eine gewisse agen-Beziehung geknüpft.

B. Rein-geometrische Zwischenbetrachtungen.

5. Die Figur der Nr. 4, soweit sie aus Punkten und Geraden besteht, ßt sich auch selbständig auf rein geometrischem Wege aufbauen, und e c_3 hinterher hinzufügen. Im übrigen sollen die Bezeichnungen der r. 4 festgehalten werden. Auch im folgenden kommen nur reelle Punkte nd Geraden der Ebene in Betracht.

Man gehe wieder von zwei getrennten Zentralpunkten u, u' aus, und ge durch jeden derselben drei getrennte Gerade $g_i, g_i'(i = r, s, t = 1, 2, 3)$, on denen keine in die Gerade (u, u') falle.

Die Geraden der beiden Tripel mögen einander zugeordnet sein; je vei zugeordnete Geraden tragen denselben Index. Der Schnittpunkt irgend

zweier nichtzugeordneter Geraden, etwa g_r und g'_s, sei mit u_{rs} bezeichnet; solcher Punkte gibt es also sechs.

Zugrunde wird der Satz gelegt, daß durch die acht Punkte u, u', u_{rs}.. ein Büschel B von c_3 geht, die sich noch in einem neunten Punkte treffen müssen. Letzterer, mit u'' bezeichnet, soll linear bestimmt werden.

Es kommt dreimal vor, daß sechs der acht Punkte auf einem Geradenpaare (einer ausgearteten c_2) liegen, z. B. (u_{tr}, u_{ts}, u), (u_{rt}, u_{st}, u') auf dem Paare g_t, g'_t. Die Verbindungsgerade g''_t der zwei noch übrigen Punkte u_{rs}, u_{sr} muß daher jeweils den gesuchten Punkt u'' enthalten, und es gilt:

Die drei Geraden g''_t (u_{rs}, u_{sr}) sind inzident, und ihr Inzidenzpunkt ist der neunte Grundpunkt u'' des c_3-Büschels B.

Der erste Teil des Satzes läßt sich auch direkt auffassen als eine Anwendung des Brianchonschen Satzes in bezug auf den ausgearteten Klassenkegelschnitt (u, u').

6. Man erkennt sofort, daß die drei Punkte u, u', u'' gleichberechtigt sind; man darf von irgend zweien derselben als Zentra von zwei Tripeln zugeordneter Geraden ausgehen, der dritte ergibt sich dann, wie oben, und bildet mit jenen ein Zentraldreieck $\triangle$.

Aber dieselbe Figur wird auch nach der nämlichen Regel erhalten, wenn man von einem der beiden zyklisch gebildeten Dreiecke $\triangle_1$ (u_{rs}, u_{st}, u_{tr}), $\triangle_2$ (u_{sr}, u_{rt}, u_{ts}) ausgeht. Es sind also in diesem Sinne auch die drei Zentral-Dreiecke $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ gleichberechtigt. Diese Ergebnisse werden in dem Satze zusammengefaßt:

Die Figur der Nr. 5 *zerlegt sich in drei gleichberechtigte Zentraldreiecke*

$$\triangle = (u, u', u''), \quad \triangle_1 = (u_{rs}, u_{st}, u_{tr}) \quad \triangle_2 = (u_{sr}, u_{rt}, u_{ts})$$

derart, daß je zwei derselben auf drei Weisen zueinander eckenperspektiv liegen, und die drei Perspektivitätszentra durch die Ecken des dritten Dreiecks gebildet werden. Ebenso gilt das Dualistische.

Man kann diesem Satze auch die folgende selbständige Fassung geben:

Liegen zwei eigentliche Dreiecke zweimal zueinander eckenperspektiv doch so, daß keine der Verbindungsgeraden doppelt vorkommt, so liegen sie auch auf eine dritte Art zueinander eckenperspektiv. Die drei Perspektivitätszentra bilden ein drittes Dreieck derart, daß alle drei Dreiecke gleichberechtigt sind.

Die Konstantenanzahl der Figur ergibt sich bei jeder Abzählung als dieselbe, gleich Zehn.

Hinterher läßt sich der Figur noch irgendeine eigentliche c_3 des Büschels B als „Grundkurve“ hinzufügen.

Die völlige Identität der so vervollständigten Figur mit der der Nr. 4 ird sich in Abschnitt D herausstellen.

NB. Ein elementarer Beweis der Sätze dieses Abschnitts scheint auf chwierigkeiten zu stoßen.

Hieran knüpfen sich folgende Bemerkungen:

Die durch u'' vervollständigte Linearfigur besteht aus neun Punkten nd neun Geraden; durch jeden der Punkte gehen drei Gerade, und auf der der Geraden liegen drei Punkte, so daß eine Kfg $(9_3, 9_3)$ entsteht.

Übt man ferner auf die Totalfigur eine quadratische involutorische unkttransformation T_2 aus, deren drei Fundamentalpunkte in die Ecken nes der drei Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ fallen, so geht die Grundkurve c_3 ieder in eine solche durch die drei Fundamentalpunkte über, aber auch ie Linearfigur in eine solche desselben Charakters.

Die drei Geradentripel (g), (g'), (g'') sind die einzigen zerfallenden urven des Büschels B.

C. Analytisch-geometrische Entwickelungen.

7. Die Sätze des vorigen Abschnittes mögen nunmehr analytisch-eometrisch verfolgt werden.

Indem wir den Sonderfall, daß die drei Zentra u, u', u'' inzident nd (vgl. hierüber den Abschnitt D, Nr. 21) ausschließen, wählen wir u nd u' als zwei Ecken eines Koordinatendreiecks (A_i, A_k, A_l), etwa $u = A_k$, $= A_l$, und behalten uns die Lage der dritten Ecke A_i vor.

Dann lassen sich die Gleichungen der beiden Geradentripel (u), (u') ıssetzen, wie folgt:

$$g_r \equiv \lambda_r x_i + x_l = 0, \quad g'_r \equiv \mu_r x_i + x_k = 0, \text{ usf.},$$

it je drei endlichen und von Null verschiedenen Parametern λ_i, $\mu_i (i = r,s,t)$.

Damit nehmen die Koordinaten x_i, x_k, x_l der beiden Treffpunkte $u_{rs} = (g_r, g'_s)$ und $u_{sr} = (g'_s, g_r)$ die Werte an:

$$\begin{cases} (u_{rs}) & (-1, \ \mu_s, \ \lambda_r), \\ (u_{sr}) & (-1, \ \mu_r, \ \lambda_s). \end{cases}$$

Unter Einführung der Abkürzungen:

$$p_r = \lambda_r \mu_r, \ p_{rs} = p_r - p_s; \quad \lambda_{rs} = \lambda_r - \lambda_s, \ \mu_{rs} = \mu_r - \mu_s, \text{ usf.}$$

gibt sich als Gleichung der Geraden $g''_i = (u_{rs}, u_{sr})$

$$g''_i \equiv x_i p_{rs} + x_k \lambda_{rs} + x_l \mu_{rs} = 0.$$

a $\sum g''_i \equiv 0$, so inzidieren in der Tat die drei Geraden g'' in einem unkte u''; die Berechnung von dessen Koordinaten erübrigt sich mit Rück-cht auf die in Nr. 9 getroffene Lagennormierung.

8. Damit ergeben sich die Gleichungen der drei, je in ein Geradentripel (g_t, g_t', g_t'') zerfallenden c_3 des Büschels B:

$$(5) \qquad c_3^{(t)} \equiv (x_i\lambda_t + x_l)(x_i\mu_t + x_k)(x_i p_{rs} + x_k\lambda_{rs} + x_l\mu_{rs}) = 0,$$

oder entwickelt:

$$(5) \quad c_3^{(t)} \equiv x_i^3 p_t p_{rs} + x_i^2 x_k(\lambda_t p_{rs} + p_t\lambda_{rs}) + x_i^2 x_l(\mu_t p_{rs} + p_t\mu_{rs}) + (x_k^2 x_l\lambda_{rs} + x_k x_l^2\mu_{rs}) + (x_i x_k^2\lambda_t\lambda_{rs} + x_i x_l^2\mu_t\mu_{rs}) + x_i x_k x_l(p_{rs} + \mu_t\lambda_{rs} + \lambda_t\mu_{rs}) = 0.$$

Da die drei Formen $c_3^{(t)}$ einem Büschel angehören, sind sie an eine lineare Identität gebunden, und umgekehrt. Macht man den Ansatz: $\sum\nu_t c_3^{(t)} \equiv 0$, so liefern die beiden Koeffizienten von $x_k^2 x_l$ und $x_k x_l^2$ für die ν_t die beiden Bedingungen: $\sum\nu_t\lambda_{rs} = 0$, $\sum\nu_t\mu_{rs} = 0$.

Versteht man unter D die Determinante $(\lambda_r, \mu_r, 1)$, wo D zunächst von Null verschieden sei, so ergibt die Auflösung jener beiden Bedingungen nach den ν_t: $\varrho\nu_t = D$, so daß man $\nu_r = \nu_s = \nu_t = 1$ setzen darf. Damit nimmt die fragliche Identität die einfache Gestalt an:

$$(6) \qquad \sum c_3^{(t)} \equiv 0.$$

Wie die Proben auf die weiteren Koeffizienten bestätigen, bleibt dies Ergebnis auch noch bestehen, falls D verschwindet; geometrisch bedeutet das letztere, daß die drei Treffpunkte zugeordneter Geraden g_r, g_r' inzident sind.

9. Das dritte Zentrum u'' soll nunmehr in die dritte Koordinatenecke A_t verlegt werden, so daß der Koeffizient von x_i^3 je in $c_3^{(t)}$ verschwinden muß (und umgekehrt). Damit erhalten die drei Produkte $p_r = \lambda_r\mu_r$ denselben, mit p zu bezeichnenden Wert, so daß:

$$(7) \qquad \mu_r = \frac{p}{\lambda_r}$$

wird. Infolgedessen reduzieren sich die Gleichungen (5) der $c_3^{(t)}$ auf:

$$(8) \quad c_3^{(t)} \equiv (x_i^2 x_k p\lambda_{rs} + x_i^2 x_l p\mu_{rs}) + (x_k^2 x_l\lambda_{rs} + x_k x_l^2\mu_{rs}) + (x_i x_k^2\lambda_t\lambda_{rs} + x_i x_l^2\mu_t\mu_{rs}) + x_i x_k x_l(\mu_t\lambda_{rs} + \lambda_t\mu_{rs}) = 0.$$

10. Wir bilden aus diesen drei Formen $c_3^{(t)}$ zunächst zwei gleichberechtigte partikuläre lineare Verbindungen, mit den Koeffizienten λ_t, μ

$$(9_\lambda) \qquad c_3^{(\lambda)} \equiv \sum\lambda_t c_3^{(t)}, \qquad (9_\mu) \quad c_3^{(\mu)} \equiv \sum\mu_t c_3^{(t)}.$$

Man erkennt sofort, daß im ersten Falle die Koeffizienten von $x_i^2 x_k$, $x_k^2 x_l$, $x_l^2 x_i$ verschwinden, und im zweiten Falle die von $x_k^2 x_i$, $x_l^2 x_k$, $x_i^2 x_l$; umgekehrt führt diese Forderung jeweils gerade zu den Verbindungen (9_λ) und (9_μ).

Stellt man nunmehr die Gleichungen der Tangenten t_i, t_k, t_l in den Zentren A_k, A_l, A_i, d. i. in u, u', u'' für die Kurven $c_3^{(\lambda)} = 0$ und $c_3^{(\mu)} = 0$ auf, so sieht man, daß jene Tangenten gerade in die Koordinatenseiten selbst fallen; im ersten Falle sukz. in $x_i = 0$, $x_k = 0$, $x_l = 0$, im zweiten Falle (in umgekehrter Folge) sukz. in $x_l = 0$, $x_i = 0$, $x_k = 0$. Wir sagen dann kurz, daß die drei Zentra ein „Tangentialdreieck" der Kurve bilden.

Es gilt daher, mit Rücksicht auf die Gleichberechtigung der drei Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, der Satz:

In dem c_3-Büschel B gibt es gerade drei Paare von partikulären Individuen, bei denen die drei Ecken eines der drei Dreiecke $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ ein Tangentialdreieck, im einen oder andern Sinne, bilden.

Über die Darstellung der beiden andern Paare siehe Nr. 13, 14.

11. Wir kehren zurück zu den drei Formen $c_3^{(t)}$ (5), resp. (8), und suchen aus ihnen eine möglichst einfache symmetrische lineare Verbindung herzustellen, die dann die Rolle der Grundform c_3 (Nr. 6) übernehmen soll.

Zuvor empfiehlt es sich indessen, aus den drei Formen $c_3^{(t)}$ die Größen μ auf Grund von (7) zu entfernen. Indem wir, unbeschadet der Allgemeinheit, der Konstanten p den Wert Eins beilegen, vereinfachen sich die Beziehungen (7) zu:

(10) $$\mu_r = \frac{1}{\lambda_r}, \text{ usf.}$$

Damit wird auch die Differenz $\mu_{rs} = \mu_r - \mu_s$ zu: $\mu_{rs} = \frac{\lambda_t \lambda_{rs}}{\lambda_r \lambda_s \lambda_t}$, oder auch, wenn das Produkt $\lambda_r \lambda_s \lambda_t$ kurz mit e_3 bezeichnet wird, zu:

(11) $$\mu_{rs} = -\frac{1}{e_3} \lambda_t \lambda_{rs}.$$

Trägt man dies in die drei Formen $c_3^{(t)}$ (8) ein und multipliziert die Nenner herauf, so nehmen die $c_3^{(t)}$ die modifizierte, aber wiederum mit $c_3^{(t)}$ bezeichnete Gestalt an:

(8′)
$$\begin{aligned} c_3^{(t)} &\equiv (x_i \lambda_t + x_l)(x_i + x_k \lambda_t)(x_k \lambda_r \lambda_s - x_l) \\ &\equiv (x_i^2 x_k e_3 + x_k^2 x_l e_3 - x_l^2 x_i) + \lambda_t (x_k^2 x_i e_3 - x_i^2 x_k - x_i^2 x_l) \\ &\qquad + x_i x_k x_l (\lambda_r \lambda_s - \lambda_t^2). \end{aligned}$$

Man führe hier die Abkürzungen ein:

(12)
$$\begin{cases} X = x_i^2 x_k e_3 + x_k^2 x_l e_3 - x_l^2 x_i, \\ Y = x_k^2 x_i e_3 - x_l^2 x_k - x_i^2 x_l, \\ \Lambda_t = \lambda_r \lambda_s - \lambda_t^2. \end{cases}$$

Dann schreiben sich die $c_3^{(t)}$ (8′) in der kanonischen Gestalt:

(8″) $$c_3^{(t)} \equiv X + \lambda_t Y + x_i x_k x_l \Lambda_t.$$

Ersichtlich ergeben sich hieraus die beiden partikulären Verbindungen mit Tangentialdreieck, indem entweder X oder Y herausfällt (s. Nr. 13).

Die lineare Identität zwischen den drei Formen $c_3^{(t)}$ (8″) erhält jetzt die modifizierte Gestalt:

$$(6') \qquad \sum \lambda_{rs} c_3^{(t)} \equiv 0.$$

Als einfachste symmetrische Verbindung c_3 der $c_3^{(t)}$ (die die obigen Partikulärverbindungen, sowie die drei Geradentripel des Büschels B ausschließt) nehme man jetzt deren Summe, die man noch mit 3 dividieren mag, so daß die Grundkurve c_3 dargestellt ist durch:

$$(13) \qquad c_3 \equiv X + \frac{1}{3} Y \sum \lambda_t + \frac{1}{3} x_i x_k x_l \sum \Lambda_t = 0.$$

Man führe noch die weiteren Abkürzungen ein:

$$(14) \qquad \begin{cases} e_1 = \lambda_r + \lambda_s + \lambda_t = 3\varepsilon_1, \quad e_2 = \lambda_r \lambda_s + \lambda_s \lambda_t + \lambda_t \lambda_r, \\ \eta_0 = e_2 - \frac{1}{3} e_1^2, \end{cases}$$

so daß die drei Größen e_1, e_2, e_3 die Koeffizienten der kubischen binären Form f mit den Wurzeln $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$, werden und η_0 das Leitglied der Hesseschen Kovariante H von f.

Berücksichtigt man noch, daß

$$\sum \Lambda_t = \frac{1}{3}(e_2 - \sum \lambda_t^2) = e_2 - \frac{1}{3} e_1^2 = \eta_0,$$

so nimmt (13) die durchsichtigere Gestalt an:

$$(13') \qquad c_3 \equiv X + \varepsilon_1 Y + \eta_0 x_i x_k x_l = 0.$$

Dies läßt sich auch bei unsymmetrischer Rechnung bestätigen. Man setze die Gleichung des Büschels B etwa aus $c_3^{(r)}$ und $c_3^{(s)}$ zusammen, so daß:

$$(14') \qquad B \equiv \frac{\sigma c_3^{(s)} - \varrho c_3^{(r)}}{\sigma - \varrho} = 0,$$

und bestimme den Parameter σ/ϱ von B so, daß der Koeffizient von Y den Wert $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{3}$ annimmt. Zu dem Behuf hat man nur zu setzen:

$$\sigma = \lambda_{st} - \lambda_{rs}, \qquad \varrho = \lambda_{rs} - \lambda_{tr},$$

so gelangt man wiederum zu (13′).

12. Man stelle jetzt die Gleichungen der Tangenten t_i, t_k, t_l in A_i, A_k, A_l, den Ecken des Dreiecks Δ an irgendeine Kurve des Büschels B mit dem Büschelparameter τ, auf:

$$15) \quad \begin{cases} t_i \equiv x_k - \tau \overset{\varepsilon_1}{\underset{e_3}{}} x_l = 0, \\ t_k \equiv x_l + \tau \varepsilon_1 x_i = 0, \\ t_l \equiv x_i + \tau \varepsilon_1 x_k = 0, \end{cases}$$

o folgt der

Satz. *In jedem der drei Zentralpunkte A_i, A_k, A_l bilden, für jede Kurve des Büschels B, die drei Geraden des zugehörigen g-Tripels mit der Tangente selbst das nämliche Doppelverhältnis δ.*

Entsprechendes gilt wiederum für die beiden Dreiecke Δ_1, Δ_2 [2]).

Dieses Doppelverhältnis δ hat, wenn man für den Augenblick λ_e für ε_1 schreibt, den Wert:

$$15') \quad \delta = (\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t, \lambda_e) = \frac{\lambda_{rs}\lambda_{te}}{\lambda_{rt}\lambda_{se}}.$$

Im besonderen ergibt sich für die Grundkurve c_3, mit $\tau = 1$, also $_e = \varepsilon_1 = \frac{e_1}{3}$:

$$15'') \quad \delta = \frac{\lambda_{rs}(\lambda_{st} - \lambda_{tr})}{\lambda_{tr}(\lambda_{st} - \lambda_{rs})}.$$

Hieran schließt sich folgende Bemerkung. Führt man in $c_3^{(t)}$ $(8')$ die drei Parameter $\nu_k^{(t)}, \nu_l^{(t)}, \nu_i^{(t)}$ ein, so daß entsteht:

$$8_a') \quad c_3^{(t)} \equiv (x_l + \nu_k^{(t)} x_i)(x_i + \nu_l^{(t)} x_k)(x_k + \nu_i^{(t)} x_l) = 0,$$

o zeigt die Vergleichung mit $(8')$, daß:

$$16) \quad \nu_k^{(t)} = \nu_l^{(t)} = \lambda_t, \qquad \nu_i^{(t)} = -\frac{1}{e_3}\lambda_t,$$

laß also die neuen Parameter alle dem bezüglichen λ-Werte proportional werden. Die Gleichheit von $\nu_k^{(t)}$ und $\nu_l^{(t)}$ entspricht der Tatsache, daß (vgl. Nr. 6) bei der c_4, also auch bei der c_3, die Parameter zweier zugeordneter Schließungstripel je einander gleich waren.

In Nr. 6 war die Konstantenanzahl der Linearfigur gleich Zehn bestimmt worden, die also auch die des Büschels B ist. Der willkürliche Parameter irgendeines eigentlichen Grundindividuums c_3 in B liefert für die Vollfigur eine elfte Konstante.

Andererseits war in der früheren Figur der Nr. 6 eine von neun Konstanten abhängige c_3 als beliebig gegeben gedacht und auf ihr zwei willkürliche Punkte u, u_{rs}, so daß man wiederum zu elf Konstanten gelangt.

---

[2]) Hieraus folgt sofort: Der Kegelschnitt durch irgend zwei Ecken eines der Dreiecke $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ und die drei Treffpunkte zugeordneter Geraden der beiden g-Tripel enthält auch den Treffpunkt T der beiden Tangenten. Durchläuft die c_3 das Büschel B, so durchläuft T den Kegelschnitt, wie es nach einem bekannten Satze sein muß.

Der zweite Zentralpunkt, u', muß daher vom ersten, u, abhängig sein, wie sich in Abschnitt D genauer zeigen wird.

13. Jedes Individuum in B geht durch die sechs Punkte u_{rs} usf. Dies mag noch eine Probe, etwa für u_{rs}, bestätigen. Der Punkt u_{rs} hat nach (2) und (10) die Koordinaten:

$$(2') \qquad u_{rs} = (-\lambda_s, 1, \lambda_r \lambda_s).$$

Bildet man daher die drei Ausdrücke X, Y, $x_i x_k x_l$ für den Punkt u_{rs}, so ergibt sich nach einfacher Zusammenziehung:

$$(12_a) \qquad \begin{cases} X(u_{rs}) = \lambda_s \cdot \lambda_r \lambda_s e_2, \; Y(u_{rs}) = -\lambda_s \cdot \lambda_r \lambda_s e_1, \\ x_i x_k x_l (u_{rs}) = -\lambda_s \cdot \lambda_r \lambda_s. \end{cases}$$

In der Tat wird dann für jedes Individuum c_3 in B:

$$c_3(u_{rs}) \equiv (3e_2 - e_1^2) - (3e_2 - e_1^2) \equiv 0.$$

Die beiden Partikulärlösungen der Nr. 10, die jetzt einfacher mit c', c'' bezeichnet seien, bestimme man als lineare Verbindungen von X resp. Y mit $x_i x_k x_l$ vermöge des Ansatzes (mit den Parametern ϱ, σ):

$$(17) \qquad \begin{cases} c' \equiv \varrho X + \eta_0 x_i x_k x_l = 0, \\ c'' \equiv \sigma Y + \eta_0 x_i x_k x_l = 0. \end{cases}$$

Da beide Kurven durch den Punkt $u_{rs}(2')$ gehen müssen, so hat man:

$$(18) \qquad \varrho e_2 = \eta_0, \quad \sigma e_1 = -\eta_0.$$

Damit geht der Faktor η_0 heraus, und es kommt:

$$(17') \qquad c' \equiv X + e_2 x_i x_k x_l = 0, \quad c'' \equiv Y - e_1 x_i x_k x_l = 0.$$

Nunmehr empfiehlt es sich, die Grundform c_3 (13′) linear aus c' und c'' zusammenzusetzen mittels zweier Parameter α, β:

$$(19) \qquad \begin{aligned} c_3 &\equiv \alpha c' + \beta c'' \equiv 3X + e_1 Y + \eta_0 x_i x_k x_l \\ &\equiv \alpha X + \beta Y + x_i x_k x_l (\alpha e_2 - \beta e_1^2). \end{aligned}$$

Die Vergleichung lehrt, daß:

$$(20) \qquad \alpha = 3, \quad \beta = e_1.$$

Damit lautet die gewünschte Darstellung von c_3:

$$(19') \qquad c_3 \equiv 3c' + e_1 c''.$$

14. Der Vollständigkeit halber sollen auch noch die beiden Paare von Partikulärlösungen im Büschel B, die den beiden Tangentialdreiecken $\Delta_1(u_{rs}, u_{st}, u_{tr})$ und $\Delta_2(u_{sr}, u_{ts}, u_{rt})$ entsprechen, explizite berechnet werden.

Man löse vorab die Aufgabe, für ein beliebiges Individuum in B, den Restschnittpunkt etwa der Geraden (u_{rs}, u_{st}) zu bestimmen. Man bezeichne mit $(y), (z)$ die Punkte u_{rs}, u_{st} und mit (x) einen beliebigen Punkt der Verbindungsgeraden. Gemäß $(2')$ hat man:

$$\begin{cases} y_i = -\lambda_s, \; y_k = 1, \; y_l = \lambda_r \lambda_s, \\ z_i = -\lambda_t, \; z_k = 1, \; z_l = \lambda_s \lambda_t. \end{cases}$$

Damit erhält der Punkt (x), für a und b als zwei homogene Parameter, die Koordinaten:

$$21) \qquad x_i = -(a\lambda_s + b\lambda_t), \quad x_k = a + b, \quad x_l = \lambda_s(a\lambda_r + b\lambda_t).$$

Man bilde zunächst die drei, in X auftretenden Potenzprodukte $x_i^2 x_k, x_k^2 x_l, x_l^2 x_i$. Da in der Schlußgleichung die Kuben von a und b doch herausfallen, so lasse man sie weg, wie auch den dann auftretenden Faktor ab.

Damit reduziert sich X auf den Ausdruck:

$$2') \qquad X = \lambda_s\{a \cdot 3e_1 e_3 + b\lambda_t(6e_3 + J)\},$$

wo unter $J = \sum \lambda_r^2 \lambda_s$ die zyklische Summe $\lambda_r^2\lambda_s + \lambda_s^2\lambda_t + \lambda_t^2\lambda_r$ zu verstehen ist.

Analog reduziert sich $-Y$ auf:

$$22_2) \qquad -Y = a(6e_3 + J) + b \cdot 3e_2\lambda_t,$$

und endlich $x_i x_k x_l$ auf:

$$22_3) \qquad x_i x_k x_l = ae_2 + be_1\lambda_t.$$

Diese drei Ausdrücke sind in die Gleichung eines beliebigen Individuums c von B einzutragen. Man setze c mittels zweier homogener Parameter γ, δ linear aus c' und c'' in $(17')$ zusammen, so daß die Gleichung von c wird:

$$23) \qquad c \equiv \gamma(X + e_2 x_i x_k x_l) + \delta(Y - e_1 x_i x_k x_l) = 0.$$

Damit wird die Bestimmungsgleichung für den Restschnittpunkt der Geraden (yz) mit der Kurve c:

$$24) \qquad a\{\gamma(3e_1e_3 - e_2^2) - \delta(6e_3 - e_1e_2 + J)\} + b\lambda_t\{\gamma(6e_3 - e_1e_2 + J) - \delta(3e_3 - e_1^2)\} = 0.$$

Ersichtlich bleibt diese Gleichung ungeändert (bis auf den unwesentlichen Faktor λ_t), wenn man das Paar (u_{rs}, u_{st}), zyklisch fortschreitend, ersetzt durch (u_{st}, u_{tr}) resp. (u_{tr}, u_{rs}).

Mithin ergeben sich die beiden Partikularlösungen in B bezüglich des Tangentialdreieckes $\triangle_1(u_{rs}, u_{st}, u_{tr})$, wenn man in (24) den Koeffizienten

von a resp. b gleich Null setzt. Diese beiden, mit d' und d'' zu bezeichnenden Lösungen sind also bestimmt durch die Werte γ_a, δ_a resp. γ_b, δ_b von γ, δ, in (23), wo:

$$\begin{cases} (25_a) & \gamma_a = 6e_3 - e_1e_2 + J, \quad \delta_a = 3e_1e_3 - e_2^2, \\ (25_b) & \gamma_b = 3e_2 - e_1^2, \quad \delta_b = 6e_3 - e_1e_2 + J. \end{cases}$$

Hier werde die Struktur der rechten Seiten noch weiter verfolgt.

Die Hessesche Kovariante H der obigen Form f mit den Wurzeln $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t$ besitzt die Koeffizienten:

$$(26) \qquad \eta_0 = 3e_2 - e_1^2, \quad \eta_1 = 9e_3 - e_1e_2, \quad \eta_2 = 3e_1e_3 - e_2^2.$$

Somit wird zunächst: $\delta_a = \eta_2$, $\gamma_b = \eta_0$. Um sodann den Zusammenhang des Ausdrucks $\gamma_a = \delta_b = 6e_3 - e_1e_2 + J$ mit η_1 einzusehen, werde der Ausdruck $J = \Sigma \lambda_r^2 \lambda_s$ geeignet umgeformt. Zu dem Behuf führe man neben J die „konjugierte" Bildung $\bar{J} = \Sigma \lambda_s^2 \lambda_r$ ein. Dann liefert Addition und Subtraktion:

$$(27) \qquad \begin{cases} J + \bar{J} = \Sigma \lambda_r \lambda_s (\lambda_r + \lambda_s) = e_1e_2 - 3e_3, \\ J - \bar{J} = \Sigma \lambda_r \lambda_s \lambda_{rs} = (\lambda_r \lambda_s, \lambda_t, 1) = \triangle, \end{cases}^{3})$$

und umgekehrt:

$$(27') \qquad 2J = e_1e_2 - e_3 + \triangle, \quad 2\bar{J} = e_1e_2 - e_3 - \triangle.$$

Damit erhält man:

$$(28) \qquad \gamma_a = \delta_b = 6e_3 - e_1e_2 + J = \frac{\eta_1 + \triangle}{2} = \eta_1',$$

und die Beziehungen (25_a), (25_b) nehmen die einfache Gestalt an:

$$(25_a') \qquad \gamma_a = \eta_1', \quad \delta_a = \eta_2,$$

$$(25_b') \qquad \gamma_b = \eta_0, \quad \delta_b = \eta_1'.$$

Trägt man diese Werte in (23) ein, so sind die beiden gesuchten Partikularlösungen d', d'' in B:

$$\begin{cases} (29_a') & d' \equiv \eta_1'(X + e_2 x_i x_k x_l) + \eta_2(Y - e_1 x_i x_k x_l) = 0, \\ (29_b') & d'' \equiv \eta_0(X + e_2 x_i x_k x_l) + \eta_1'(Y - e_1 x_i x_k x_l) = 0. \end{cases}$$

Diesen beiden Darstellungen lassen sich sofort die beiden, auf da dritte Dreieck $\triangle_2(u_{sr}, u_{rt}, u_{ts})$ als Tangentialdreieck bezüglichen Partikularlösungen e', e'' zur Seite stellen. Denn die neuen Werte von γ und δ unterscheiden sich von den obigen nur durch Vertauschung von J mit

---

[1]) Die Determinante $\Delta = (\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t, 1)$ formt sich sofort um in das Differenzenprodukt $\lambda_{rs}\lambda_{rt}\lambda_{st}$, so daß $\triangle^2$ zur Diskriminante $D = 4\eta_0\eta_2 - \eta_1^2$ von f (oder auch H) wird

, d. i. von $\triangle$ mit $-\triangle$. Setzt man noch $\overline{\eta}_1' = \frac{\eta_1 - \triangle}{2}$, so kommt:

$$(30_a') \qquad e' \equiv \overline{\eta}_1'(X + e_2 x_i x_k x_l) + \eta_2(Y - e_1 x_i x_k x_l) = 0,$$

$$(30_b') \qquad e'' \equiv \eta_0(X + e_2 x_i x_k x_l) + \eta_1'(Y - e_1 x_i x_k x_l) = 0.$$

Bildet man vermöge (29) und (30) die Summen $d' + e'$, $d'' + e''$,) fällt $\triangle$ heraus, und $\eta_1' + \eta_1'$ geht in η_1 über.

D. Transzendente Darstellungen.

15. Anknüpfend an Abschnitt B führen wir zur Darstellung der unkte einer elliptischen c_3 transzendente Hilfsmittel ein. Man denke ch[4]) auf der c_3 ein elliptisches Normalintegral erster Gattung u als arameter (Argument) ausgebreitet. Versteht man unter ω die reelle eriode, unter ω' die rein imaginäre, so entspricht jedem reellen Punkte des npaaren Zuges ein reelles Argument $u = r$, und umgekehrt, dagegen jedem eellen Punkte des Ovales (falls ein solches vorhanden) ein Argument von er Form $r + \frac{\omega'}{2}$, und umgekehrt, beidemal bis auf ganzzahlige Viel- ache der Perioden. Der letztere Zusatz werde im folgenden, wo kein Miß- erständnis zu befürchten ist, unterdrückt.

Für drei inzidente Kurvenpunkte u_1, u_2, u_3 gilt die Abelsche Schnitt- unktkongruenz:

$$(31) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv c,$$

o c eine reelle Konstante[5]) bedeutet, und die Kongruenz eben Gleichheit is auf Vielfache der Perioden.

Allgemeiner gilt für die $3n$ Schnittpunkte $u_1, u_2, \ldots, u_{3n}$ der c_3 mit ner Kurve n-ter Ordnung c_n das Kriterium:

$$(31') \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv nc.$$

16. Die Figur der Nr. 6 findet nunmehr, wenn die dortigen Punkt- ezeichnungen u, u', u_{rs}, ... jetzt zugleich die zugehörigen elliptischen rgumente angeben, ihre Charakterisierung durch die sechs folgenden Kon- ruenzen:

---

[4]) Vgl. z. B. A. Harnack, Math. Ann. 9 (1875), S. 1. Die Koordinaten eines Kurven- unktes u lassen sich normieren als die drei Jacobischen elliptischen Funktionen u, cu, du. Die Formeln des Textes lassen sich daher vermöge des Additionstheorems ch als solche zwischen elliptischen Funktionen schreiben, wodurch sie aber an Ein- chheit nicht gewinnen.

[5]) Dieser Konstanten c kann, unbeschadet der Allgemeinheit, auch der Wert Null igelegt werden. Jedoch tritt die Struktur der Formeln bei beliebigem c deutlicher rvor.

$$\left\{\begin{array}{ll} (32_r) & u+u_{rs}+u_{rt}\equiv c, \\ (32_s) & u+u_{sr}+u_{st}\equiv c, \\ (32_t) & u+u_{tr}+u_{ts}\equiv c, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} (32'_r) & u'+u_{sr}+u_{tr}\equiv c, \\ (32'_s) & u'+u_{ts}+u_{rs}\equiv c, \\ (32'_t) & u'+u_{rt}+u_{st}\equiv c. \end{array}\right.$$

Der Schließungscharakter dieses Systems zeigt sich, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, darin, daß es bei beliebig vorgegebenen u, u' für die sechs Argumente $u_{rs}, \ldots$ keine eigentliche Lösung zuläßt. Existiert aber *eine* solche, wozu das Erfülltsein einer Bedingung (34) zwischen u und u' notwendig und hinreichend ist, so gibt es auch ∞^1 Lösungen; denkt man sich etwa u_{rs} willkürlich gewählt, so sind bei gegebenem u und nach geeigneter Wahl von u' die fünf Restargumente nach der Regel der Nr. 6 eindeutig bestimmt.

Man hat dann noch zwei Werte für u'; gibt man u' irgendeinen derselben, so fällt der andere gerade mit dem neunten Grundpunkte u'' zusammen.

NB. Auch der in Nr. 6 erörterte Grenzfall, wo u_{rs} auf der c_3 in u oder u' rückt, läßt sich am System (32) sofort bestätigen. Das Entsprechende gilt, wenn u_{rs} in u'' rückt.

Man denke sich zunächst u, u', u_{rs} als gegeben und drücke durch sie vermöge (32) der Reihe nach die fünf übrigen Argumente aus; man muß dann schließlich auf eine Beziehung zwischen u, u', u_{rs} stoßen.

Mittels (32_r) und $(32'_s)$ bestimme man zuerst u_{rt} und u_{ts}:

$$(33_r) \qquad u_{rt}\equiv c-u-u_{rs}, \qquad\qquad (33'_s) \qquad u_{ts}\equiv c-u'-u_{rs}.$$

Nach Einsetzung dieser Werte in (32_t) und $(32'_t)$ berechne man weiter u_{tr} und u_{st}:

$$\left\{\begin{array}{ll} (33_t) & u_{tr}\equiv c-u-u_{ts}\equiv (u'-u)+u_{rs}, \\ (33'_t) & u_{st}\equiv c-u'-u_{rt}\equiv (u-u')+u_{rs}. \end{array}\right.$$

Diese Werte setze man endlich in (32_s) und $(32'_r)$ ein, so ergibt sich für u_{sr} die doppelte Darstellung

$$\left\{\begin{array}{ll} (33_s) & u_{sr}\equiv c-u-u_{st}\equiv (c-u_{rs})+(u'-2u), \\ (33'_r) & u_{sr}\equiv c-u'-u_{tr}\equiv (c-u_{rs})+(u-2u'). \end{array}\right.$$

Die Vergleichung liefert, indem u_{rs} ganz herausfällt, zwischen u und u' die Beziehung: $u'-2u\equiv u-2u'$ oder auch:

$$(34) \qquad 3u'\equiv 3u.$$

Diese Kongruenz hat für u' nur die drei (punktreellen) Lösungen:

$$u'\equiv u, \qquad u'\equiv u+\frac{\omega}{3}, \qquad u'\equiv u-\frac{\omega}{3}.$$

on diesen kommt die erste als uneigentliche, da die Punkte u und u' etrennt sein sollten, nicht in Betracht. Es bleiben also, bei gegebenem u, ir u' nur zwei verschiedene Werte, die mit u' und u'' bezeichnet seien:

35) $$u' \equiv u + \frac{\omega}{3}, \qquad u'' \equiv u - \frac{\omega}{3}.$$

Diese beiden Punkte u' und u'' sind mit Hilfe der drei reellen Wendeunkte w_1, w_2, w_3 der c_3 leicht linear[6]) konstruierbar. Gemäß (31) betzen die w die Werte:

36) $$w_1 \equiv \frac{c}{3}, \qquad w_2 \equiv \frac{c}{3} - \frac{\omega}{3}, \qquad w_3 \equiv \frac{c}{3} + \frac{\omega}{3}.$$

ür i, k, l als drei Indizes in zyklischer Folge, und $w_{ik} = -w_{ki} = w_i - w_k = \frac{\omega}{3} = w_{kl} = w_{li}$, greife man aus den drei w etwa in positiver Folge w_i und w_k heraus, bestimme den Restpunkt r_i der Geraden (u, w_i) und ann den Restpunkt v_{ik} der Geraden (r_i, w_k). Aus den beiden Bedingungen:

$$u + w_i + r_i \equiv c \equiv v_{ik} + w_k + r_i$$

olgen sofort für v_{ik} und v_{ki} die Werte

37) $$\begin{cases} v_{ik} \equiv u + w_{ik} \equiv u + \frac{\omega}{3} = u', \\ v_{ki} \equiv u + w_{ki} \equiv u - \frac{\omega}{3} = u'', \end{cases}$$

omit die gewünschte Konstruktion von u' und u'' erledigt ist. Man eachte noch, daß man zu der Kongruenz (34) direkt gelangt, wenn man ie Summen der linker- resp. rechterhand von (32) stehenden Kongruenzen ildet und dann voneinander abzieht. Die Kongruenz (34) stellt somit ie eine, zwischen den Kongruenzen (32) bestehende lineare Syzygie dar. ieraus geht der algebraische Grund des Schließungscharakters unmittelbar ervor. Zugleich gibt (34) Jacobi's Multiplikation von u mit dem Faktor 3 an.

17. Weiter zeigt eine leichte Rechnung auf Grund von (33), daß:

38) $$u_{rs} + u_{sr} + u'' \equiv u_{st} + u_{tr} + u'' \equiv u_{st} + u_{ts} + u'' \equiv c.$$

erner ergibt sich noch:

39) $$u + u' + u'' + u_{rs} + \ldots \equiv 3c.$$

us (38) und (39) folgen unmittelbar die beiden grundlegenden Sätze er Nr. 6:

[6]) Genauer wäre zu sagen „elliptisch-linear", da auch die Grundkurve c_3 als geben zu denken ist. Vgl. meine Abhandlung, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 744.

Die drei Geraden (u_{rs}, u_{sr}), (u_{rt}, u_{tr}), (u_{st}, u_{ts}) *sind inzident, und ihr Inzidenzpunkt ist* u''.

Die neun Punkte u, u', u'', u_{rs}, ... *sind die Grundpunkte eines* c_3*-Büschels.*

Überdies ergibt sich, daß u' und u'' gerade die beiden gleichberechtigten, unter (35) angegebenen Punkte sind. Somit erfährt Nr. 6 die wesentliche Ergänzung:

Auf einer vorgegebenen elliptischen c_3 *stehen die beiden Zentralpunkte* u *und* u' *in Abhängigkeit voneinander; bei beliebig gegebenem* u *ist* u' *vermöge* (35) *zweideutig bestimmt: wählt man für* u' *irgendeinen der beiden Punkte, so ist der andere der dritte Zentralpunkt* u''.

Im übrigen gelten die weiteren, in Nr. 6 gezogenen Folgerungen; insbesondere spiegeln die Kongruenzen (33) die dortige, von der Auswahl von u_{rs} unabhängige Schließungseigenschaft der Figur wieder.

18. Es mag noch die Zerlegung der Linearfigur in die drei gleichberechtigten, zu je zweien dreifach perspektiven Zentraldreiecke $\triangle(u, u', u'')$, $\triangle_1(u_{rs}, u_{st}, u_{tr})$, $\triangle_2(u_{sr}, u_{rt}, u_{ts})$ explizite mittels der elliptischen Argumente charakterisiert werden. Zu dem Behuf hat man nur die drei Tripel entsprechender Kongruenzen in einer Tabelle zu vereinigen:

$$(40)\qquad \begin{cases} u_{rs}+u_{rt}+u \equiv u_{sr}+u_{st}+u \equiv u_{tr}+u_{ts}+u \equiv c, \\ u_{sr}+u_{tr}+u' \equiv u_{rs}+u_{ts}+u' \equiv u_{rt}+u_{st}+u' \equiv c, \\ u_{st}+u_{ts}+u'' \equiv u_{rt}+u_{tr}+u'' \equiv u_{rs}+u_{sr}+u'' \equiv c. \end{cases}$$

Hieraus liest man noch, in Übereinstimmung mit der Konstruktion in Nr. 4, bei jeweils vorgegebenen Punkten u und u_{rs} die Verteilung der drei Dreiecke auf die beiden Züge der c_3 ab. Liegt u und damit $\triangle$ auf dem unpaaren Zuge, so gehören $\triangle_1$ und $\triangle_2$ demselben Zuge oder aber dem Ovale an, je nachdem dies mit u_{rs} der Fall ist. Liegt aber u und damit $\triangle$ auf dem Ovale, so liegt $\triangle_1$ auf dem unpaaren Zuge und $\triangle_2$ auf dem Ovale, oder aber umgekehrt, je nachdem u_{rs} dem unpaaren Zuge oder aber dem Ovale angehört. Ist kein Oval vorhanden, so kommt natürlich nur der erste Fall in Betracht.

Die Gleichberechtigung der drei Zentraldreiecke $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ erhellt am einfachsten aus der Regel: Greift man von den drei Argumenten der Dreiecke irgendeines heraus, und vermehrt es um $\frac{\omega}{3}$ resp. $-\frac{\omega}{3}$, so ergeben sich die beiden andern,

19. Nunmehr gelangen wir auch zur transzendenten Behandlung der drei in Abschnitt C (Nr. 10, 13, 14) betrachteten Paare von Partikulärkurven des c_3-Büschels B, die den drei Tangentialdreiecken $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ entsprachen.

Bei beliebig vorgegebener (eigentlicher) c_3 frage man nach solchen Stellen u, so daß die Tangente in u durch den Punkt $u' \equiv u + \frac{\omega}{3}$ resp. $u'' \equiv u - \frac{\omega}{3}$ geht.

Bei Behandlung etwa des ersteren Falles vereinigen sich die beiden Bedingungen:

$$2u + u' \equiv c, \qquad u' \equiv u + \frac{\omega}{3}$$

zu der Kongruenz für u:

(41) $$3u \equiv c - \frac{\omega}{3}.$$

Diese läßt die drei (punktreellen) Lösungen u_1, u_2, u_3 zu:

(42) $$\begin{cases} u_1 \equiv \frac{c}{3} - \frac{\omega}{9} & \equiv w_1 - \frac{\omega}{9}, \\ u_2 \equiv \left(\frac{c}{3} + \frac{\omega}{3}\right) - \frac{\omega}{9} \equiv w_2 - \frac{\omega}{9}, \\ u_3 \equiv \left(\frac{c}{3} - \frac{\omega}{3}\right) - \frac{\omega}{9} \equiv w_3 - \frac{\omega}{9}. \end{cases}$$

Ersetzt man hier u' durch u'', wodurch die u_1, u_2, u_3 in u_1^*, u_2^*, u_3^* übergehen mögen, so kommt analog:

(42*) $$u_1^* \equiv w_1 + \frac{\omega}{9}, \; u_2^* \equiv w_2 + \frac{\omega}{9}, \; u_3^* \equiv w_3 + \frac{\omega}{9}.$$

Die drei Worte (42), resp. (42*) folgen nach derselben zyklischen Regel aufeinander, wie früher u, u', u''[7]).

Wählt man etwa im ersteren Falle (42), irgendeinen der drei Punkte $u_1 \equiv u, u_2 \equiv u', u_3 \equiv u''$ als Ausgangszentrum, z. B. u, so geht die Tangente in u durch u', die in u' durch u'', und die in u'' durch u.

Im zweiten Falle, (42*), ist nur die zyklische Folge die entgegengesetzte. Somit gilt:

Auf einer beliebig vorgegebenen (eigentlichen) c_3 existieren gerade zwei besondere, durch (42) resp. (42) charakterisierte Zentraldreiecke u, u', u''), die zugleich in positivem resp. negativem Sinne Tangentialdreiecke sind.*

Man beachte, wie hier die Unterscheidung zwischen den drei Dreiecken $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ in Wegfall kommt.

---

[7]) Da sich die Kongruenz $3u \equiv c \mp \frac{\omega}{3}$ auch in die Form setzen läßt:

$$3u + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} \pm \frac{\omega}{3} \equiv 2c,$$

so erkennt man, daß die Punkte (42), resp. (42*) gerade die sind, wo je ein Kegelschnitt die Grundkurve oskuliert, und sie überdies in einem (reellen) Wendepunkt berührt und in einem zweiten schneidet.

Die nämlichen Formeln (42), (42*) lassen indessen noch eine zweite, in Abschnitt C (Nr. 13, 14) durchgeführte Auffassung zu.

Danach existieren innerhalb des c_3-Büschels B, entsprechend den drei Zentraldreiecken $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$, drei Paare von partikulären Kurven, so daß jeweils eines der drei Dreiecke im einen oder andern Sinne ein Tangentialdreieck ist.

20. An den Begriff des Tangentenrestpunktes knüpft sich noch eine weitere Eigenschaft der Schließungsfigur (Nr. 6), die von ganz anderem Charakter ist.

Man lege in jedem der neun Grundpunkte die Tangente, und ermittele je den Restpunkt, der das bezügliche Zeichen v trage. Was für eine Figur bilden diese neun Restpunkte?

Zunächst erhält man für die neun v-Argumente, entsprechend den drei Dreiecken $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ die drei Tripel von Kongruenzen:

$$\left\{\begin{array}{ll} (43) & \left\{\begin{array}{l} v \equiv c - 2u, \\ v' \equiv c - 2u' \equiv c - 2\left(u + \frac{\omega}{3}\right) \equiv v + \frac{\omega}{3}, \\ v'' \equiv c - 2u'' \equiv c - 2\left(u - \frac{\omega}{3}\right) \equiv v - \frac{\omega}{3}; \end{array}\right. \\ (43_1) & v_{rs} \equiv c - 2u_{rs},\ v_{st} \equiv v_{rs} + \frac{\omega}{3},\ v_{tr} \equiv v_{rs} - \frac{\omega}{3}; \\ (43_2) & v_{rt} \equiv c - 2u_{rt},\ v_{ts} \equiv v_{rt} + \frac{\omega}{3},\ v_{sr} \equiv v_{rt} - \frac{\omega}{3} \end{array}\right.$$

Hieraus liest man folgendes ab.

Das Tripel (43) zeigt, daß die drei Punkte v, v', v'' ein Dreieck $\triangle_v$ von demselben Zentralcharakter wie $\triangle$ bilden. Aber auch das zweite und dritte Tripel führen, je für sich betrachtet, zu solchen Zentraldreiecken; es fragt sich nur noch, ob diese zum ersten, $\triangle_v$, in derselben Beziehung stehen, wie $\triangle_1$ und $\triangle_2$ zu $\triangle$?

Beim zweiten Tripel, (43_1), ist das ersichtlich der Fall, denn die Ausgangsecke v_{rs} ist gerade so willkürlich, wie es u_{rs} in $\triangle_1$ war.

Beim dritten Tripel, (43_2), erhebt sich nunmehr die Frage, ob die Ausgangsecke v_{rt} zu v und v_{rs} in derselben Beziehung steht, wie u_{rt} zu u und u_{rs}?

Zwischen u_{rt}, u, u_{rs} bestand die Beziehung:

$$33_{rt}) \qquad u_{rt} \equiv (c - u) - u_{rs}.$$

Setzt man diesen Wert von u_{rt} in die erste Kongruenz des dritten Tripels ein, so kommt:

$$(44) \qquad v_{rt} \equiv c - 2\{(c - u) - u_{rs}\} \equiv (-c + 2u) + 2u_{rs}.$$

Hier führe man rechts $v \equiv c - 2u$ und $v_{r_s} \equiv c - 2u_{r_s}$ ein, so geht (44) der Tat in die gewünschte Gestalt über:

$$v_{r_t} \equiv \{c - (c - 2u)\} - (c - 2u_{r_s}) \equiv (c - v) - v_{r_s}. \tag{44'}$$

amit ist die aufgeworfene Frage zu bejahen, und es gilt der Satz:

Legt man in der Schließungsfigur der Nr. 6 in jedem der neun rundpunkte die Tangente an die Grundkurve und bestimmt deren Restunkt, so gehen aus den drei Zentraldreiecken $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ drei neue Dreike von genau demselben Charakter hervor.

Offenbar läßt sich dieser Prozeß beliebig oft wiederholen [8]).

Überdies geht vermöge (32) noch der Satz hervor:

Der Restpunkt der Tangente an irgendeine Ecke eines der drei Zentralreiecke fällt mit dem Restpunkte der jeweiligen Gegenseite zusammen.

21. Endlich läßt sich jetzt auch der in Abschnitt C ausgeschlossene onderfall diskutieren, wo drei Zentralpunkte, z. B. u, u', u'', inzident erden.

Wiederum gehen wir von einer eigentlichen c_3 aus und fragen nach lchen ausgezeichneten Stellen u, für die

$$u + u' + u'' \equiv c \tag{45}$$

ird. Die Einsetzung von $u' \equiv u + \frac{\omega}{3}$, $u'' \equiv u - \frac{\omega}{3}$ liefert für u die ongruenz

$$3u \equiv c, \tag{45'}$$

eren (reelle) Lösungen die drei (reellen) Wendepunkte w_1, w_2, w_3 sind, e somit die drei gesuchten inzidenten Zentralpunkte sind. Es gilt also r Satz:

Der Sonderfall, wo irgendeines der drei Dreiecke $\triangle, \triangle_1, \triangle_2$ ein eigentliches ist, so daß seine drei Ecken inzident sind, tritt dann und ur dann ein, wenn irgendeine Ecke eines der Dreiecke in einen (reellen) endepunkt der c_3 fällt, und damit zugleich die beiden weiteren Ecken in e beiden weiteren Wendepunkte.

Auch hier verfolgen wir daneben die zweite Auffassung und suchen ch einer solchen Partikulärkurve des c_3-Büschels B, für die irgendeiner r neun Grundpunkte, etwa u, ein Wendepunkt wird.

---

[8]) Setzt man $v_1 \equiv v \equiv c - 2u$, $v_2 \equiv c - 2v_1$ usf., so ergibt sich explizite:

$$v_n \equiv (-1)^n \left\{ 2^n \left(u - \frac{c}{3} \right) \pm \frac{c}{3} \right\},$$

das positive oder negative Vorzeichen gilt, je nachdem n, durch 3 geteilt, den st 0 resp. 2, oder aber 1 läßt.

Zu dem Behuf gehe man vorab von einer einzelnen eigentlichen $c_3 = c$ eines Büschels aus, für die die Koordinatenecke $A_i(x_k = 0, x_l = 0)$ einer der neun Grundpunkte sei. Die Gleichung einer solchen c ist von der Gestalt:

$$(46) \qquad c \equiv x_i^2 (x_k a_l - x_l a_k) + x_i f_2(x_k, x_l) + f_3(x_k, x_l) = 0,$$

wo f_2 resp. f_3 eine binäre Form zweiten resp. dritten Grades in den x_k, x bedeutet.

Man bestimme zunächst den Restpunkt der Tangente t_i in A_i. Da deren Gleichung lautet: $x_k a_l - x_l a_k = 0$, so hat ein laufender Punkt von t_i die Koordinaten:

$$(47) \qquad t_i) \quad x_i = \lambda, \quad x_k = \varrho a_k, \quad x_l = \varrho a_l,$$

unter λ, ϱ zwei homogene Parameter verstanden. Für den gesuchten Restpunkt von t_i ergibt sich daher durch Einsetzung von (47) in (46) die lineare Bestimmungsgleichung:

$$(48) \qquad \lambda f_2(a_k, a_l) + \varrho f_3(a_k, a_l) = 0.$$

Dieser Restpunkt fällt dann und nur dann in A_i, d. h. A_i wird ein Wendepunkt von c, wenn:

$$(49) \qquad f_2(a_k, a_l) = 0.$$

Nunmehr denke man sich, daß c das c_3-Büschel durchläuft, so daß die Koeffizienten in c, insbesondere also a_k, a_l und die Koeffizienten von $f_2(x_k, x_l)$ einen Parameter τ linear mit sich führen. Dann geht (49) über in eine kubische Gleichung in τ:

$$(50) \qquad \varphi_3(\tau) = 0.$$

Dies liefert den Hilfssatz:

In einem beliebigen c_3-Büschel existieren je drei partikuläre Kurven von denen mindestens eine reell ist, derart, daß irgendein festgehaltener reeller Grundpunkt des Büschels ein Wendepunkt wird.

Die Anwendung auf das c_3-Büschel B der Nr. 6 beantwortet dahe die oben aufgeworfene Frage durch folgenden Satz:

Entsprechend den drei Dreiecken $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ gibt es im c_3-Büschel B je drei partikuläre Kurven, von denen immer mindestens eine reell ist derart, daß die Ecken eines solchen Dreiecks inzident werden und dami zugleich in die drei (reellen) Wendepunkte fallen, oder auch umgekehrt

(Eingegangen am 12. Januar 1928.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. VI.

Abbildbarkeit von Raumkurvensystemen auf Parallelenbündel.

Von

Karl Mayrhofer in Tübingen.

Unter einer *Flächenschar*[1]) sei das topologische Bild eines Büschels paralleler Ebenen innerhalb eines Raumgebietes gemeint. Drei Flächenscharen bilden ein *Flächennetz*[1]), falls sie sich zugleich auf drei Büschel paralleler Ebenen abbilden lassen. *Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß jede Fläche einer der drei Scharen von den beiden anderen Scharen in einem Kurvennetze*[2]) *geschnitten wird*; es bilden dann die drei Flächenscharen bereits ein räumliches Koordinatensystem.

Transformiert man ein Raumgebiet, das von einem Parallelenbündel ausgefüllt ist, topologisch, so heiße das Bild des Bündels eine *Raumkurvenschar*[3]). Liegen im Gebiete n Raumkurvenscharen, so daß sich je zwei Kurven aus verschiedenen Scharen höchstens einmal treffen, so spreche ich von einem (*n-fachen*) *Raumkurvensystem*; ein solches heiße für $n = 3$ ein *Raumkurvennetz*, für $n = 4$ ein *Raumkurvengewebe* und für $n = 5$ ein *Raumkurvengeflecht*. Falls der Zusammenhang eine Verwechslung ausschließt, werde ich diese Ausdrücke auf *Schar*, *Netz* usw. abkürzen.

Die Strahlen aus zwei Parallelenbündel lassen sich nach Parallelennetzen in den Ebenen eines Büschels paralleler Ebenen anordnen. Die Lage von n Parallelenbündeln heiße *allgemein*, wenn man so zu $\binom{n}{2}$ verschiedenen Büscheln paralleler Ebenen gelangt.

---

[1]) Vgl. W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. II., Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 158.

[2]) Betreffs der Bezeichnungen bei Kurvensystemen auf einer Fläche vgl. etwa die Einleitung meiner Mitteilung: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. III., Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 728–752, die ich mit III zitieren werde.

[3]) Den Ausdruck *Kurvenkongruenz* will ich nicht benutzen, da mir bereits die Bezeichnung Strahlenkongruenz wenig angebracht erscheint [vgl. Enzyklopädie III, C 2, Zindler, S. 990, Fußnote [79])].

Ein Raumkurvennetz heiße ein *Koordinatennetz*, wenn es das topologische Bild von drei allgemein liegenden Parallelenbündeln ist. *Ein Raumkurvennetz ist dann und nur dann ein Koordinatennetz, wenn man die Kurven aus je zwei seiner Scharen nach Netzen in den Flächen einer Flächenschar anordnen kann und die so entstandenen Flächenscharen ein Flächennetz bilden.* Die eben genannten Flächen im Koordinatennetz sollen *Netzflächen* heißen. Zwei hinreichend benachbarte Punkte P, Q, die nicht auf derselben Netzfläche liegen, bestimmen eindeutig einen *Netzquader* (PQ), der diese Punkte als Gegenecken hat. Analog zum Ausdrucke Netzfläche wird später die Bezeichnung *Gewebefläche* auftreten.

Inhaltsübersicht.

In § 1 werden die Raumkurvengewebe gekennzeichnet, welche sich auf vier allgemein liegende Parallelenbündel topologisch abbilden lassen. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die Gewebenetze Koordinatennetze sind (Satz 1). Der Beweis beruht auf der Möglichkeit, „krummlinige Dodekaeder“ (vgl. Fig. 2) konstruieren zu können, mit denen sich eine „Raumwabe“ bilden läßt, die man eindeutig durch eine feinmaschigere unterteilen kann. Ein derartiges Gewebe heiße „Dodekaedergewebe“.

Satz 1 bildet die Grundlage für die Untersuchungen in § 2, worin die Frage nach der Abbildbarkeit von n-fachen Raumkurvensystemen auf n Parallelenbündel, von denen wenigstens vier allgemein liegen, durch die Sätze 2 und 4 erledigt wird. Satz 2 besagt, daß ein Raumkurvengeflecht dann und nur dann auf fünf Parallelenbündel, von denen wenigstens vier allgemein liegen, abbildbar ist, wenn zwei seiner Gewebe Dodekaedergewebe sind und wenn je zwei hinreichend kleine, konzentrische Dodekaeder dieser Gewebe auf einer den Geweben gemeinsamen Kurve entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben; Satz 4 bringt die Verallgemeinerung auf n-fache Systeme. Aus dem Beweisgange von Satz 2 erkennt man, daß eine topologische Abbildung, welche vier allgemein liegende Parallelenbündel in solche überführt, affin ist (Satz 3).

§ 1.

Raumkurvengewebe.

Sind S_1, S_2, S_3, S_4 vier allgemein liegende Parallelenbündel, so herrscht in ihnen die *„Konfiguration der perspektiven Quader“* (Fig. 1). Man wähle die Punkte O, A so, daß sie nicht in derselben Netzebene aus $(S_1 S_2 S_3$ liegen und zieht den Netzquader (OA), dessen Kanten den Bündeln S_1, S_2, S_3 entnommen sind. Legt man nun durch die Ecken von (OA) die Gerade

us S_4 und wählt man auf der Geraden durch A den Punkt O', so ist er zu (OA) „perspektive Quader" $(O'A')$, dessen Kanten wieder zu $S_1 S_2 S_3$) gehören, festgelegt. Wenn auch der Gang der Konstruktion bezüglich der einzelnen Bündel unsymmetrisch ist, so sind doch an der entstandenen Figur alle Bündel gleichbeteiligt, falls nur A, O' hinreichend allgemein gewählt sind: die Figur enthält die vier möglichen perspektiven Quaderpaare in allgemeiner Lage.

Durch geeignete Wahl von A, O' kann die Konfiguration von Fig. 1 *symmetrisch* spezialisiert werden. Hierzu nehme man A auf dem durch O gehenden Strahl aus S_4 an und lasse O' nach O fallen (Fig. 2); die Figur

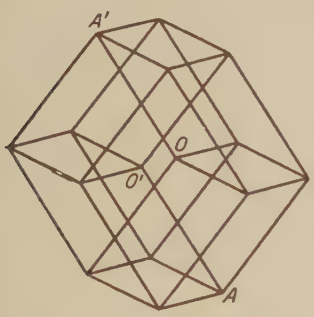


Fig. 1.

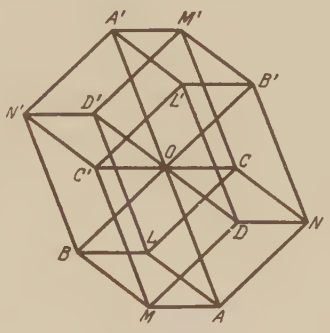


Fig. 2.

enthält wieder die vier möglichen Paare perspektiver Quader, und zwar so, daß die Quader eines jeden Paares eine gemeinsame Ecke in O haben. Man kann die Fig. 2 als affines Bild des Rhombendodekaeders (Granatoeders) samt den zu den Kanten parallelen Diagonalen deuten, weshalb ich dieses Gebilde ein *Dodekaeder* nennen will. Man beachte die Analogie der Fig. 1 zu den „perspektiven Vierecken" und der Fig. 2 zum Sechsecke in einem ebenen Parallelengewebe.

Soll ein Raumkurvengewebe auf vier allgemein liegende Parallelenbündel abbildbar sein, so müssen seine vier Netze Koordinatennetze sein. Ich will zeigen, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, daß also folgender Satz gilt:

1. *Ein Raumkurvengewebe ist dann und nur dann auf vier allgemein liegende Parallelenbündel abbildbar, wenn seine Netze Koordinatennetze sind.*

Aus der Voraussetzung dieses Satzes folgt, *daß man aus Gewebekurven und Gewebeflächen „(krummlinige) Dodekaeder" bilden kann.*

Es seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Gewebescharen. Wählt man einen Punkt O (Fig. 2, die jetzt krummlinig zu denken ist) und auf der hindurchgehenden

Kurve etwa aus S_4 einen benachbarten Punkt A, so bestimmen diese beiden Punkte einen Netzquader aus $(S_1 S_2 S_3)$, da A auf keiner durch O gehenden Netzfläche von $(S_1 S_2 S_3)$ liegen kann. Man ist also in der Lage, den Quader (OA) samt der „Diagonale" OA zu ziehen. Die von O ausgehenden Kanten dieses Quaders bestimmen analog die Quader (OB), $OC)$, (OD), welche die aus der Figur ersichtliche Lage haben müssen. Ergänzt man etwa die drei Flächen $NCOD$, $NB'M'C$, $NB'L'D$ zum Netzquader (OB'), so erhält man OA', $L'A'$, $M'A'$; endlich ergibt die analoge Vervollständigung etwa von $MDOB$, $MDL'C'$, $MC'N'B$ zum Quader (OC') die Kante $N'A'$.

Man beachte, daß durch die Wahl von O, A das Dodekaeder eindeutig bestimmt ist, und daß man durch geeignete Annahme von A auf einer der drei übrigen durch O gehenden Gewebekurven durch ein analoges Verfahren zu genau demselben Gebilde gelangt. Von den 14 Dodekaederecken sind 8 zugleich Diagonalenendpunkte, während in den übrigen 6 je vier Kanten zusammentreffen. Unter den vier Quadern mit gemeinsamer Dodekaederecke ist im Falle eines Diagonalenendpunktes einer dadurch ausgezeichnet, daß er alle drei in der betreffenden Ecke zusammenlaufenden Dodekaederkanten zu Kanten hat, während an den übrigen Ecken alle Quader gleichartig sind.

Geht man von einer Dodekaederecke mit vier zusammentreffenden Kanten längs dieser Kanten zu den benachbarten Ecken so stößt man immer auf Diagonalenendpunkte, z. B. von N aus auf A, B', C, D. Die gewählte Ecke und eine benachbarte bestimmen jeweils ein neues Dodekaeder; die den vier benachbarten Ecken entsprechenden Dodekaeder fallen aber insgesamt zusammen (Fig. 3), so daß man z. B. vom Dodekaeder N reden kann. Eine Ecke des neuen Dodekaeders liegt im „Mittelpunkt" des alten, vier weitere in den eben genannten Diagonalenendpunkten. Betrachtet man noch z. B. die Quaderpaare $(OA), (OA')$ und $(NA_1), (NB')$, so hat (NB') mit (OA) die Seitenfläche $ODNC$ und mit (OA') die Kante OB' gemeinsam, während (NA_1) und (OA) die gemeinsame Kante NA besitzen. Man legt sich leicht zurecht, wie sich die Lage von zwei anderen gleichartigen Quaderpaaren beschreiben läßt.

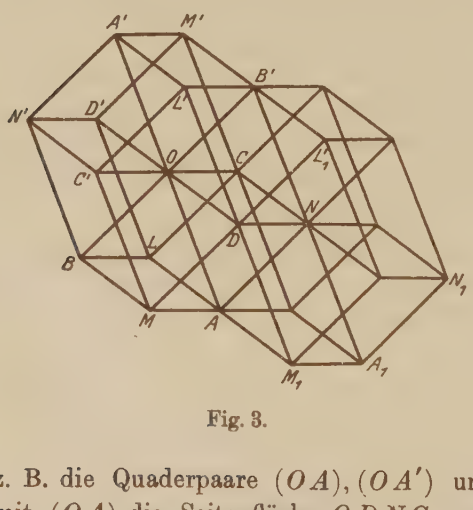


Fig. 3.

Analog zur „ebenen Wabe“ aus Sechsecken[4]) *läßt sich mit krummigen Dodekaedern eine „Raumwabe“ bilden. Diese entsteht, indem man e Dodekaeder konstruiert, welche zu den aus vier Kanten gebildeten cken eines gewählten Dodekaeders gehören und an den neuen Dodekaedern enso verfährt.* Dabei denke man sich der Übersichtlichkeit halber etwa ır die Netzquader aus $(S_1\, S_2\, S_3)$ raumerfüllt.

Man setzt zunächst die in Fig. 3 begonnene Konstruktion durch die odekaeder $N_1, \ldots$ nach „rechts hin“ fort. Hierauf folgt eine zweite eihe, die mit dem Dodekaeder M beginne und sich wieder nach rechts nzieht (Fig. 4). Der obere umerfüllte Quader von M liegt if $MDOB$ und hat OC' als ante (vgl. auch Fig. 3); der ntere hat zunächst die Kante A, ferner auch AM_1, wie man fort sieht. Zur Fortsetzung nach chts dient das Dodekaeder M_1, s eindeutig ist, wiewohl M_1 s Ecke von N oder M angehen werden kann. Sein oberer uader füllt die einspringende cke bei A gerade aus, sein unrer liegt wie vorhin der untere uader von M. Geht man auf ese Weise nach rechts und nten“ weiter, so müssen immer ieder die bisherigen Lagen-

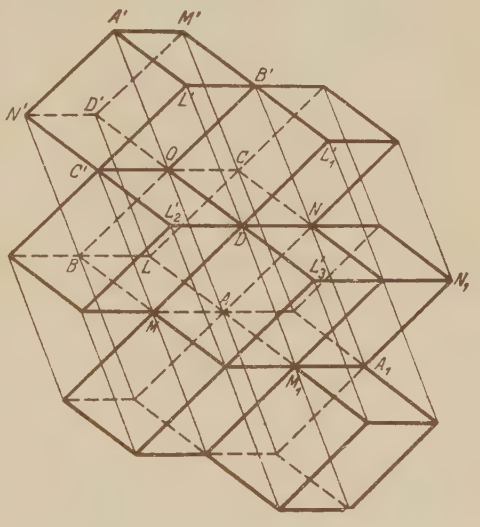


Fig. 4.

eziehungen auftreten. Schließlich werden auf das erhaltene Gebilde dazu aloge passend „aufgelegt“, so daß unsere Quader wie ein Stoß Schachteln n Raum ausfüllen. Man erhält die Raumausfüllung, wenn man zunächst e Dodekaeder L', $L'_1, \ldots$, dann L'_2, $L'_3, \ldots$ bildet, analog nach unten und hließlich nach „vorne“ weitergeht. Alle Lagenbeziehungen der Quader eten bereits mit den Dodekaedern L', L'_1, L'_2, L'_3 auf.

Das Kurven- und Flächengebilde, das so zustande kommt, soll eine *zumwabe* heißen. Aus der Symmetrie der Konstruktion folgt die Symetrie der erhaltenen Wabe bezüglich der einzelnen Scharen; es müssen her auch die übrigen gleichartigen Quader „aneinander geschachtelt“ sein. rner sind in der Wabe alle Ecken und Kanten (Diagonalen) gleichartig,

[4]) Vgl. W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. I., Math. itschr. 28 (1928), S. 150–157, § 1.

wiewohl dies beim einzelnen Dodekaeder nicht der Fall ist. So ist z. B. jeder Eckpunkt Mittelpunkt eines Dodekaeders; und man erkennt leicht, daß unsere Wabe auch dadurch zustande kommt, indem man die Dodekaeder konstruiert, die einen Diagonalenendpunkt als Mittelpunkt und den ursprünglichen Mittelpunkt als Diagonalenendpunkt haben, und so fortfährt. Ferner gibt es je zwei Quader mit gemeinsamer Kante, für welche die Endpunkte dieser Kante Endpunkte der Quaderdiagonalen sind.

Es ist nun zu zeigen, *daß sich eine Wabe durch eine feinere*, die wieder aus Kurven und Flächen des Gewebes besteht, *„unterteilen" läßt.*

Betrachten wir ein Dodekaeder, dessen Mittelpunkt z z. B. auf OA' (Fig. 2) liegt und das O als Diagonalenendpunkt hat! Man kann z dem Punkte O sicher so nahe wählen, daß die zweite auf OA' liegende Dodekaederecke y zwischen O und A' zu liegen kommt. Bewegt sich nun der Mittelpunkt z stetig gegen A' hin, während die Ecke O festbleibt, so wird y, da es von einem Parameter stetig abhängt, auf OA' stetig wandern und den Punkt A' sicher überschritten haben, falls z nach A' gerückt ist. Es wird also wenigstens für eine Lage von z der Punkt y in A' liegen (Fig. 5). Daß dies nicht für mehr als eine Lage von z eintreten kann, legt man sich mittels Fig. 5 leicht zurecht. Analog läßt sich jedem andern Quader eindeutig ein Dodekaeder „einschreiben".

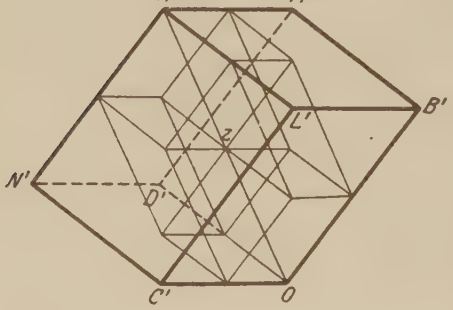


Fig. 5.

Die Unterteilung kommt dadurch zustande, daß man jedem Quader einer jeden Art das Dodekaeder einschreibt: dabei denken wir uns wieder nur die Quader aus $(S_1 S_2 S_3)$ raumerfüllt.

Man schreibe zunächst den Quadern aus $(S_1 S_2 S_3)$ der bereits gebildeten Wabe das Dodekaeder ein. Betrachtet man zwei derartige Quader, die eine gemeinsame Kante haben und für welche die Endpunkte O, B' dieser Kante (Fig. 6) Diagonalenenden sind, so müssen die eingeschriebenen Dodekaeder auf OB' die gemeinsame Ecke n haben. Faßt man nämlich n als Ecke des Dodekaeders z_1 auf, so bestimmt diese wie bisher ein neues Dodekaeder, das zugleich dem Quader (OB') eingeschrieben ist; dasselbe gilt, wenn n eine Ecke von z_2 ist; da man aber dem Quader (OB') nur ein Dodekaeder einschreiben kann, muß n den Dodekaedern z_1, z_2 gemeinsam sein. Zugleich ergibt sich, daß das dem Quader (OB') eingeschriebene Dodekaeder die in Fig. 7 angedeutete Lage hat, also das-

elbe ist, das die Konstruktion von Fig. 3 ergeben würde, wenn sie an er Ecke n des Dodekaeders z_1 ausgeführt wird; analog liegt das Dodeaeder z_2 bezüglich des eben konstruierten. Entsprechendes gilt für jedes

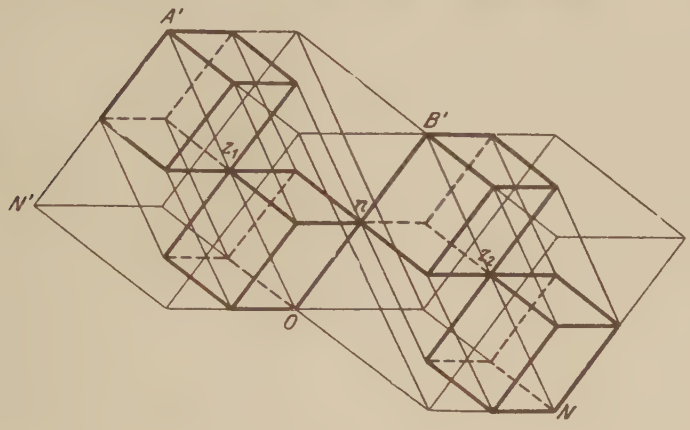


Fig. 6.

Dodekaeder, das einem Quader eingeschrieben wird, der als Diagonale ine Kante eines Quaders aus $(S_1 S_2 S_3)$ hat. Betrachtet man z. B. die Quader mit den Diagonalen OB', OC', OD', ferner $A'L'$, $A'M'$, $A'N'$

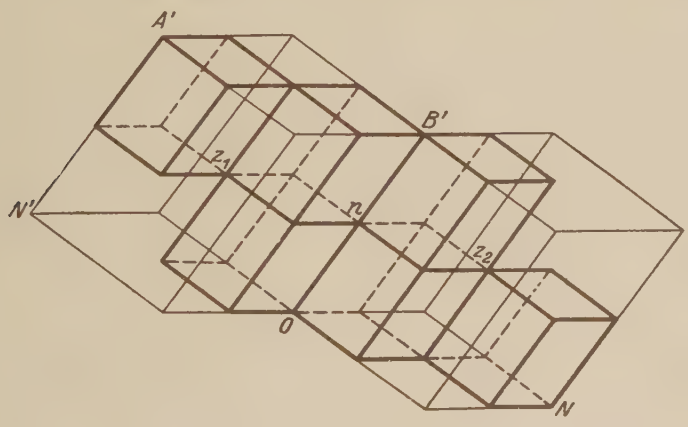


Fig. 7.

Fig. 5), so müssen die in (OA') liegenden, raumerfüllten Quader der nnen eingeschriebenen Dodekaeder zusammen mit den beiden dort bereits orhandenen den Quader (OA') gerade ausfüllen. Bei der Unterteilung eten also in jedem ursprünglichen Quader acht neue mit ihm gleichartige uf; hat man dem Quader das Dodekaeder eingeschrieben, so lassen sich ofort diese acht Quader angeben (vgl. Fig. 7). Aus dem eben genannten

Hinweis über das Aneinanderfügen der neuen Dodekaeder folgt unter Bezugnahme auf die Symmetrie, daß man durch die Unterteilung wieder auf eine Raumwabe stößt.

Um den Abbildungssatz zu beweisen, betrachten wir noch irgend vier allgemein liegende Parallelenbündel, tragen eine Wabe ein und ordnen die Ecken der Gewebewabe „entsprechenden" Ecken der Wabe in den Bündeln zu. Hierauf unterteilen wir beide Waben und ordnen wieder passend zu. *Setzt man diese Unterteilung und Zuordnung fort, so erhält man „in der Grenze" eine topologische Abbildung, welche das gegebene Gewebe in vier Parallelenbündel überführt.*

Hierzu ist zu zeigen, daß die Ecken im Originalgebiete *dicht* liegen. Durch Hinzunahme „entsprechender" Häufungspunkte von Ecken erhält man dann die gewünschte topologische Abbildung. Hierzu genügt es nachzuweisen, daß jeder Punkt z. B. auf OA' (Fig. 5) Häufungspunkt von Ecken ist, die bei der Unterteilung auf OA' auftreten.

Die Ecken, die bei der Wabenbildung auf OA' zu liegen kommen, erhält man, wenn in die längs OA' auftretenden Quader aus $(S_1 S_2 S_3)$ immer wieder Dodekaeder eingeschrieben werden. Würde es auf OA' einen Punkt geben, der hierbei nie Ecke wird und auch nicht Häufungspunkt von Ecken ist, so könnte man um ihn eine Umgebung i abgrenzen, in der keine Ecke liegt. Schreibt man nun dem Quader (OA') das Dodekaeder ein, so muß i ganz in dem einen seiner raumerfüllten Quader liegen; wird dann diesem das Dodekaeder eingeschrieben, so muß i wieder in einem der beiden neuen Quader liegen. Geht man so weiter, so erhält man lauter Dodekaeder, die einen Quader besitzen, — man kann sich ihn z. B. geradlinig denken, der ein geeignetes endliches Gebiet umgibt; andrerseits treten in (OA') unendlich viele Quader auf, die ganz außerhalb voneinander liegen und gegen einen Punkt zusammenschrumpfen müssen, da ihre Gegenecken auf OA' beliebig nahe aneinanderrücken. Macht man aber den einen Dodekaederquader hinreichend klein, so muß der andre beliebig klein werden. Es müssen also bei unserer Ineinanderschachtelung solche Dodekaeder auftreten, für die beide Quader in einem beliebig kleinen Gebiete Platz finden, im Widerspruch damit, daß der eine Quader endlich bleiben muß. Ähnlich zeigt man, daß ein Punkt auf OA', der bei der Unterteilung einmal eine Ecke wird, zugleich auch Häufungspunkt von Ecken ist.

Damit ist der Abbildungssatz *im kleinen* bewiesen. Um zu zeigen, daß er auch *im großen* gilt, hat man zunächst einzusehen, daß die ursprüngliche Wabe, sowie die Unterteilungen sich bis zum Rande des Definitionsgebietes erstrecken. Wäre dies für eine möglicherweise erst bei der Unterteilung auftretende Wabe nicht der Fall, so müßte es wenig-

ens eine Reihe von Quadern z. B. aus $(S_1 S_2 S_3)$ geben, die längs der-
lben Kurve K_4 aus S_4 an den Ecken (z. B. ..., A', O, A, ..., Fig. 4)
ısammenhängen und für welche diese Ecken gegen einen Punkt auf K_4
onvergieren. Denkt man sich S_4 als Parallelenbündel, so liegen sämtliche
uaderecken unserer Kette auf *festen* Parallelen. Dies steht aber im
Viderspruch damit, daß die Quader, deren Gegenecken auf K_4 dem Häu-
ngspunkt hinreichend nahe liegen, in einer beliebig kleinen Kugel ent-
alten sind. Setzt man nun etwa von drei Scharen voraus, daß sie ortho-
onale Parallelenbündel seien, und betrachtet man die Raumwabe inner-
alb einer im Definitionsgebiete liegenden Kugel k, so überlegt man sich
icht, daß in jeder beliebig kleinen in k enthaltenen Kugel bei hinreichend
rtgesetzter Unterteilung ein Dodekaeder zu liegen kommt und daß jeder
unkt in k innerer Punkt eines Dodekaeders wird. Von hier aus läßt sich
ıter Zuhilfenahme eines Kugelkettenverfahrens die Gültigkeit von Satz 1
ı großen erkennen.

Als einfache Folgerung sei erwähnt, *daß vier beliebige Strahlenbündel, n denen keine drei Scheitel* (im projektiven Sinne) *auf einer Geraden egen, in jedem Gebiete, das außerhalb der Verbindungsebene ihrer Scheitel egt, auf vier allgemein liegende Parallelenbündel abgebildet werden können.*

Ein Raumkurvengewebe, das auf vier allgemein liegende Parallelen-
indel abbildbar ist, soll im folgenden ein *Dodekaedergewebe* heißen.

§ 2.

Raumkurvengeflechte und n-fache Systeme.

Soll ein Raumkurvengeflecht auf fünf Parallelenbündel, von denen
indestens vier allgemein liegen,
pologisch abbildbar sein, so
uß es sicher unter seinen fünf
eweben zwei Dodekaedergewebe
$_1$, G_2 geben, die ein gemein-
mes Koordinatennetz N ent-
lten werden. Ferner müssen
ei konzentrische Dodekaeder
s G_1 bzw. G_2 (vgl. Fig. 8),
e einen gemeinsamen Diago-
lenendpunkt auf einer Kurve
s N haben, auch den zweiten
agonalenendpunkt auf dieser
ırve gemeinsam haben, da

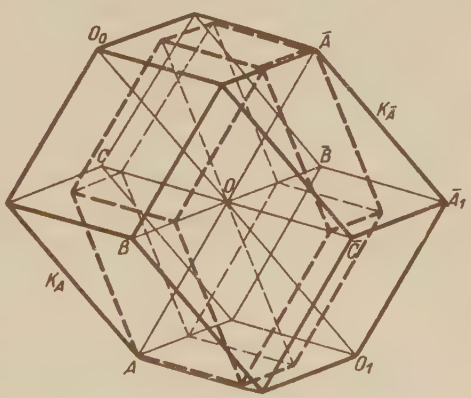


Fig. 8.

es beim Geflechte aus fünf Parallelenbündeln, von denen wenigstens vier
gemein liegen, zutrifft.

In Fig. 8 ist je ein Dodekaeder aus G_1 bzw. G_2 mit den gemeinsamen Diagonalenendpunkten $A, \bar{A}$ eingetragen. Die Kurven OA, OB, OC gehören zum Netze N. Je ein weiteres Dodekaeder, das mit dem gestrichelten der Fig. 8 gleichartig ist und den Mittelpunkt O hat, würde sich zwischen B und $\bar{B}$ bzw. C und $\bar{C}$ konstruieren lassen. — Ich will zeigen, daß unsere notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, daß also folgender Satz gilt:

2. *Ein Raumkurvengeflecht ist auf fünf Parallelenbündel, von denen wenigstens vier allgemein liegen, dann und nur dann topologisch abbildbar, wenn zwei seiner Gewebe Dodekaedergewebe sind und wenn je zwei hinreichend kleine, konzentrische Dodekaeder dieser Gewebe auf einer den Geweben gemeinsamen Kurve entweder keinen oder zwei gemeinsame Diagonalenendpunkte haben.*

Der Beweis dieses Satzes läßt sich ähnlich wie für Satz 1 in III führen. Man bildet etwa G_1, dem das gestrichelte Dodekaeder in Fig. 8, die man sich jetzt krummlinig denke, angehöre, auf vier allgemein liegende Parallelenbündel ab und zeigt, daß jede solche Abbildung unter den Voraussetzungen von Satz 2 auch die restliche Geflechtsschar S in ein Parallelenbündel verwandelt, das gegen die früheren nicht gerade allgemein zu liegen braucht. Eine derartige Abbildung denken wir uns von nun an bereits ausgeführt.

Unter den sechs Scharen von Gewebeflächen aus G_2 gibt es drei, auf deren Flächen Netze liegen, in denen eine Schar jeweils zu S gehört, während die andere aus Parallelen besteht. Ich will zeigen, *daß auf jeder Fläche dieser drei Flächenscharen die aus S entnommene Kurvenschar eine Translationsschar ist, bei der die Verschiebung in der Richtung der auf der Fläche liegenden Parallelen erfolgt.*

Eine Gewebefläche von der eben beschriebenen Art ist z. B. die durch OO_0 und OA aufgespannte Fläche f in Fig. 8. Konstruiert man im Anschlusse an Fig. 8 das zu G_2 gehörige Dodekaeder, das O_1 als Mittelpunkt und $\bar{A}_1$ als Diagonalenendpunkt hat (Fig. 9), und fährt man auf diese Art fort, so tritt auf der durch A bzw. $\bar{A}$ gehenden Kurve K_A, $K_{\bar{A}}$ aus S je eine Reihe von Eckpunkten $A, A_1, A_2, \ldots$ bzw. $\bar{A}, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots$ auf, für welche

$$\overline{A_i \bar{A}_i} = \overline{A \bar{A}}, \qquad A_i \bar{A}_i \parallel A \bar{A} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt, wie man erkennt, wenn man sich die geradlinigen Dodekaeder aus G_1 konstruiert denkt, welche O bzw. $\bar{A}$, O_1 bzw. $\bar{A}_1$, ... als Mittelpunkt bzw. Diagonalenendpunkt haben. Da G_2 für sich allein auf vier allgemein liegende Parallelenbündel abbildbar ist, wird jede Gewebefläche von den fünf Gewebeflächenscharen, denen sie nicht angehört, in einem Sechseck-

ewebe geschnitten. Insbesondere schneiden die Flächen der konstruierten Dodekaeder, die einen „Streifen" einer Raumwabe bilden, die Fläche f in einem Streifen" einer Flächenwabe. Unterteilt man den Raumwabenstreifen, so erhält man in f als chnittgebilde die Unterteilung es dort liegenden Flächenwabenstreifens (vgl. III, Fig. 5). Dabei ritt auf K_A bzw. $K_{\bar{A}}$ zwischen A nd A_1, A_1 und A_2 ... bzw. $\bar{A}$ und $\bar{A}_1$, $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_2$ ... je ein neuer unkt A', A'', ... bzw. $\bar{A}'$, $\bar{A}''$, ... uf, und aus den vorausgesetzten nzidenzen folgt wieder

$$\overline{A^{(i)}\bar{A}^{(i)}} = \overline{A\bar{A}}, \quad A^{(i)}\bar{A}^{(i)} \parallel A\bar{A} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

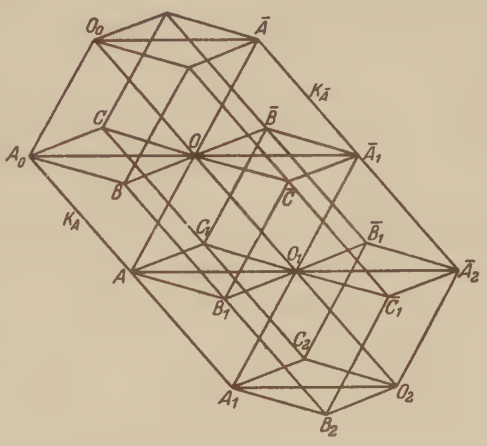


Fig. 9.

Setzt man die Unterteilung des Raumwabenstreifens fort, so läuft in f die Unterteilung des Flächenwabenstreifens weiter, weshalb nach analogen Überlegungen wie in III, § 1, $K_{\bar{A}}$ aus K_A durch eine Translation in der Richtung $A\bar{A}$ entsteht. Denkt man sich den Raumwabenstreifen über eine Fläche f hin nach „rechts" und „links" fortgesetzt, so kann dieses Verfahren nach der Bemerkung gegen Ende von § 1 bis an den Gebietsrand ausgedehnt werden; dasselbe gilt für jede Unterteilung. Es müssen daher im ganzen Flächengebiete f die darauf liegenden Kurven aus S eine Translationsschar in der Richtung $A\bar{A}$ bilden: eine Kurve aus S auf f, die bei der Unterteilung nie erreicht wird, liegt immer zwischen zwei beliebig benachbarten, die durch eine Translation in der Richtung $A\bar{A}$ aneinander übergehen. Ferner muß in jeder Fläche der Gewebeflächenschar, der f angehört, die dort liegende Kurvenschar aus S eine Translationsschar mit der Verschiebungsrichtung $A\bar{A}$ sein. Analoges gilt für die Flächen, die durch OO_0 und OB bzw. OO_0 und OC aufgespannt werden, sowie für die zugehörigen Flächenscharen aus G_2.

Es ist nun zu zeigen, *daß jede Kurve aus S eine Gerade ist.* Aus

$$\overline{O_iB_i} = \overline{OB}, \qquad O_iB_i \parallel OB,$$

$$\overline{O_iC_i} = \overline{OC}, \qquad O_iC_i \parallel OC$$

olgt

$$\overline{OA_0} = \overline{O_1A} = \ldots, \qquad OA_0 \parallel O_1A \parallel \ldots;$$

la ferner

$$\overline{O_0A_0} = \overline{OA} = \ldots, \qquad O_0A_0 \parallel OA \parallel \ldots$$

ist, müssen die Punkte $O_0, O, O_1, \ldots$ auf einer Geraden liegen. Die Unterteilung ergibt zwischen O_0 und O, O und O_1, ... je einen weiteren Eckpunkt auf der nämlichen Geraden. Da aber auf der Kurve $O_0 O$ bei fortschreitender Unterteilung jeder Punkt entweder Eckpunkt oder Häufungspunkt von Ecken wird, müssen alle Punkte dieser Kurve auf der nämlichen Geraden liegen oder wegen der Stetigkeit ist die Kurve $O O_0$ selbst eine Gerade (vgl. III, § 1). Die Gewebeflächen aus G_2, auf denen eine zu S gehörige Schar liegt, sind also Ebenen, und die jeweilige Schar selbst ein Parallelenbüschel. Daraus folgt aber, *daß S im ganzen Gebiete ein Parallelenbündel sein muß*, wie man sofort erkennt, wenn man in G_2 eine Raumwabe einträgt und z. B. die aneinandergeschachtelten Quader betrachtet, die mit (OA) gleichartig sind: alle dabei auftretenden Geraden aus S sind parallel; dasselbe gilt für die Geraden, die bei jeder Unterteilung auftreten, und daher für jede Gerade überhaupt Das Parallelenbündel S muß gegen die drei übrigen Bündel aus G_2 allgemein liegen, während das fünfte Bündel, das Bündel S und irgendein Bündel aus dem gemeinsamen Koordinatennetze besondere Lage haben können. — Damit ist der Abbildungssatz 2 *im großen* bewiesen.

Transformiert man vier allgemein liegende Parallelenbündel und irgendein fünftes topologisch so, daß die vier allgemein liegenden Bündel in solche übergehen, so folgt aus dem Beweisverfahren, daß auch das fünfte Parallelenbündel in ein solches übergeht, oder

Satz 3. *Eine topologische Abbildung, welche vier allgemein liegende Parallelenbündel in solche überführt, ist affin.*

Aus Satz 2 läßt sich durch den Schluß von n auf $n+1$ für n-fache Raumkurvensysteme folgender Satz gewinnen:

4. *Ein n-faches Raumkurvensystem $(n > 4)$ ist dann und nur dann auf n Parallelenbündel, von denen wenigstens vier allgemein liegen, topologisch abbildbar, wenn es in ihm ein Koordinatennetz gibt, für welches die $n-3$ Gewebe, in denen es enthalten ist, Dodekaedergewebe sind und wenn zwei hinreichend kleine, konzentrische Dodekaeder dieser Gewebe auf einer Kurve des gemeinsamen Netzes entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben.*

Gilt der Satz für ein n-faches System, so kann man bei einem $(n+1)$-fachen Systeme durch eine topologische Abbildung erreichen, daß eines seiner $n-2$ n-fachen Systeme, die das gemeinsame Netz enthalten, in n Parallelenbündel übergeht, von denen wenigstens vier allgemein liegen; die übrigbleibende Kurvenschar muß dabei aber auch ein Parallelenbündel werden, da sie mit dem gemeinsamen Netze und irgendeiner anderen bereits zu einem Parallelenbündel gewordenen Schar den Voraussetzungen von Satz 2 genügt. Da der Satz für $n = 5$ gilt, gilt er allgemein.

Um zu zeigen, daß ein Raumkurvengeflecht, dessen Gewebe insgesamt Dodekaedergewebe sind, noch nicht auf fünf (notwendig allgemein liegende) Parallelenbündel abbildbar zu sein braucht, genügt es, etwa das Geflecht aus vier allgemein liegenden Parallelenbündeln und einem eigentlichen Strahlenbündel zu betrachten. In jedem Gebiete, das den Scheitel des eigentlichen Bündels nicht enthält, treffen unsere Voraussetzungen zu. Gäbe es eine Abbildung auf fünf Parallelenbündel, so müßte sie nach Satz 3 affin sein und könnte daher das eigentliche Bündel nicht in ein Parallelenbündel verwandeln.

Hamburg, Math. Seminar, Mitte Mai 1928.

(Eingegangen am 23. Mai 1928.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. VII.

Ein Abbildungssatz über Sechseckgeflechte.

Von

Karl Mayrhofer in Hamburg.

In einer früheren Mitteilung dieser Aufsatzreihe zeigte ich unter gewissen *Differentiierbarkeitsannahmen* folgenden Satz[1]) (Fig. 1):

1. *Ein Geflecht auf einer Fläche ist dann und nur dann auf ein Parallelengewebe und ein (eigentliches oder uneigentliches) Strahlenbüschel topologisch abbildbar, wenn es drei Sechseckgewebe G_1, G_2, G_4 mit folgenden Eigenschaften enthält: Zwei konzentrische Sechsecke aus G_1, G_2 haben auf jeder Kurve der einen den Geweben G_1, G_2 gemeinsamen Schar S entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken; G_4 ist das Gewebe, das die Schar S nicht enthält.*

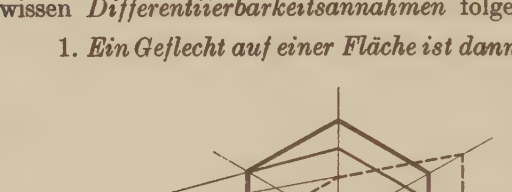


Fig. 1.

Ich will hier einen Beweis dieses Satzes geben, der keine einschränkenden Differentiierbarkeitsannahmen benötigt. Zugleich ergibt sich der unten angeführte Satz 3. — Es sei noch daran erinnert, daß in III, § 3 unabhängig von Differentiierbarkeitsannahmen aus den Voraussetzungen von Satz 1 gefolgert wurde, daß auch das restliche Gewebe G_3 unseres Geflechtes ein Sechseckgewebe ist und daß ein Sechseck aus G_3 mit einer Ecke A und dem Zentrum O (Fig. 1) auch nach B kommt.

[1]) Topologische Fragen der Differentialgeometrie. III., Math. Zeitschr. 28 (1928) S. 728–752, Satz 7. Wegen der Bezeichnungen vgl. die Einleitung dieser Mitteilung, die ich mit III zitiere.

Wird G_4 als Parallelengewebe vorausgesetzt, so läßt sich zeigen, daß ein (eigentliches oder uneigentliches) Strahlenbüschel sein muß. Die Geden aus G_4 seien etwa um $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigt.

Es werde zunächst folgender Hilfssatz bewiesen:

2. *Wählt man zwei beliebige hinreichend benachbarte Kurven K, L s S* (Fig. 2) *und unterwirft man ein Dreieck aus G_4 einer „Parallelrschiebung", bei der zwei Dreiecksecken auf K, L bleiben, so beschreibt e dritte, freie Ecke eine Kurve M aus S.*

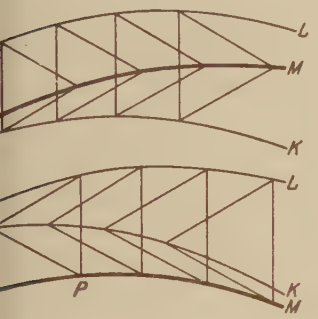


Fig. 2a u. 2b.

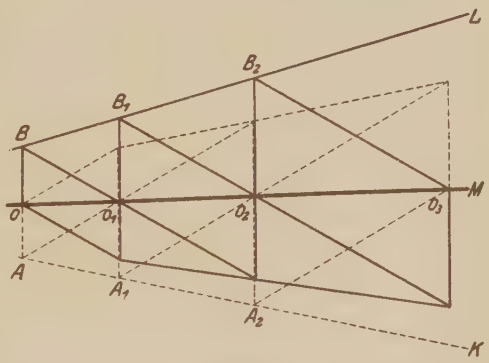


Fig. 3.

Um zu zeigen, daß im Falle der Fig. 2a die freie Ecke eine zu S gerige Kurve M beschreibt, schneide man K, L durch eine „Vertikale" aus in den Punkten A, B (Fig. 3) und konstruiere das gleichseitige Dreieck O_1B. Durch O_1 geht eine gewisse Kurve M aus S. Zieht man dann rch O_1 die Vertikale, die K, L in A_1 bzw. B_1 schneidet, und konstruiert n das Dreieck $A_1O_2B_1$, so muß O_2 auch auf M liegen; fährt man so t, so erhält man auf M eine Reihe diskreter Punkte $O_1, O_2, \ldots$, in lche bei der Parallelverschiebung des Dreieckes AO_1B die freie Ecke mal zu liegen kommt.

Wir unterteilen nun die beiden Sechseckreihen der Fig. 3 (die ausogene und die gestrichelte) durch eine Wabe[2]). In Fig. 4 ist die Unterlung in je ein Sechseck dieser Reihen eingetragen. Daß die Unterteilungen der Lagenbeziehung der Fig. 4 stehen, erkennt man folgendermaßen: nstruiert man — ohne eine Unterteilung des gestrichelten Sechseckes zu bsichtigen — ein kleines gestricheltes Sechseck mit dem Mittelpunkt O' s Punkt der Unterteilung des ausgezogenen Sechseckes) und einer Ecke O,

[2]) Vgl. W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. I., Math. tschr. 28 (1928), S. 150—157, § 1.

so erhält man als Gegenecke von O den Punkt O_1; das Dreieck $C'OC$ ist aber dem Dreiecke AO_1O eingeschrieben und gehört daher der ersten Unterteilung des großen gestrichelten Sechseckes an; dasselbe muß daher auch von den Seiten und Diagonalen samt deren Verlängerungen des eben konstruierten kleinen Sechseckes gelten; betrachtet man noch das gestrichelte Sechseck mit dem Mittelpunkt O_1 und einer Ecke O', so muß es einerseits zur Unterteilung gehören, anderseits durch O'' (wieder als Punkt der Unterteilung des ausgezogenen Sechseckes) gehen, womit unsere Lagenbeziehung bewiesen ist.

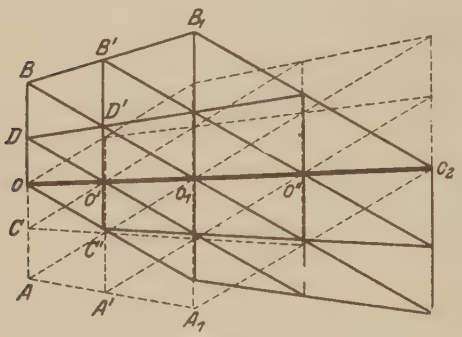


Fig. 4.

Diese erste Unterteilung liefert also zwischen A und A_1, A_1 und A_2, .. bzw. B und B_1, B_1 und B_2, ... je einen Punkt A', A'', ... bzw. B', B'', ... so daß die Geraden $A'B'$, $A''B''$, ... vertikal sind und die freien Ecken O'', O''', ..., der über $\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$, ... in der bisherigen Weise errichteten Dreiecke auf M liegen. Jeder weitere Schritt in der Unterteilung liefert aus analogen Gründen zwischen je zwei bereits erhaltenen Vertikalen eine neue, welche die Konstruktion eines Dreiecks ermöglicht, dessen freie Ecke auf M liegt. Betrachtet man eine beliebige Vertikale, welche K, L in A^* bzw. B^* schneidet, so tritt sie entweder bei hinreichend fortgesetzter Unterteilung einmal auf und kann zur Konstruktion eines Dreieckes $A^*O^*B^*$ verwendet werden, dessen freie Ecke O^* auf M liegt, oder sie ist „Häufungsgerade" von Parallelen zu AB; konstruiert man auch in diesem Falle das Dreieck $A^*O^*B^*$, so muß O^* wieder auf M liegen: denn läge O^* außerhalb, so könnte man um ihn einen kleinen Kreis ziehen, der keinen Punkt von M enthält; da aber A^*B^* Häufungsgerade von Vertikalen ist, die bei der Unterteilung auftreten und deren zugehörige freie Dreiecksecken auf M liegen, und da K und L stetig sind, muß es im kleinen Kreis Punkte geben, welche auf M liegen, im Widerspruch mit der Annahme O^* liege nicht auf M.

Bisher wurde die Konfiguration der Fig. 1 von „links nach rechts" benutzt; auf analoge Art erhält man aus den Kurven K, L eine zu S gehörige Kurve M, wenn man unsere Konfiguration von „rechts nach links" betrachtet. Ferner erkennt man leicht, daß auch die restlichen Möglichkeiten, auf die sich der Hilfssatz bezieht, bestehen: würde z. B. im Falle der Fig. 2b der Ort M der freien Ecke P nicht eine Kurve aus S sein, so könnte man

r irgendeine Lage von P die hindurchgehende Kurve M' aus S ziehen; as eben genannte Verfahren ermöglicht zu M' und L eine weitere Kurve us S zu konstruieren, die durch Q hindurchgehen muß, also gerade die urve K ist; es müssen daher M und M' zusammenfallen.

Der Hilfssatz läßt sich auch so aussprechen:

3. *Gilt in einem Geflecht der besondere „Dreieck-Desargues" der ig. 5 und sind die Gewebe, denen die Kurven O_1A, O_1A_1, O_1O_2 bzw. $_1B$, O_1B_1, O_1O_2 angehören, Sechseckgewebe, so gilt auch der allgemeine.*

Betrachten wir nun, um zum Beweise von Satz 1 zu gelangen, zwei enachbarte Kurven K, L aus S! Spiegelt man L in vertikaler Richtung K, so muß das Bild L' auch zu S gehören, wie man im Hinblicke auf g. 6 aus dem Hilfssatze entnimmt. Daraus ergibt sich aber, *daß auch e in bezug auf die Vertikalen gebildete Mittelkurve K zweier Kurven L, L'*

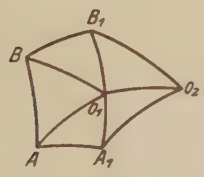


Fig. 5.

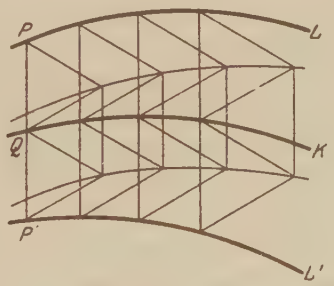


Fig. 6.

us S zu S gehört. Es seien L, L' (Fig. 6) die gewählten Kurven, die von ner Vertikalen in den Punkten P, P' geschnitten werden. Die Kurve K us S, die durch den Mittelpunkt Q der Strecke PP' geht, muß bereits e Mittelkurve sein, da das Spiegelbild von L an K eine Kurve aus S ist, e durch P' geht, also nur L' sein kann.

Man kann nun zeigen, *daß auf jeder Vertikalen die beiden Strecken, ie von drei benachbarten Kurven aus S abgegrenzt werden, im selben erhältnisse stehen.* Die drei Kurven sollen L, L', K heißen, und zwar , daß K zwischen L und L' liegt. Wir wollen K durch geeignete Mittel- urven approximieren. Fällt bereits die Mittelkurve M von L, L' mit K usammen, so sind die genannten Verhältnisse bereits konstant. Tritt dies cht ein, so ziehen wir die Mittelkurve M_1 von L, M bzw. L', M, je achdem K zwischen L und M oder L' und M liegt. M_1 wird im all- emeinen wieder von K verschieden sein. Fährt man auf diese Art weiter, ist es möglich, daß eine Mittelkurve nach einer endlichen Anzahl etwa Schritten mit K zusammenfällt. Das Verhältnis der herausgeschnittenen recken muß dann konstant sein, und zwar

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2^2}+\frac{\varepsilon_2}{2^3}+\cdots+\frac{\varepsilon_{n-1}}{2^n}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{2^2}-\frac{\varepsilon_2}{2^3}-\cdots-\frac{\varepsilon_{n-1}}{2^n}\right), \quad (\varepsilon_i=\pm 1)$$

Fällt aber eine auftretende Mittelkurve nie mit K zusammen, so muß das Teilverhältnis auf jeder Vertikalen gleich

$$\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{2^{i+1}}\right):\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{2^{i+1}}\right),$$

also wiederum konstant sein.

Betrachtet man die Dreiecke AO_1B, $A_1O_2B_1$, ... von Fig. 3, so müssen die Punkte $O_1, O_2, \ldots$ wegen

$$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{O_1A_1}:\overline{O_1B_1}=\ldots$$

auf einer Geraden g liegen. Ähnlich folgt aus den Dreiecken $CO'D$, $C'O_1D'$, ... der Fig. 4, daß die Punkte $O', O_1, O'', \ldots$ auf g liegen müssen. Unterteilt man in der bisherigen Art weiter, so findet man immer neue Punkte von M, die auf g liegen. Da aber jeder Punkt von M bei dieser Unterteilung entweder einmal erreicht wird oder Häufungspunkt von Ecken ist, die bei der Unterteilung auftreten und insgesamt auf g liegen, muß wegen der Stetigkeit die Kurve M mit der Geraden g identisch sein. Da jede Kurve aus S die Rolle der Kurve M spielen kann, muß S eine Geradenschar sein. Wegen der Konstanz der Schnittverhältnisse müssen je drei Gerade entweder gegen einen Punkt zusammenlaufen oder parallel sein: *S ist also ein eigentliches oder uneigentliches Strahlenbüschel, je nachdem die Punkte B, B_1 der Fig. 1 getrennt liegen oder nicht.*

Der Beweis, daß bei zusammenfallenden Punkten B, B_1 in Fig. 1 S ein Parallelenbüschel sein muß, läßt sich auch auf einfachere Weise führen.

Hamburg, Mathematisches Seminar, Juni 1928.

(Eingegangen am 28. Juni 1928.)

Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n.[1])

Von

J. A. Schouten in Delft.

Einleitung.

Bekanntlich wird in jeder X_m in V_n eine Riemannsche Übertragung duziert. Vranceanu[2]) hat nun gezeigt, daß in einer V_n, die ein nicht $_m$-bildendes m-Richtungsfeld trägt, ebenfalls eine Übertragung für Größen r lokalen R_m induziert wird. Er zeigte, daß die Bahnen eines freien cht-holonomen mechanischen Systems die geodätischen Linien einer solchen duzierten Übertragung sind. Unabhängig von Vranceanu hat auch Horak[3]) eselbe Übertragung abgeleitet, und in einer noch zu erscheinenden Arbeit t er verschiedene mechanische Anwendungen gegeben.

Wir betrachten in dieser Arbeit den allgemeinen Fall einer X_n^m (= nicht $_m$-bildendes m-Richtungsfeld in X_n) in L_n. Zunächst werden die nicht-olonomen Parameter in X_n und die Festlegung einer linearen Übertragung bezug auf solche Parameter behandelt. Nicht-holonome Parameter treten kanntlich in der Mechanik auf. In der Geometrie wurden sie verwendet

---

[1]) $X_n = n$-dimensionale Mannigfaltigkeit; $L_n = X_n$ mit einer linearen (über-hiebungsinvarianten) Übertragung; $A_n = L_n$ mit symmetrischer Übertragung; E_n = eukli-sche A_n; $V_n = L_n$ mit Riemannscher Übertragung; R_n = euklidische V_n.

[2]) Sur les espaces non holonomes, Comptes Rendus **183** (1926), p. 825–854; Sur calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes, Comptes Rendus **183** 926), p. 1083–1085.

[3]) (Tschechisch) Sur une généralisation de la notion de variété, Publications de Faculté des sciences de l'université Masaryk, Brno 1927. Zusatz bei der Kor-ktur: Herr Horak hat mich in einem Briefe vom 12. 9. 28 darauf aufmerksam macht, daß er in dieser Arbeit auch die allgemeinste lineare Übertragung in einer $_n^m$ in X_n angegeben hat. Da die Arbeit in tschechischer Sprache abgefaßt ist, war ir dieser Umstand nicht bekannt.

von Hessenberg[4]), dem Verfasser[5]), Cartan[6]), Hlavaty[7]) und Horak[8]). Es treten dabei Übertragungsparameter Λ_{ij}^{k} auf, die für den Fall, daß in einer V_n ein Orthogonalnetz mit Einheitsvektoren zugrunde gelegt wird, übergehen in die Rotationskoeffizienten γ_{kij} von Ricci. Nachdem die Eigenschaften einer X_m in X_n, ausgedrückt in nicht-holonomen Parametern, kurz gestreift sind, gelangt die X_n^m in L_n zur Betrachtung. Es wird gezeigt, daß im Falle der „Einspannung" in der X_n^m eine Übertragung induziert wird, und es kommen die für die erste Krümmung der X_n^m charakteristischen Größen, insbesondere die Krümmungsgröße zur Sprache. Die Behandlung der Krümmungsgröße unterscheidet sich von dem Fall der X_m in L_n, da es in einer X_n^m natürlich im allgemeinen kein geschlossenes infinitesimales Parallellogramm gibt. Nähere Betrachtung dieser Größen führt zu den verallgemeinerten Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci, die hier für eine X_m^l in X_m in L_n abgeleitet werden. Mechanische Anwendungen lassen sich auf eine Betrachtung der geodätischen Linien einer X_n^m in V_n zurückführen. Es zeigt sich, daß diese geodätischen Linien nicht gleichzeitig kürzeste Linien sind und daß eine X_n^m in L_n, deren geodätische Linien alle auch in L_n geodätisch sind, dennoch eine nicht verschwindende Krümmungsgröße haben kann. Zum Schluß wird noch gezeigt, daß sich der Begriff der Affinnormalen auch bei einer X_n^{n-1} in L_n festlegen läßt und daß also auch hier eine Affingeometrie existiert.

§ 1.

Nicht-holonome Parameter in X_n.

Werden die Urvariablen $\overset{\nu}{x}$, $\alpha, \beta, \ldots = a_1, \ldots, a_n$, transformiert in $\overset{k}{x}$, $h, \ldots, m = 1, \ldots, n$,[9]) so ist bekanntlich die Gleichung

$$d\overset{k}{x} = \partial \overset{k}{x} / \partial \overset{\lambda}{x} \cdot d\overset{\lambda}{x} \tag{1}$$

Ausgangspunkt der Definition der kontravarianten und kovarianten Vektoren.

---

[4]) Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Annalen **78** (1918), S. 187–217.

[5]) Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. Kon. Akad. v. Wet. **12** (1918), S. 6.

[6]) Sur les variétés à connexion affine, Ann. de l'école normale (3) **40** (1923), p. 325–412.

[7]) Sur le déplacement linéaire du point, Věstn. České Akademie **13** (1924), p. 1–8.

[8]) Die Formeln für allgemeine lineare Übertragung bei Benutzung von nicht-holonomen Parametern, Nieuw Archief v. Wisk. **15** (1927), S. 193–201.

[9]) Es ist zu bemerken, daß $a_1, \ldots, a_n$ sowie $1, \ldots, n$ *feste* Zeichen sind, $\alpha, \beta, \ldots$ und $h, \ldots, m$ dagegen *laufende* Indizes, die alle Zeichen der *festen* Zahlenreihe $a_1, \ldots, a_n$ bzw. $1, \ldots, n$ durchlaufen. Es ist also z. B. niemals $a_1 = a_2$ oder $a_1 = 1$.

a die $d\overset{k}{x}$ dieser Definition gemäß selbst Bestimmungszahlen eines kontra-
arianten Vektors sind, können wir schreiben

$$dx^k = A^k_\lambda \, dx^\lambda; \qquad A^k_\lambda = \partial x^k / \partial x^\lambda. \quad [10]) \tag{2}$$

u den $\overset{\nu}{x}$ gehört das Bezugssystem $\binom{\nu}{\lambda}$, d. i. ein System von n kontra-
arianten und n kovarianten Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}$, $\overset{\nu}{e}$ mit den Bestimmungszahlen

$$\underset{a_i}{e^{a_j}} = \overset{a_j}{e_{a_i}} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

n derselben Weise gehört zu den $\overset{k}{x}$ das Bezugssystem $\binom{k}{i}$ mit den Maß-
ektoren $\underset{i}{e}$, $\overset{k}{e}$. Die Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}$, $\overset{\nu}{e}$ haben in bezug auf das System $\binom{k}{i}$
ie Bestimmungszahlen

$$\underset{\lambda}{e^k} = A^k_\nu \underset{\lambda}{e^\nu}; \qquad \overset{\nu}{e_i} = A^\lambda_i \overset{\nu}{e_\lambda} \tag{4}$$

nd umgekehrt ist

$$\underset{i}{e^\nu} = A^\nu_k \underset{i}{e^k}; \qquad \overset{k}{e_\lambda} = A^i_\lambda \overset{k}{e_i}. \tag{5}$$

us diesen Gleichungen und aus der Definition von $\underset{\lambda}{e^\nu}$ und $\overset{k}{e_i}$ geht hervor,
aß die n^2 Zahlen A^k_λ drei verschiedene Bedeutungen haben:

1. Bestimmungszahlen des festen Einheitsaffinors A, d. i. der Affinor, er bei Überschiebung mit jedem Vektor diesen selben Vektor erzeugt.

2. Bestimmungszahlen der n veränderlichen kontravarianten Vektoren $\underset{\lambda}{e}$ n bezug auf $\binom{k}{i}$.

3. Bestimmungszahlen der n veränderlichen kovarianten Vektoren $\overset{k}{e}$ n bezug auf $\binom{\nu}{\lambda}$.

Würden wir aber z. B. schreiben

$$A^k_\lambda = \overset{k}{e_\lambda}, \tag{6}$$

o könnte man da herauslesen, daß die Größe zweiten Grades A dem ovarianten Vektor $\overset{k}{e}$ gleich wäre, während nur gemeint ist, daß die -Bestimmungszahl von A der λ-Bestimmungszahl von $\overset{k}{e}$ gleich ist. Auch ei der später einzuführenden kovarianten Differentiation würde eine Glei-
hung wie (6) sofort zu Fehlschlüssen führen, da diese Operation bei einer rröße zweiten Grades anders wirkt als bei einem Vektor. Wir vermeiden

[10]) Der Divisionsstrich bedeutet hier: es wird eine Größe gesucht, die bei Über-
chiebung mit dem Linienelement dx stets dieses Linienelement dx selbst erzeugt.

diese Fehlerquellen, indem wir festsetzen, daß bei Überschiebung einer *Größe* mit einem Maßvektor der betreffende Index eingeklammert wird, z. B.

$$(7)\qquad \begin{gathered} v^{(\nu)} = v^\lambda \overset{\nu}{e}_\lambda = v^k \overset{\nu}{e}_k; \qquad w_{(i)} = w_\lambda \underset{i}{e}^\lambda = w_k \underset{i}{e}^k; \\ A^k_{(\lambda)} = A^k_\nu \underset{\lambda}{e}^\nu = \underset{\lambda}{e}^k \end{gathered}$$

und nennen dieses Verfahren *Abdrosseln* eines Index. Durch Abdrosseln eines Index wird der Grad um eins vermindert. v^ν bedeutet z. B. in unseren Gleichungen stets den Vektor v, $v^{(\nu)}$ dagegen irgendeine der als Skalare aufgefaßten Bestimmungszahlen $v^{a_1}, \ldots, v^{a_n}$. Betrachten wir jetzt die drei Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} v^\nu &= A^\nu_i v^i, \\ v^{(\nu)} &= \overset{\nu}{e}_i v^i, \\ v^\nu &= \underset{i}{e}^\nu v^{(i)}. \end{aligned}$$

Die erste bringt zum Ausdruck, daß A Einheitsaffinor ist, die zweite, daß die Bestimmungszahl $v^{(\nu)}$ entsteht durch Überschiebung von v mit dem kovarianten Maßvektor $\overset{\nu}{e}$, und die dritte, daß v eine Summe von Vielfachen der kontravarianten Maßvektoren $\underset{i}{e}$ ist mit Koeffizienten $v^{(i)}$. Die Gleichungen (3) lassen sich jetzt schreiben

$$(9)\qquad \underset{\lambda}{e}^{(\nu)} = \overset{\nu}{e}_{(\lambda)} = A^{(\nu)}_{(\lambda)} = \begin{cases} 1, & \lambda = \nu, \\ 0, & \lambda \neq \nu. \end{cases}$$

Das Bezugssystem $\binom{k}{i}$ erschien im vorigen als Folge der Einführung der neuen Variablen $\overset{k}{x}$. Es steht aber nichts im Wege auch *ohne diese Einführung* in allen Punkten der X_n in beliebiger Weise, ein lokales Bezugssystem $\underset{i}{e}$, $\overset{k}{e}$ einzuführen. Es bleiben dann für den Übergang von dem einen System zum anderen dieselben Formeln gelten, die wir hier in übersichtlicher Weise zusammenstellen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &v^{(\nu)} = v^k \overset{\nu}{e}_k, && v^{(k)} = v^\nu \overset{k}{e}_\nu, \\ &v^\nu = A^\nu_k v^k = \underset{k}{e}^\nu v^{(k)}, && v^k = v^\nu A^k_\nu = v^{(\nu)} \underset{\nu}{e}^k, \\ &w_{(\lambda)} = w_i \underset{\lambda}{e}^i, && w_{(i)} = w_\lambda \underset{i}{e}^\lambda, \\ &w_\lambda = w_i A^i_\lambda = w_{(i)} \overset{i}{e}_\lambda, && w_i = w_\lambda A^\lambda_i = w_{(\lambda)} \overset{\lambda}{e}_i, \\ &A^{(\nu)}_{(\lambda)} = \underset{\lambda}{e}^{(\nu)} = \overset{\nu}{e}_{(\lambda)} = \begin{cases} 1, & \lambda = \nu, \\ 0, & \lambda \neq \nu, \end{cases} && A^{(k)}_{(i)} = \underset{i}{e}^{(k)} = \overset{k}{e}_{(i)} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \\ &A^{(k)}_\lambda = \overset{k}{e}_\lambda, \quad A^k_{(\lambda)} = \underset{\lambda}{e}^k && A^{(\nu)}_i = \overset{\nu}{e}_i, \quad A^\nu_{(i)} = \underset{i}{e}^\nu. \end{aligned}$$

Gehen wir bei dem Vektor dx zu anderen Bestimmungszahlen über, entstehen

$$(dx)^k = dx^\mu A^k_\mu, \tag{11}$$

e nicht dx^k, sondern $(dx)^k$ geschrieben werden sollen, um anzudeuten, aß sie im allgemeinen keine vollständigen Differentiale mehr sind und aß die $\overset{k}{x}$ dieselbe Rolle spielen wie die aus der Mechanik bekannten cht-holonomen Parameter, von denen auch nur die Differentiale einen nn haben. *Die Einführung des Systems* $\left(\begin{smallmatrix}k\\i\end{smallmatrix}\right)$ *bedeutet also die Einführung von nicht-holonomen Parametern in der* X_n. Aus (11) folgt als u. h. Bedingung für die Holonomität der Parameter

$$\boxed{\partial_{[\omega} A^k_{\mu]} = 0}; \quad \partial_\omega = \partial/\partial \overset{\omega}{x}. \tag{12}$$

§ 2.

Festlegung einer linearen Übertragung in bezug auf nicht-holonome Parameter.

Die X_n sei jetzt eine L_n, d. h. sie trage eine lineare nicht notwendig mmetrische Übertragung[11]) mit den Parametern $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ [11a]) in bezug auf das ystem $\left(\begin{smallmatrix}\nu\\\lambda\end{smallmatrix}\right)$. Beim Übergang zu dem System $\left(\begin{smallmatrix}k\\i\end{smallmatrix}\right)$ entsteht

$$\begin{aligned} \nabla_j v^k = A^{\mu k}_{j\nu} \nabla_\mu v^\nu &= A^{\mu k}_{j\nu} \partial_\mu v^\nu + A^{\mu k}_{j\nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda \\ &= \partial_j v^k + A^{\lambda \mu k}_{i\ j\ \nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^i + v^i A^k_\alpha \partial_j A^\alpha_i; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\partial_j = A^\mu_j \partial_\mu; \quad A^{\mu k}_{j\nu} = A^\mu_j A^k_\nu \text{ usw.}$$

etzen wir also

$$\boxed{\Lambda^k_{ij} = A^{\lambda \mu k}_{i\ j\ \nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + A^k_\alpha \partial_j A^\alpha_i = A^{\lambda \mu k}_{i\ j\ \nu} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - A^\alpha_i \partial_j A^k_\alpha}, \tag{14}$$

sind die Λ^k_{ij} die Parameter der Übertragung in bezug auf $\left(\begin{smallmatrix}k\\i\end{smallmatrix}\right)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_j v^k &= \partial_j v^k + \Lambda^k_{ij} v^i, \\ \nabla_j w_i &= \partial_j w_i - \Lambda^k_{ij} w_k. \end{aligned}} \tag{15}$$

---

[11]) Von nicht-überschiebungsinvarianten Übertragungen sehen wir hier ab; die rameter sind also für kovariante und für kontravariante Vektoren dieselben.

[11a]) Vektoren und Affinoren werden im folgenden stets mit lateinischen oder tischen Buchstaben bezeichnet, Skalare mit lateinischen oder kleinen griechischen chstaben. Indizes tragende griechische Buchstaben werden verwendet für Ausdrücke, e sich nicht transformieren wie die Bestimmungszahlen eines Vektors oder Affinors.

Aus (14) folgt

$$\boxed{A^k_{[ij]} = S_{ij}{}^k - A^{\beta\alpha}_{ji}\,\partial_{[\beta}A^k_{\alpha]}}\;; \qquad S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]} \tag{16}$$

und die n. u. h. Bedingung für die Holonomität der Parameter ist also nach (12):

$$\boxed{A^k_{[ij]} = S_{ij}{}^k}\,. \tag{17}$$

Auch wenn die Übertragung symmetrisch ist, sind die A^k_{ij} bei nicht-holonomen Parametern nicht symmetrisch in i und j, wie aus (16) hervorgeht. Aus derselben Gleichung folgt auch, daß $A^k_{[ij]}$ im nicht-holonomen Falle *kein Affinor* ist.

Die $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ sind bekanntlich die Bestimmungszahlen der kovarianten Differentialquotienten der Maßvektoren:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{*}{=} \nabla_\mu \underset{\lambda}{e}{}^{\nu}; \qquad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{*}{=} \nabla_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda\,. \tag{18}$$

Diese Eigenschaft kommt auch den A^k_{ij} zu, wie aus (15) folgt:

$$A^k_{ij} \overset{*}{=} \nabla_j \underset{i}{e}{}^{k}; \qquad A^k_{ij} \overset{*}{=} \nabla_j \overset{k}{e}_i\,, \tag{19}$$

wo das Zeichen $\overset{*}{=}$ bedeutet, daß die Gleichung nur in bezug auf das verwendete Bezugssystem gültig ist und nicht transformiert werden darf. Für jeden beliebigen Skalar p gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{[j}\nabla_{i]}\,p &= S_{ji}{}^k\,\nabla_k\,p\,,\\ \partial_{[\mu}\partial_{\lambda]}\,p &= 0\,,\\ \partial_{[j}\partial_{i]}\,p &= (A^k_{[ij]} - S_{ij}{}^k)\,\partial_k\,p\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Wählt man in einer V_n als kontravariante Maßvektoren in jedem Punkte n gegenseitig senkrechte Einheitsvektoren $\underset{i}{i}$, so ist dieses System selbstreziprok und die kovarianten Maßvektoren sind also den kontravarianten gleich

$$\overset{k}{i}_i = \underset{k}{i}_i = \underset{k}{i}^j\,g_{ij}\,. \tag{21}$$

In diesem viel vorkommenden, besonders von Ricci betrachteten Fall gehen die Parameter A^k_{ij} über in die von Ricci eingeführten und mit γ_{kij} bezeichneten *Rotationskoeffizienten*[12]) des gewählten Orthogonalnetzes, denn aus (19) folgt

$$A^k_{ij} = \gamma_{kij} = -\gamma_{ikj} \overset{*}{=} \nabla_j \underset{i}{i}{}^k\,. \tag{22}$$

---

[12]) Vgl. R. K., S. 178.

att $\gamma_{kij} = -\gamma_{ikj}$ werden wir lieber schreiben $\gamma^k_{ij} = -\gamma^i_{kj}$, damit die edeutung dieser Koeffizienten als Parameter einer nicht-holonomen Übertragung schärfer hervortritt. Fordern wir hier Holonomität der Parameter, soll γ^k_{ij} symmetrisch sein in i, j und alternierend in i, k, was offenbar ur möglich ist, wenn alle γ^k_{ij} verschwinden. Dies führt zum trivialen alle einer R_n mit einem orthogonalen kartesischen Koordinatensystem.

Es liegt nahe, auch in einer L_n zu versuchen, die Systeme so zu ählen, daß die Λ^k_{ij} verschwinden. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dies ur möglich ist, wenn die Gleichung

3) $$\nabla_\mu \overset{k}{e}_\lambda = 0$$

unabhängige Lösungen besitzt, d. h. also wenn die Krümmungsgröße

4) $$R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu = \partial_\mu \Gamma^\nu_{\lambda\omega} - \partial_\omega \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\varkappa\omega}\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\nu_{\varkappa\mu}\Gamma^\varkappa_{\lambda\omega}$$

erschwindet. Eine weniger strenge Forderung wäre, daß wenigstens $\Lambda^k_{(ij)}$ erschwände. Die Gleichungen

5) $$\nabla_{(\mu} \overset{k}{e}_{\lambda)} = 0$$

üßten dann n unabhängige Lösungen besitzen. In einer V_n wäre nun (25) e Killingsche Gleichung, und es gibt also in einer V_n nicht-holonome arameter mit Λ^k_{ij} alternierend in i, j, sofern es n unabhängige Vektorlder gibt, die eine infinitesimale Bewegung darstellen.

Für eine nicht-symmetrische Übertragung gilt[12a])

6) $$\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} v^\nu = -\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu v^\lambda + S_{\omega\mu}{}^\lambda \nabla_\lambda v^\nu$$

der, in bezug auf $\binom{k}{i}$

7) $$\nabla_{[l}\nabla_{j]} v^k = -\tfrac{1}{2} R_{lji}{}^k v^i + S_{lj}{}^i \nabla_i v^k.$$

ovariante Differentiation und Alternation von (15) lehren aber

8) $$\begin{aligned}\nabla_{[l}\nabla_{j]} v^k &= \partial_{[l}\partial_{j]} v^k + v^i \partial_{[l}\Lambda^k_{|i|j]} - \Lambda^i_{[jl]}\partial_i v^k \\ &\quad - \Lambda^m_{[jl]}\Lambda^k_{im} v^i + \Lambda^k_{m[l}\Lambda^m_{|i|j]} v_i \\ &= S_{lj}{}^i \nabla_i v^k - S_{lj}{}^h \Lambda^k_{ih} v^i - \Lambda^h_{[jl]}\Lambda^k_{ih} v^i + v^i\{\partial_{[l}\Lambda^k_{|i|j]} + \Lambda^k_{h[l}\Lambda^h_{|i|j]}\},\end{aligned}$$

oraus folgt:

9) $$R_{lji}{}^k = -2\partial_{[l}\Lambda^k_{|i|j]} - 2\Lambda^k_{h[l}\Lambda^h_{|i|j]} - 2(\Lambda^h_{[lj]} - S_{lj}{}^h)\Lambda^k_{ih},$$

ne Gleichung, die infolge (17) für holonome Parameter dieselbe Form nimmt als (24).

[12a]) R. K., S. 85.

In dem schon oben erwähnten Falle des mit Einheitsvektoren versehenen Orthogonalnetzes in V_n geht (29) über in die Gleichung

$$(30) \qquad K_{lji}^{\cdots k} = -2\partial_{[l}\gamma_{|i|j]}^{k} - 2\gamma_{h[l}^{k}\gamma_{|i|j]}^{h} - 2\gamma_{[lj]}^{h}\gamma_{ih}^{k},$$

welche die bekannte Beziehung zwischen den orthogonalen Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße und den Riccischen Rotationskoeffizienten darstellt.

§ 3.

X_m in L_n.

Wir betrachten eine X_m in X_n. In einem Punkte der X_m ist jeder kontravariante Vektor der X_m auch Vektor der X_n, aber nicht umgekehrt. Dagegen bestimmt jeder kovariante Vektor der X_n (darstellbar durch zwei parallele E_{n-1} in der lokalen E_n) durch Schnitt in eindeutiger Weise einen kovarianten Vektor der X_m (darstellbar durch zwei parallele E_{m-1} in der lokalen E_m), aber nicht umgekehrt. Wird die X_m „eingespannt", d. h. wird jedem Punkte der X_m eine $(n-m)$-Richtung zugeordnet, die keine Richtung mit der X_m gemeinsam hat, so hat in jedem Punkte der X_m jeder kontravariante Vektor der X_n eine „X_m-Komponente" (entstehend durch Projektion), jeder kovariante Vektor der X_m läßt sich identifizieren mit einem einzigen kovarianten Vektor der X_n (dessen E_{n-1} durch die E_{m-1} und die $(n-m)$-Richtung der Einspannung bestimmt sind), und jeder kovariante Vektor der X_n hat eine „X_m-Komponente" (bestimmt durch den Schnitt und die $(n-m)$-Richtung). Unter „kontravarianter Vektor der X_m" verstehen wir einen kontravarianten Vektor, der in der örtlichen m-Richtung liegt, unter „kovarianter Vektor der X_m" einen kovarianten Vektor, dessen $(n-1)$-Richtung die $(n-m)$-Richtung der Einspannung enthält. Jede „Größe der X_m" leitet sich in bekannter Weise aus den ko- und kontravarianten Vektoren der X_m ab.

Wir setzen im folgenden Einspannung voraus und wählen in X_n das System $\binom{k}{i}$ so, daß die m ersten Vektoren $\underset{a}{e}$, $a, \ldots, g = 1, \ldots, m$, in den Punkten der X_m in beliebiger Weise in der örtlichen m-Richtung von X_m liegen, die übrigen $\underset{p}{e}$, $p, \ldots, v = m+1, \ldots, n$, in denselben Punkten in beliebiger Weise in der $(n-m)$-Richtung der Einspannung. Im allgemeinen sind die $\overset{k}{x}$ nicht-holonome Parameter, während auch die $\overset{a}{x}$ innerhalb X_m nicht-holonome Parameter darstellen.

Setzen wir

$$(31) \qquad B_\lambda^\nu = \overset{a}{e}_\lambda \underset{a}{e}^\nu; \qquad C_\lambda^\nu = A_\lambda^\nu - B_\lambda^\nu = \overset{p}{e}_\lambda \underset{p}{e}^\nu,$$

ist B_λ^ν der Einheitsaffinor der X_m:

$$B_{(a)}^{(c)} = \begin{cases} 1, & a = c \\ 0, & a \neq c \end{cases} \qquad B_{(a)}^{(p)} = B_{(p)}^{(a)} = B_{(p)}^{(q)} = 0. \tag{32}$$

a für jedes in X_m liegendes Linienelement

$$dx^\nu = B_a^\nu (dx)^a, \tag{33}$$

t

$$\boxed{B_{(a)}^{(\nu)} = \underset{a}{e}^{(\nu)} = \overset{\nu}{e}_{(a)} = \partial \overset{\nu}{x} / \partial \overset{a}{x}}. \tag{34}$$

a die $n - m$ kovarianten Vektoren $\overset{p}{e}$ X_m-bildend sind, ist

$$B_{b\,a}^{\mu\lambda}\, \partial_{[\mu}\, \overset{p}{e}_{\lambda]} = 0. \tag{35}$$

Die X_m-Komponente eines Vektors der X_n wird analytisch festgelegt urch die Gleichungen

$$v'^\nu = B_\lambda^\nu v^\lambda; \qquad w'_\lambda = B_\lambda^\nu w_\nu \tag{36}$$

der in bezug auf $\binom{k}{i}$

$$v'^k = B_i^k v^i; \qquad w'_i = B_i^k w_k \tag{37}$$

der auch, unter Berücksichtigung von (32),

$$\begin{aligned} v'^{(c)} &= v^{(c)}; \qquad w'_{(a)} = w_{(a)}, \\ v'^{(p)} &= 0; \qquad w'_{(p)} = 0; \end{aligned} \tag{38}$$

n Worten:

Die Bestimmungszahlen der Komponente in bezug auf $\binom{k}{i}$ *sind die rsten m Bestimmungszahlen des Vektors in bezug auf* $\binom{k}{i}$.

Größen der X_n können nur griechische Buchstaben oder die Buchaben $h, \ldots, n$ als *laufende* Indizes tragen, Größen der X_m außerdem och die Buchstaben $a, \ldots, g$. Als *abgedrosselte* Indizes können $a, \ldots, g$ atürlich auch bei Größen der X_n vorkommen, z. B. rechts in (38). Ist also ein Vektor der X_n, v'^ν seine X_m-Komponente, so haben v'^c und $v^{(c)}$ nen Sinn, v^c dagegen nicht. Wir wollen sagen, daß eine Größe „mit nem laufenden Index $_\lambda$ bzw. $^\nu$ zu X_m gehört", wenn Überschiebung mit C_λ^ν die Größe nicht ändert. Ebenso, daß sie „mit usw. zur $(n - m)$-Richung der Einspannung gehört", wenn sie sich nicht ändert bei Überschiung mit C_λ^ν. Für die Verwendung der *laufenden* Indizes $a, \ldots, g$ bzw. $, \ldots, v$ gilt dann, daß eine Größe nur dann statt eines bestimmten laenden griechischen Index einen der laufenden Indizes $a, \ldots, g$ bzw. $p, \ldots, v$

tragen kann, wenn sie eben mit diesem Index zu X_m bzw. zur $(n-m)$-Richtung der Einspannung gehört. Gehört eine Größe mit allen Indizes zu X_m, so ist sie laut Definition Größe der X_m.

§ 4.

Die in X_m in L_n induzierte Übertragung.

Wir setzen jetzt voraus, daß die X_n eine L_n ist und definieren die „in X_m induzierte Übertragung“ folgendermaßen:

Das kovariante Differential eines Feldes von Größen der X_m in bezug auf ein in X_m gelegenes Linienelement dx^ν ist die X_m-Komponente der kovarianten Ableitung in L_n.

Bezeichnen wir die beiden Differentiale mit δ' und δ, so ist also für Vektoren der X_m

$$\begin{aligned} \delta' v^\nu &= B^\nu_\lambda \, dv^\lambda + B^\nu_\gamma \, \Gamma^\gamma_{\lambda\mu} \, v^\lambda \, dx^\mu \\ \delta' w_\lambda &= B^\nu_\lambda \, dw_\nu - B^\alpha_\lambda \, \Gamma^\nu_{\alpha\mu} \, w_\nu \, dx^\mu \end{aligned} \tag{39}$$

oder in bezug auf $\binom{k}{i}$

$$\begin{aligned} \delta' v^k &= B^k_i \, dv^i + B^k_l \, \Lambda^l_{ij} \, v^i (dx)^j, \\ \delta' w_i &= B^k_i \, dw_k - B^l_i \, \Lambda^k_{lj} \, w_k (dx)^j, \end{aligned} \tag{40}$$

welche Gleichung sich aber, da sich alles innerhalb X_m abspielt, auch mit den laufenden Indizes $a, \ldots, g$ schreiben läßt:

$$\begin{aligned} \delta' v^c &= dv^c + \Lambda^c_{ab} v^a (dx)^b, \\ \delta' w_a &= dw_a - \Lambda^c_{ab} w_c (dx)^b. \end{aligned} \tag{41}$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn wir die Parameter der induzierten Übertragung durch Λ'^c_{ab} darstellen:

$$\Lambda'^c_{ab} = \Lambda^c_{ab} \tag{42}$$

und unter Berücksichtigung von (14)

$$\boxed{\Lambda'^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} + B^c_a \partial_b B^a_a}. \tag{43}$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Alternation

$$\Lambda'^c_{[ab]} = S^{\cdot\cdot c}_{ab} - B^{\beta a}_{ba} \, \partial_{[\beta} B^c_{a]} \tag{44}$$

und ein Vergleich mit (16) lehrt, daß die für die Asymmetrie der induzierten Übertragung charakteristische Größe $S'^{\cdot\cdot c}_{ab}$ die X_m-Komponente von $S^{\cdot\cdot k}_{ij}$ ist:

$$S'^{\cdot\cdot c}_{ab} = B^{ijc}_{abk} \, S^{\cdot\cdot k}_{ij}. \tag{45}$$

Was nun die kovarianten Ableitungen betrifft, kann bemerkt werden, aß $\nabla_\mu v^\nu$ und $\nabla_\mu w_\lambda$ für sich keine Bedeutung haben, da v^ν und w_λ nur ber X_m definiert zu sein brauchen, dagegen $B^a_\mu \nabla_a v^\nu$ und $B^a_\mu \nabla_a w_\lambda$ ollkommen definiert sind durch die Gleichungen

$$\delta v^\nu = dx^\mu B^a_\mu \nabla_a v^\nu, \tag{46}$$
$$\delta w_\lambda = dx^\mu B^a_\mu \nabla_a w_\lambda,$$

o dx^μ ein in der X_m gelegenes Linienelement darstellt, während $\nabla_\mu v^\nu$ nd $\nabla_\mu w_\lambda$ stets eine mit diesen Gleichungen verträgliche Bedeutung erhalen, wenn man die Felder in beliebiger Weise kontinuierlich in L_n fortetzt. Es ist also, wenn ∇' das Zeichen der kovarianten Differentiation X_m ist,

$$\nabla'_b v^c = B^{jc}_{bk} \nabla_j v^k, \tag{47}$$
$$\nabla'_b w_a = B^{ji}_{ba} \nabla_j w_i,$$

der unter Berücksichtigung von (32), wenn $v'^{\cdot c}_{b} = \nabla'_b v^c$, $w'_{ba} = \nabla'_b w_a$, $^k = \nabla_j v^k$, $w_{ji} = \nabla_j w_i$,

$$v'^{\cdot (c)}_{(b)} = v^{\cdot (c)}_{(b)}, \tag{48}$$
$$w'_{(b)(a)} = w_{(b)(a)}.$$

ie kovariante Ableitung in X_m ist also stets, unabhängig von der Weise, ie man sich das Feld in L_n fortgesetzt denkt, die X_m-Komponente der ovarianten Ableitung in L_n.

Die für die Krümmungsverhältnisse einer X_m in L_n in Betracht komenden Größen sind, sofern es Krümmungen erster Ordnung betrifft:

1. Der erste Krümmungsaffinor

$$H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B^{ji}_{ba} \nabla_j B^\nu_i = - B^{ji}_{ba} (\nabla_j \overset{p}{e}_i) \overset{\nu}{e}_p. \tag{49}$$

iese Größe gehört mit dem Index ν zur $(n-m)$-Richtung der Einspanung, d. h. die Größe ändert sich nicht bei Überschiebung mit C^λ_ν. Da folge (35) und (16)

$$H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]} = - B^{\beta a}_{ba} \nabla_{[\beta} \overset{p}{e}_{a]} \overset{\nu}{e}_p = - B^{\beta a}_{ba} S^{\cdot\cdot\gamma}_{\beta a} \overset{p}{e}_\gamma \overset{\nu}{e}_p = - B^{\beta a}_{ba} C^\nu_\gamma S^{\cdot\cdot\gamma}_{\beta a}, \tag{50}$$

erschwindet sein in b, a alternierender Teil, wenn die Übertragung symetrisch ist, während im allgemeinen Falle infolge (45)

$$H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]} + B^{\beta a}_{ba} S^{\cdot\cdot\nu}_{\beta a} = B^{\beta a \nu}_{ba\gamma} S^{\cdot\cdot\gamma}_{\beta a} = S'^{\cdot\cdot\nu}_{ba}. \tag{51}$$

$H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]}$ hängt also nur von $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ und von der Einspannung ab, nicht on dem symmetrischen Teil $\Gamma^\nu_{(\lambda\mu)}$ der Parameter der Übertragung in L_n.

2. Der zweite Krümmungsaffinor

$$L_{b\cdot\lambda}^{\cdot c} = B_{bk}^{jc} \nabla_j B_\lambda^k = - B_{bk}^{jc} (\nabla_j \underset{p}{e}^k) \overset{p}{e}_\lambda , \tag{52}$$

der mit dem Index λ zur $(n-m)$-Richtung der Einspannung gehört.

3. Die Krümmungsgröße der X_m

$$R'^{\cdot\cdot\cdot\cdot c}_{\cdot\cdot\cdot\cdot} = - 2\,\partial_{[d} A^c_{|a|\,b]} - 2\,A^c_{e[d} A^e_{|a|\,b]} - 2\,(A^e_{[db]} - S_{db}^{\cdot\cdot e})\,A^c_{ae} . \tag{53}$$

Die Beziehungen zwischen diesen drei Größen und $R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}$ bilden den erweiterten Gaußschen Satz[13]):

$$B^{lji c}_{dbak} R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} = R'^{\cdot\cdot\cdot\cdot c}_{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 2\,H_{a[b}^{\cdot\cdot i} L_{d].i}^{\cdot c} , \tag{54}$$

dessen Form, wie man sieht, durch die Asymmetrie der Übertragung nicht beeinflußt wird[14]).

§ 5.

X_n^m in X_n.

Statt der X_m legen wir jetzt in X_n ein anderes Gebilde hinein. Jedem Punkte der X_n sei in allgemeinster Weise eine m-Richtung zugeordnet. Das entstehende m-Richtungsfeld ist im allgemeinen nicht X_m-bildend, d. h. die m-Richtungen lassen sich nicht so aneinanderreihen, daß $\infty^{n-m} X_m$ entstehen. Es existiert aber stets eine kleinste Zahl M, $m < M \leqq n$, so daß es $\infty^{n-M} X_M$ gibt mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkte die m-Richtung in der örtlichen M-Richtung enthalten ist. Wir setzen voraus $M = n$ und sehen somit von den Vereinfachungen ab, die sich ergeben für $M < n$. Eine solche mit einem m-Richtungsfeld ausgestattete X_n soll X_n^m heißen.

Eine X_n^m heißt „eingespannt", wenn in jedem Punkte der X_n eine $(n-m)$-Richtung gegeben ist, die keine Richtung mit der örtlichen m-Richtung gemeinsam hat. Die Komponentenbildung geht bei einer eingespannten X_n^m in derselben Weise vor sich wie bei einer X_m in X_n. Ebenso die Definition der „Größen der X_n^m", der Größen, die „mit einem Index zu X_n^m gehören", und der Größen, die „mit einem Index zur $(n-m)$-Richtung der Einspannung gehören".

Das System $\left(\begin{smallmatrix} k \\ i \end{smallmatrix}\right)$ sei jetzt so gewählt, daß die m ersten Vektoren $\underset{a}{e}^\nu$ in beliebiger Weise in der örtlichen m-Richtung liegen, die übrigen $\underset{p}{e}^\nu$

[13]) Hlavaty, Contribution au calcul différentiel absolu, Vestn. Král. Ceske Spol. Nauk. 2 (1926), p. 1—12.

[14]) Vgl. R. K., S. 160.

benfalls in beliebiger Weise in der $(n-m)$-Richtung der Einspannung. ie $\overset{k}{y}$ sind dann nichtholonome Parameter in X_n. Die Gleichungen (31), 32), (34) bleiben gültig, ebenso die Gleichungen (36), (37), (38) der komponentenbildung; dagegen verliert die Gleichung (35) ihre Gültigkeit, a die $\overset{p}{e}_\lambda$ nicht mehr X_m-bildend sind.

§ 6.

Die in X_n^m in L_n induzierte Übertragung.

Setzen wir voraus, daß die X_n eine L_n ist und definieren wir die in X_n^m induzierte Übertragung wie auf S. 158, so gelten auch hier die Gleichungen (39) und (40) und in derselben Weise wie dort gilt also für Vektoren der X_n^m

35) (vgl. 41)
$$\delta' v^c = dv^c + \Lambda^c_{ab} v^a (dx)^b,$$
$$\delta' w_a = dw_a - \Lambda^c_{ab} w_c (dx)^b,$$

sowie

36) (vgl. 42)
$$\Lambda'^c_{ab} = \Lambda^c_{ab}$$

und

37) (vgl. 43)
$$\boxed{\Lambda'^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} + B^c_\nu \partial_b B^\nu_a},$$

Eine mit einer linearen Übertragung ausgestattete X_n^m soll L_n^m heißen. Es liegt also jetzt eine L_n^m mit einer durch Induktion zustande gekommenen Übertragung vor. Ist p ein über L_n definiertes Skalarfeld, so ist

38)
$$\nabla'_{[b}\nabla'_{a]}\, p = B^{\beta a}_{[ba]} \nabla_\beta B^\gamma_\alpha \nabla_\gamma p = B^{\beta a}_{ba} S_{\beta a}{}^{\cdot\cdot\gamma} \nabla_\gamma p + H_{[ba]}{}^{\cdot\gamma} \nabla_\gamma p$$
$$= S'_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu} \nabla_\nu p + Z_{ab}{}^{\cdot\nu} \nabla_\nu p,$$

wenn wir auch hier wie auf S. 158 bzw. 159

39) (vgl. 45)
$$S'_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu} = B^{\beta a \nu}_{ba\gamma} S_{\beta a}{}^{\cdot\gamma},$$

40) (vgl. 49)
$$H_{ba}{}^{\cdot\nu} = B^{\beta a}_{ba} \nabla_\beta B^\nu_a = - B^{\beta a}_{ba} (\nabla_\beta \overset{p}{e}_a) \overset{\nu}{e}_p$$

setzen und außerdem

41)
$$Z_{ba}{}^{\cdot\nu} = B^{\beta a}_{ba} C^\nu_\nu S_{\beta a}{}^{\cdot\gamma} + H_{[ba]}{}^{\cdot\nu} = - B^{\beta a}_{ba} (\partial_{[\beta} \overset{p}{e}_{a]}) e^\nu.$$

Aus (61) folgt, daß $Z_{ba}{}^{\cdot\nu}$ *unabhängig von der Übertragung in der* L_n *ist*, mit dem Index ν in der Richtung der Einspannung liegt und dann und nur dann verschwindet, wenn alle Ausdrücke $B^{\beta a}_{ba} \partial_{[\beta} \overset{p}{e}_{a]}$ Null sind, d. h. wenn das m-Richtungsfeld X_m-bildend ist. $Z_{ba}{}^{\cdot\nu}$ ist also maßgebend für

die *Anholonomität* der L_n^m, $S'^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$ für die *Asymmetrie* der induzierten Übertragung. Aus (58), (59) und (61) folgt

$$(62)\qquad \begin{aligned}\partial_{[b}\partial_{a]}p &= (\Lambda^c_{[ab]} + S'^{\cdot\cdot c}_{[ba}\,)\partial_c p + Z^{\cdot\cdot\nu}_{ba}\nabla_\nu p\\ &= \Lambda^c_{[ab]}\partial_c p + (B^{\beta a}_{ba}S^{\cdot\cdot\nu}_{\beta a} + H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]})\nabla_\nu p.\end{aligned}$$

§ 7.

Krümmungseigenschaften einer L_n^m in L_n.

Bei der Behandlung der Krümmungsverhältnisse einer L_n^m in L_n treten folgende Größen auf:

1. Der erste Krümmungsaffinor

$$(63)\qquad H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B^{\beta a}_{ba}\nabla_\beta B^\nu_a = -B^{\beta a}_{ba}(\nabla_\beta \overset{p}{e}_a)\overset{\nu}{e}_p;\qquad H_{ba}^{\cdot\cdot p} \overset{*}{=} \Lambda^p_{ab},$$

schon auf S. 161 verwendet. An Stelle von (51) tritt hier infolge (61)

$$(64)\qquad H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]} + B^{\beta a}_{ba}S^{\cdot\cdot\nu}_{\beta a} = S'^{\cdot\cdot\nu}_{ba} + Z^{\cdot\cdot\nu}_{ba}.$$

Da $Z^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$ nur von der Einspannung und nicht von der Übertragung in L_n abhängt (S. 161), *hängt $H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]}$ nur von $S^{\cdot\cdot\nu}_{i\mu}$ und der Einspannung ab, nicht von dem symmetrischen Teile $\Gamma^\nu_{(\lambda\mu)}$ der Parameter der Übertragung in L_n* (vgl. S. 159). Im symmetrischen Falle wird $H^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]}$ gleich $Z^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$ und hängt *nur noch von der Einspannung ab.*

2. Der zweite Krümmungsaffinor

$$(65)\qquad L^{\cdot c}_{b\cdot\lambda} = B^{\beta c}_{b\gamma}\nabla_\beta B^\gamma_\lambda = -B^{\beta c}_{b\gamma}(\nabla_\beta \overset{\gamma}{e}_p)\overset{p}{e}_\lambda;\qquad L^{\cdot c}_{b\cdot p} \overset{*}{=} -\Lambda^c_{pb}.$$

3. Die Krümmungsgröße, die wir jetzt definieren wollen. Die gewöhnliche Methode ist hier unbrauchbar, da sich in einer L_n^m *kein infinitesimales Parallelogramm konstruieren* läßt. Führt man nämlich einerseits zuerst eine Verrückung $\overset{c}{d}x$ aus und dann eine Verrückung $\overset{c}{d}x$, anderseits dasselbe in umgekehrter Reihenfolge, so findet man unter Verwendung von (57) und (61) für den schließenden Vektor die Gleichung

$$(66)\qquad \begin{aligned}2(\overset{1}{d}x)^a(\overset{2}{d}x)^b\partial_{[b}B^\nu_{a]} &= 2(\overset{1}{d}x)^a(\overset{2}{d}x)^b(Z^{\cdot\cdot\nu}_{ba} + B^\nu_\lambda\partial_{[b}B^\lambda_{a]})\\ &= 2(\overset{1}{d}x)^a(\overset{2}{d}x)^b(Z^{\cdot\cdot\nu}_{ba} - \Lambda^c_{[ba]}B^\nu_c + S'^{\cdot\cdot\nu}_{ba}),\end{aligned}$$

die die Zerlegung dieses Vektors darstellt in einer Komponente in der L_n^m und einer Komponente in der $(n-m)$-Richtung der Einspannung. Die erste Komponente verschwindet dann und nur dann, wenn das m-Richtungsfeld X_m-bildend ist. Ist dies der Fall, so verschwindet die zweite Komponente dann und nur dann, wenn die $\overset{c}{x}$ holonome Parameter sind, wie aus (62) folgt.

Wir schlagen also einen anderen Weg ein und bestimmen die Größe $\nabla'_{[b]} v^c$, wo v^c ein Vektor der L_n^m ist. Aus (55) folgt unter Verwendung n (62)

$$\nabla'_{[d}\nabla'_{b]} v^c = \partial_{[d}\partial_{b]} v^c - \Lambda^a_{[b\,d]}\partial_a v^c + (\partial_{[d}\Lambda^c_{|a|\,b]})\, v^a$$

7) $$- \Lambda^a_{[b\,d]}\Lambda^c_{ea}\, v^e + \Lambda^c_{a[d}\Lambda^a_{|e|\,b]} v^e$$

$$= (S'^{\dot{a}\dot{b}\dot{\mu}} + Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{\mu}})\, B^c_{\dot{\lambda}} \nabla_u v^\lambda + \{\partial_{[d}\Lambda^c_{|a|\,b]} + \Lambda^c_{e[d}\Lambda^e_{|a|\,b]} + \Lambda^e_{[d\,b]}\Lambda^c_{ae}$$

$$- S'^{\dot{a}\dot{b}\dot{e}}\Lambda^c_{ae} - Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{p}}\Lambda^c_{ap}\}\, v^a.$$

Die vier ersten Terme zwischen den geschweiften Klammern rechts den für $Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{p}} + 0$ keinen Affinor mehr. Wir nehmen also den Term mit $\dot{b}^p$ dazu und definieren die Krümmungsgröße folgendermaßen:

8) $$\boxed{\begin{aligned} 1/2\, R'^{\dot{a}\dot{b}\dot{a}\dot{c}} = &- \partial_{[d}\Lambda^e_{|a|\,b]} - \Lambda^c_{e[d}\Lambda^e_{|a|\,b]} - \Lambda^e_{[d\,b]}\Lambda^c_{a\,e} \\ &+ S'^{\dot{a}\dot{b}\dot{e}}\Lambda^c_{ae} + Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{p}}\Lambda^c_{ap}. \end{aligned}}$$

nn gilt die Gleichung

9) $$\boxed{2\nabla'_{[d}\nabla'_{b]} v^c - 2(S'^{\dot{a}\dot{b}\dot{\mu}} + Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{\mu}})\, B^c_{\dot{\lambda}} \nabla_\mu v^\lambda = - R'^{\dot{a}\dot{b}\dot{a}\dot{c}} v^a}.$$

Bei einer symmetrischen Übertragung verschwindet $S'^{\dot{\lambda}\dot{\mu}\dot{\nu}}$ und wird $\dot{b}^\nu = H_{[\dot{a}\dot{b}]}{}^\nu$.

Zusatz bei der Korrektur, 19. 8. 1928:

Die also definierte Krümmungsgröße ist, wie aus dem dritten Term ks in (69) deutlich hervorgeht, nicht nur von der Übertragung in der und von der Einspannung, sondern auch noch von der Übertragung der L_n abhängig. Es läßt sich aber eine Größe angeben, die von ser letzten Übertragung unabhängig ist. Für ein kovariantes Feld w_a X_n^m gilt die (67) entsprechende Gleichung

9a) $$2\nabla'_{[d}\nabla'_{b]} w_a - 2(S'^{\dot{a}\dot{b}\dot{\omega}} + Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{\omega}})\, B^\mu_a \nabla_\omega w_\mu = R'^{\dot{a}\dot{b}\dot{a}\dot{c}} w_c$$

d daraus folgt

9b) $$\nabla'_{[d}\nabla'_{b]} w_a = S'^{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}\nabla'_c w_a + 2 Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{\omega}} B^\mu_a \partial_{[\omega} w_{\mu]} + \frac{1}{2}\overset{*}{R}{}'^{\dot{a}\dot{b}\dot{a}\dot{c}} w_c,$$

9c) $$\overset{*}{R}{}'^{\dot{a}\dot{b}\dot{a}\dot{c}} = R'^{\dot{a}\dot{b}\dot{a}\dot{c}} + Z^{\dot{a}\dot{b}\dot{\beta}}(4 B^{ac}_{a\gamma} S^{\cdot\gamma}_{\beta a} + 2 L^{\cdot c}_{a\cdot\beta}).$$

e Größe $\overset{*}{R}{}'$ ist, wie aus den drei anderen Termen der Gleichung (69b) vorgeht, *nur abhängig von der Übertragung in der L_n^m und von der*

Einspannung. Für den symmetrischen Fall wird

$$\frac{1}{2}\overset{*}{R}'^{\dot{c}}_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}\dots} = -\partial_{[\dot{d}}\Lambda^{c}_{(a)\dot{b}]} - \Lambda^{c}_{e[\dot{d}}\Lambda^{e}_{(a)\dot{b}]} - \Lambda^{c}_{[\dot{d}\dot{b}]}\Lambda^{e}_{ae} + H_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{p}\, L^{c}_{a.p} = \frac{1}{2}R'^{\dot{c}}_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}\dots} + H_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{p}\, L^{c}_{a.p} \tag{69d}$$

und

$$\nabla'_{[\dot{d}}\nabla_{\dot{b}]}w_a = 2H_{[\dot{d}\dot{b}]}{}^{\omega}\, B^{\mu}_{a}\,\partial_{[\omega}w_{\mu]} + \frac{1}{2}\overset{*}{R}'^{\dot{c}}_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}\dots}w_c. \tag{69e}$$ [14a])

§ 8.

Die Gaußische Gleichung für L^{l}_{m} in L_n.

Für eine L^{m}_{n} in L_n lassen sich wie für eine L_m in L_n [15]) die Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci aufstellen. Wir wollen hier gleich den allgemeineren Fall behandeln, wo eine in X_m eingespannte X^{l}_{m} in L_n eingespannt ist. Die X_m geht dabei durch Induktion über in eine L_m. Die X^{l}_{m} geht in eine L^{l}_{m} über, und zwar in doppelter Weise, einmal als Gebilde der L_m und einmal als Gebilde der L_n. Es ist aber klar, daß die beiden in dieser Weise in der X^{l}_{m} induzierten Übertragungen identisch sind, da die X^{l}_{m}-Komponente eines Vektors der L_n mit der X^{l}_{m}-Komponente der X_m-Komponente identisch ist.

Wir legen die kontravarianten Maßvektoren $\underset{1}{e}{}^{\nu}, \dots, \underset{n}{e}{}^{\nu}$ folgendermaßen fest:

$$\begin{aligned}
&\underset{a}{e}{}^{\nu},\ a, \dots, g = 1, \dots, m \text{ in } L_m\\
&\underset{p}{e}{}^{\nu},\ p, \dots, v = m+1, \dots, n \text{ in der } (n-m)\text{-Richtung der Einspannung}\\
&\underset{\mathfrak{a}}{e}{}^{\nu},\ \mathfrak{a}, \dots, \mathfrak{g} = 1, \dots, l \text{ in } L^{l}_{m} \qquad (70)\\
&\underset{\mathfrak{p}}{e}{}^{\nu},\ \mathfrak{p}, \dots, \mathfrak{v} = l+1, \dots, n\\
&\underset{A}{e}{}^{\nu},\ A, \dots, G = l+1, \dots, m \text{ in der } (m-l)\text{-Richtung der Einspannung}
\end{aligned}$$

[14a]) Für den Fall, daß $L_n = V_n$ ist, ist Vranceanu auf einem scheinbar ganz anderen Wege, nämlich durch Erörterung gewisser Transformationen, denen die Einheitsvektoren $\binom{k}{i}$ unterworfen werden, zu der $\overset{*}{K}'$ entsprechenden Größe gelangt. Erst bei einer mündlichen Auseinandersetzung in Bologna wurde mir klar, daß diese mir schon im Mai 1928 durch Herrn Vranceanu brieflich angedeuteten Transformationen sich decken mit den weiter unten erörterten Transformationen von $g_{\lambda\mu}$, die sowohl die V^{m}_{n}-Komponente $g'_{\lambda\mu}$ als die Einspannung und somit auch (vgl. S. 168) die Übertragung der V^{m}_{n} invariant lassen, und es erwuchs mir gleichzeitig die Überzeugung, daß es auch im Falle der L^{m}_{n} eine von der Übertragung in der L_n unabhängige Krümmungsgröße (eben die hier aufgedeckte Größe $\overset{*}{R}'$) geben mußte.

[15]) Hlavaty, a. a. O.

erner sei

$$B_\lambda^\nu = \text{Einheitsaffinor der } X_m; \quad C_\lambda^\nu = A_\lambda^\nu - B_\lambda^\nu$$

1) $$B'^\nu_\lambda = \quad \text{„} \quad \text{„} \; X^l_m; \quad C'^\nu_\lambda = A^\nu_\lambda - B'^\nu_\lambda$$

$$E^\nu_\lambda = B^\nu_\lambda - B'^\nu_\lambda; \quad A^\nu_\lambda = B'^\nu_\lambda + E^\nu_\lambda + C^\nu_\lambda.$$

Für die L_m gelten dann zunächst die Gleichungen der §§ 3, 4 und es eten darin u. a. die dort definierten Größen $S'^{\cdot\cdot c}_{ab}$, $H^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$, $L^{\cdot c}_{b\cdot\lambda}$, $R'^{\cdot\cdot\cdot c}_{dba}$ f. Wird die kovariante Differentiation in der L^l_m mit δ'', ∇'' angedeutet nd die zugehörigen Parameter mit Λ''^c_{ab}, so folgt aus (42), (55), (56) und (57)

2) $$\delta'' v^c = dv^c + \Lambda^c_{ab} v^a (dx)^b$$
$$\delta'' w_a = dw_a - \Lambda^c_{ab} w_c (dx)^b$$

3) $$\Lambda''^c_{ab} = \Lambda'^c_{ab} = \Lambda^c_{ab}$$

nd

4) $$\Lambda''^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} + B'^c_\nu \partial_b B'^\nu_a.$$

Die Krümmungsgrößen der L^l_m in L_n seien mit $H'^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$, $L'^{\cdot c}_{b\cdot\nu}$ bezeichnet, die Krümmungsgrößen der L^l_m in L_m dagegen mit $H''^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$, $L''^{\cdot c}_{b\cdot\lambda}$:

5) $$H'^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B'^{\beta a}_{ba} \nabla_\beta B'^\nu_a$$
$$L'^{\cdot c}_{b\cdot\lambda} = B'^{\beta c}_{b\gamma} \nabla_\beta B'^\gamma_\lambda$$

6) $$H''^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B'^{\beta a}_{ba} \nabla'_\beta B'^\nu_a = B^\nu_\gamma H'^{\cdot\cdot\gamma}_{ba}$$
$$L''^{\cdot c}_{b\cdot\lambda} = B'^{\beta c}_{b\gamma} \nabla'_\beta B'^\gamma_\lambda = B^a_\lambda L'^{\cdot c}_{b\cdot a}$$

s gilt also der Satz:

Die erste (zweite) Krümmungsgröße einer L^l_m in L_n in bezug auf L_m t die L_m-Komponente der ersten (zweiten) Krümmungsgröße der L^l_m in zug auf L_n.

Ferner folgt

7) a) $$H'^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B'^{ba}_{ba} H^{\cdot\cdot\nu}_{ba} + H''^{\cdot\cdot\nu}_{ba}$$
b) $$L'^{\cdot c}_{b\cdot\lambda} = B'^{bc}_{bc} L^{\cdot c}_{b\cdot\lambda} + L''^{\cdot c}_{b\cdot\lambda}$$

Setzen wir ähnlich wie auf S. 161 (vgl. (61))

8) $$Z''^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B'^{\beta a}_{ba} C'^\nu_\gamma S^{\cdot\cdot\gamma}_{\beta a} + H'^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]} = -B'^{\beta a}_{ba} (\partial_{[\beta} \overset{p}{e}_{a]}) \overset{e}{p}{}^\nu$$
$$= -B'^{\beta a}_{ba} (\partial_{[\beta} \overset{p}{e}_{a]}) \overset{e}{p}{}^\nu$$

leichbedeutend mit (vgl. (64))

9) $$Z''^{\cdot\cdot\nu}_{ba} + S''^{\cdot\cdot\nu}_{ba} = B'^{\beta a}_{ba} S^{\cdot\cdot\nu}_{\beta a} + H'^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]} = B'^{\beta a}_{ba} S''^{\cdot\cdot\nu}_{\beta a} + H''^{\cdot\cdot\nu}_{[ba]},$$
$$S''^{\cdot\cdot c}_{ba} = B''^{\beta a c}_{ba\lambda} S^{\cdot\cdot\lambda}_{\beta a},$$

dann ist (vgl. (58))

$$(80)\qquad \nabla''_{[b}\nabla''_{a]}p = S''^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{ba}\nabla_\nu p + Z''^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{ba}\nabla_\nu p$$

und (vgl. (62))

$$(81)\qquad \partial_{[b}\partial_{a]}p = (\Lambda^c_{[ab]} + S''^{\cdot\cdot\cdot c}_{ba})\partial_c p + Z''^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{ba}\nabla_\nu p$$
$$= \Lambda^c_{[ab]}\partial_c p + (B'^{\beta a}_{ba}S_{\beta\dot\alpha}{}^{\cdot\cdot\nu} + H'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{ba})\nabla_\nu p.$$

§ 9.

Die Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci für L^l_m in L_n.

Laut Definition der kovarianten Differentiation in L^l_m ist

$$(82)\qquad \nabla''_{[\omega}\nabla''_{\mu]}v^\nu = B'^{\delta\varepsilon\nu}_{[\omega\mu]\eta}\nabla_\delta B'^{\beta\eta}_{\varepsilon\gamma}\nabla_\beta v^\gamma$$
$$= H'^{\cdot\cdot\cdot\beta}_{[\omega\mu]}B'^{\nu}_{\gamma}\nabla_\beta v^\gamma + B'^{\beta}_{[\mu}L'^{\cdot\cdot\nu}_{\omega].\gamma}\nabla_\beta v^\gamma + B'^{\delta\beta\nu}_{\omega\mu\gamma}\nabla_{[\delta}\nabla_{\beta]}v^\gamma,$$

so daß (vgl. (26))

$$(83)\qquad \nabla''_{[\omega}\nabla''_{\mu]}v^\nu - H'^{\cdot\cdot\cdot a}_{[\omega\mu]}B'^{\nu}_{\gamma}\nabla_a v^\gamma$$
$$= L'^{\cdot\cdot\nu}_{[\omega\cdot|\gamma|}H'^{\cdot\cdot\cdot\gamma}_{\mu]a}v^a - 1/2\,B'^{\delta\beta\nu}_{\omega\mu\gamma}R_{\delta\dot\beta a}{}^{\cdot\cdot\gamma}v^a + B'^{\delta\beta\nu}_{\omega\mu\gamma}S_{\delta\dot\beta}{}^{\cdot\cdot a}\nabla_a v^\gamma.$$

Unter Berücksichtigung von (50), (77a) und (79) folgt also

$$(84)\qquad \boxed{R''^{\cdot\cdot\cdot c}_{bba} = B'^{\delta\beta ac}_{bba\gamma}R_{\delta\dot\beta a}{}^{\cdot\cdot\gamma} + 2H'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{a[b}L'^{c}_{b].\nu}},$$

wo $R''^{\cdot\cdot\cdot c}_{bba}$ in bezug auf L_n so definiert ist wie $R'^{\cdot\cdot\cdot c}_{bba}$ in (69) und (Zusatz bei der Korrektur, vgl. (69d)):

$$(84a)\qquad \overset{*}{R}''^{\cdot\cdot\cdot c}_{bba} = B'^{\delta\beta ac}_{bba\gamma}R_{\delta\dot\beta a}{}^{\cdot\cdot\gamma} + 2H'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{a[b}L'^{c}_{b].\nu} + Z''^{\cdot\cdot p}_{bb}(4C'^{\pi}_{p}B'^{ac}_{a\gamma}S_{\pi\dot\alpha}{}^{\cdot\cdot\gamma} + 2L'^{c}_{bp}).$$

Wir sehen also, daß die Gleichungen von Gauß für eine L^l_m in L_n dieselbe einfache Form haben wie die Gleichungen für A_l in A_n [16]).

Zur Ableitung der Gleichungen von Codazzi schreiben wir

$$(85)\qquad \overset{\flat}{h}'_{\mu\lambda} = B'^{\beta a}_{\mu\lambda}\nabla_\beta \overset{\flat}{e}_a,$$

so daß

$$(86)\qquad H'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = -\overset{\flat}{h}'_{\mu\lambda}\overset{\flat}{e}{}^\nu, \qquad H'^{\cdot\cdot\cdot(\flat)}_{\mu\lambda} = -\overset{\flat}{h}'_{\mu\lambda},$$
$$H''^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = -\overset{A}{h}'_{\mu\lambda}\overset{A}{e}{}^\nu, \qquad H''^{\cdot\cdot\cdot A}_{\mu\lambda} = -\overset{A}{h}'_{\mu\lambda}.$$

Sodann ist

$$(87)\qquad \nabla''_{[\omega}\overset{\flat}{h}'_{\mu]\lambda} = B'^{\delta\eta\varepsilon}_{[\omega\mu]\lambda}\nabla_\delta B'^{\beta a}_{\eta\varepsilon}\nabla_\beta \overset{\flat}{e}_a$$
$$= H'^{\cdot\cdot\cdot\beta}_{[\omega\mu]}B^a_\lambda\nabla_\beta \overset{\flat}{e}_a + H'^{\cdot\cdot\cdot a}_{[\omega|\lambda|}B'^{\beta}_{\mu]}\nabla_\beta \overset{\flat}{e}_a + 1/2\,B'^{\delta\beta a}_{[\omega\mu]\lambda}R_{\delta\dot\beta a}{}^{\cdot\cdot\gamma}\overset{\flat}{e}_\gamma$$
$$+ B'^{\delta\beta a}_{\omega\mu\lambda}S_{\delta\dot\beta}{}^{\cdot\cdot\gamma}\nabla_\gamma \overset{\flat}{e}_a$$

---

[16]) Vgl. R. K., S. 160.

der unter Berücksichtigung von (51), (77a) und (79)

$$\boxed{\begin{aligned} V''_{[\mathfrak{b}} \overset{\mathfrak{p}}{h}{}'_{\mathfrak{b}]\mathfrak{a}} &= (S''_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{}^{\beta} + Z''_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{}^{\beta}) B'^{\alpha}_{\mathfrak{a}} V_{\beta} \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\alpha} \\ &+ \overset{\mathfrak{p}}{v}_{[\mathfrak{b}} \overset{\mathfrak{q}}{h}{}'_{\mathfrak{b}]\mathfrak{a}} + 1/2\, B'^{\delta\beta\alpha}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{a}} R_{\delta\beta\alpha}{}^{\cdot\cdot\gamma} \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\gamma} \end{aligned}} \quad (88)$$

wo

$$\overset{\mathfrak{p}}{v}_{\mathfrak{b}} = B'^{\delta}_{\mathfrak{b}} (V_{\delta} \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\alpha}) \overset{\mathfrak{q}}{e}{}^{\alpha} = - B'^{\delta}_{\mathfrak{b}} (V_{\delta} \overset{\mathfrak{q}}{e}{}^{\alpha}) \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\alpha}. \quad (89)$$

schreiben wir ebenso

$$\overset{\mathfrak{p}}{l}{}'_{\mu}{}^{\cdot\cdot\nu} = B'^{\beta\nu}_{\mu\gamma} V_{\beta} \overset{\mathfrak{p}}{e}{}^{\gamma}, \quad (90)$$

so daß

$$\begin{aligned} L'_{\mu\cdot\lambda}{}^{\cdot\nu} &= - \overset{\mathfrak{p}}{l}{}'_{\mu}{}^{\cdot\nu} \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\lambda}, & L'_{\mu\cdot(\mathfrak{p})}{}^{\cdot\nu} &= - \overset{\mathfrak{p}}{l}{}'_{\mu}{}^{\cdot\nu}, \\ L''_{\mu\cdot\lambda}{}^{\cdot\nu} &= - \overset{\mathfrak{A}}{l}{}'_{\mu}{}^{\cdot\nu} \overset{\mathfrak{A}}{e}_{\lambda}, & L''_{\mu\cdot(\mathfrak{A})}{}^{\cdot\nu} &= - \overset{\mathfrak{A}}{l}{}'_{\mu}{}^{\cdot\nu}, \end{aligned} \quad (91)$$

so folgt in derselben Weise

$$\boxed{\begin{aligned} V''_{[\mathfrak{b}} \overset{\mathfrak{p}}{l}{}_{\mathfrak{b}]}{}^{\mathfrak{c}} &= (S''_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{}^{\beta} + Z''_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{}^{\beta}) B'^{\mathfrak{c}}_{\gamma} V_{\beta} \overset{\mathfrak{p}}{e}{}^{\gamma} \\ &- \overset{\mathfrak{q}}{v}_{\mathfrak{p}[\mathfrak{b}} \overset{\mathfrak{q}}{l}{}'_{\mathfrak{b}]}{}^{\cdot\cdot\mathfrak{c}} - 1/2\, B'^{\delta\beta\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}\gamma} R_{\delta\beta\alpha}{}^{\cdot\cdot\gamma} \overset{\mathfrak{p}}{e}{}^{\alpha} \end{aligned}} \quad (92)$$

(88) und (92) sind die verallgemeinerten Gleichungen von Codazzi. Die verallgemeinerten Gleichungen von Ricci ergeben sich durch Differentiation und Alternation von (89) und lauten

$$\boxed{\begin{aligned} V''_{[\mathfrak{b}} \overset{\mathfrak{p}}{v}_{\mathfrak{b}]} &= (S''_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{}^{\beta} + Z''_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{}^{\beta})(V_{\beta} \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\alpha}) e^{\alpha} \\ &+ 1/2\, B'^{\delta\beta}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}} R_{\delta\beta\alpha}{}^{\cdot\cdot\gamma} \overset{\mathfrak{p}}{e}_{\gamma} \overset{\mathfrak{q}}{e}{}^{\alpha} + \overset{\mathfrak{q}}{l}{}'_{[\mathfrak{b}}{}^{\cdot\cdot\gamma} \overset{\mathfrak{p}}{h}{}'_{\mathfrak{b}]\gamma} + \overset{\mathfrak{p}}{v}_{\mathfrak{r}[\mathfrak{b}} \overset{\mathfrak{r}}{v}_{\mathfrak{q}\mathfrak{b}]} \end{aligned}}. \quad (93)$$

§ 10.

V_n^m in V_n.

Eine X_n^m in V_n mit der in ihr induzierten Übertragung soll V_n^m heißen. Werden als Maßvektoren Einheitsvektoren verwendet, so gehen die Λ_{ij}^k über in die Rotationskoeffizienten γ_{ij}^k.[17]) Es ist also (vgl. (55))

$$\begin{aligned} \delta' v^c &= dv^c + \gamma^c_{ab} v^a (dx)^b \\ \delta' w_a &= dw_a - \gamma^c_{ab} w_c (dx)^b, \end{aligned} \quad (94)$$

[17]) Vranceanu hat die in V_n^m induzierte Übertragung gerade mit Hilfe dieser Koeffizienten definiert.

ferner (vgl. (63))

$$H_{ba}^{\cdot\cdot\nu} \stackrel{*}{=} \gamma_{ba}^{p}\, i_p^{\nu} \tag{95}$$

und (vgl. (62))

$$\partial_{[b}\partial_{a]}\, p = \gamma_{[ab]}^{c}\,\partial_c p + H_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu} V_\nu\, p\,. \tag{96}$$

Der alternierende Teil $H_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu}$ *hängt nicht mehr von der Übertragung in* V_n *und nur noch von der Einspannung ab* (vgl. (63)):

$$H_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu} = -\,B_{ba}^{\beta a}\left(\partial_\beta \overset{p}{i}_a\right) i_p^{\nu}\,. \tag{97}$$

Für die Krümmungsgröße der V_n^m gilt (vgl. (68))

$$\tfrac{1}{2} K'^{\cdots c}_{dba} = -\,\partial_{[d}\gamma^{c}_{|a|b]} - \gamma^{c}_{e[d}\gamma^{e}_{|a|b]} - \gamma^{e}_{[db]}\gamma^{c}_{ae} + H_{[db]}^{\cdot\cdot p}\,\Lambda^{c}_{ap}\,.^{18}) \tag{98}$$

Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Die in V_n^m *in* V_n *induzierte Übertragung ändert sich nicht, wenn der Fundamentaltensor* $g_{\lambda\mu}$ *der* V_n *Änderungen unterworfen wird, wobei die* V_n^m*-Komponente* $g'_{\lambda\mu}$ *und die Einspannung invariant bleiben.*

Der kovariante Differentialquotient von $g'_{\lambda\mu}$ in bezug auf V_n^m verschwindet, und es ist also

$$0 = \partial_c g'_{ab} - \Lambda^{d}_{ac} g'_{db} - \Lambda^{d}_{bc} g'_{ad}\,. \tag{99}$$

Ferner folgt aus (57)

$$\Lambda^{c}_{[ab]} = B^{c}_{\nu}\,\partial_{[b} B^{\nu}_{a]}\,, \tag{100}$$

eine Gleichung, die nur von der Einspannung und nicht von der Übertragung in V_n abhängt. Aus (99) und (100) folgt aber[19])

$$\begin{aligned}\Lambda^{c}_{ab} = {}& {}^1\!/_2\, g'^{cd}\left(\partial_b g'_{ad} + \partial_a g'_{bd} - \partial_d g'_{ab}\right)\\ & + B^{c}_{\nu}\,\partial_{[b} B^{\nu}_{a]} + g'^{ce}\left(g'_{ad} B^{d}_{\nu}\,\partial_{[e} B^{\nu}_{b]} + g'_{bd} B^{d}_{\nu}\,\partial_{[e} B^{\nu}_{a]}\right)\end{aligned} \tag{101}$$

und es ist also gelungen, die Λ^{c}_{ab} zu berechnen, ausgehend von $g'_{\lambda\mu}$ und von der Einspannung.

§ 11.

Geodätische Linien in L_n^m und L_n.

Eine Kurve, die entsteht durch pseudoparallele Verschiebung eines kontravarianten Vektors der L_n^m in der eigenen Richtung im Sinne der in

---

[18]) Bei Vranceanu tritt nur der aus den ersten drei Termen gebildete nicht-invariante Ausdruck auf, $K'^{\cdot\cdot\cdot c}_{dba}$ dagegen noch nicht.

[19]) Vgl. R. K., S. 73, Formel (53b).

* induzierten Übertragung, soll eine *geodätische Linie* der L_n^m heißen.
; also t irgendein Parameter auf der Kurve, so ist n. u. h., daß $\frac{dx^\mu}{dt} V'_\mu \frac{dx^\nu}{dt}$
e Richtung von dx^ν hat:

02) $$\frac{d}{dt}\frac{(dx)^c}{dt} + \Lambda^c_{ab}\frac{(dx)^a}{dt}\frac{(dx)^b}{dt} = \alpha\frac{(dx)^c}{dt}.$$

ir stellen jetzt die Frage, wann eine in L_n^m geodätische Linie auch in
geodätisch ist. Dazu ist offenbar n. u. h., daß der Vektor

03) $$\frac{dx^\mu}{dt} V_\mu \frac{dx^\nu}{dt} - \frac{dx^\mu}{dt} V'_\mu \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt}\left(V_\mu \frac{dx^\lambda}{dt}\right) C^\nu_\lambda$$
$$= \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} V_\mu B^\nu_\lambda = \frac{(dx)^a}{dt}\frac{(dx)^b}{dt} H_{ba}{}^\nu$$

e Richtung von dx^ν hat. Da aber $H_{ba}{}^\nu$ mit dem Index ν in der $(n-m)$-
chtung der Einspannung liegt, ist dies nur möglich, wenn der Vektor
$x)^a (dx)^b H_{ba}{}^\nu$ verschwindet. Wir haben also den Satz erhalten:

Die geodätischen Linien einer L_n^m in L_n sind dann und nur dann
ch in L_n geodätisch, wenn $H_{(ba)}{}^\nu = 0$.

Bei einer X_m in E_n hat das Verschwinden von $H_{(ba)}{}^\nu$ zufolge, daß die
rümmungsgröße verschwindet. Sind also alle geodätischen Linien der X_m
ch geodätisch in E_n, so ist die X_m eben. An einem recht einfachen
ispiel zeigen wir, daß dies für eine X_n^m in E_n nicht mehr zutrifft. Durch
s zu einem System von Kräften in R_3 gehörige Nullsystem wird jedem
nkte die 2-Richtung des Vektors

04) $$p_\lambda = a_\lambda + r^a f_{a\lambda}$$

geordnet, wo a_λ ein konstanter Vektor, $f_{a\lambda}$ ein konstanter Bivektor und
der Radiusvektor ist. Ist p die Länge von p_λ und $p_\lambda = p\, i_\lambda$, so lehrt
fferentiation von (104)

05) $$B^{\beta a}_{\mu\lambda} V_\beta i_a = \frac{1}{p} f'_{\mu\lambda}$$

d

06) $$H_{\mu\lambda}{}^\nu = -\frac{1}{p} f'_{\mu\lambda} i^\nu,$$

$f'_{\mu\lambda}$ die V_3^2-Komponente von $f_{\mu\lambda}$ ist. Die geodätischen Linien der V_3^2
nd die Geraden des Nullsystems und diese sind also auch in R geodätisch.
e Krümmungsgröße verschwindet aber nicht:

07) $$K'_{dbac} = -\frac{2}{p^3} f'_{[b|a|} f'_{d]c}.$$

eses Beispiel zeigt auch, daß die geodätischen Linien einer V_n^m im all-
meinen nicht mit den kürzesten Linien zusammenfallen, da durch einen

Punkt nur ∞^1 geodätische Linien der V_3^2 gehen, während im allgemeinen jeder Punkt mit jedem anderen Punkt verbunden werden kann durch eine Kurve, die ganz in der V_3^2 liegt.

§ 12.

Mechanische Anwendungen.

Ein nicht-holonomes System der Mechanik ist dadurch gekennzeichnet, daß die Differentiale der n notwendigen Koordinaten $\overset{\nu}{x}$ des Systems $n-m$ lineare homogene Bedingungsgleichungen erfüllen müssen, deren Koeffizienten Funktionen der $\overset{\nu}{x}$ sind. Dies bedeutet aber, daß in der X_n eine X_n^m eingebettet ist und daß die Geschwindigkeit $\dot{x}^\nu = dx^\nu/dt$ des Bildpunktes ein Vektor der X_n^m sein muß. Ist

$$T = g_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu \tag{108}$$

die Bewegungsenergie und k_λ die λ-Komponente des Systems der äußeren Kräfte, so ist das System der Lagrangeschen Gleichungen *vor* Einführung der Anholonomitätsbedingungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial x^\lambda} = k_\lambda \tag{109}$$

bekanntlich gleichbedeutend mit

$$\frac{\delta}{dt}\dot{x}^\nu = k_\lambda g^{\lambda\nu}, \tag{110}$$

wo δ das kovariante Differential in bezug auf $g_{\lambda\nu}$ als Fundamentaltensor bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt, daß beim Verschwinden der äußeren Kräfte die Bahn des Bildpunktes eine geodätische Linie in V_n wird. Bei Einführung nicht-holonomer Parameter in bezug auf ein mit Einheitsvektoren versehenes Orthogonalnetz kann (110) geschrieben werden

$$g_{ij}\frac{\delta}{dt}\dot{x}^j = k_i \tag{111}$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} - 2\gamma^k_{[ij]}\dot{x}^j\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = k_i.^{20}) \tag{112}$$

Die Anholonomitätsbedingungen seien jetzt eingeführt. Wie in den vorigen Paragraphen seien $a, \ldots, g$ die zu den Maßvektoren in V_n^m gehörigen Indizes. Es sei P_λ die λ-Komponente des äußeren Kräftesystems, das zu dem System k_λ hinzugefügt werden müßte, wenn das übrigens frei gedachte Massensystem gezwungen werden soll, den Anholonomitätsbedingungen

---

[20]) Vgl. Whittaker, Analytical Dynamics, p. 43.

genügen. Sodann gilt für das in dieser Weise wieder holonom gemachte stem

13) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial x^\lambda} = k_\lambda + P_\lambda$$

eichbedeutend mit

14) $$g_{\lambda\nu}\frac{\delta}{dt}\dot{x}^\nu = k_\lambda + P_\lambda .$$

a aber das System P_λ bei Verrückungen, die den Anholonomitätsbedingungen nügen, keine Arbeit leisten darf, ist $B_\lambda^\nu P_\nu = 0$ und infolgedessen

15) $$g'_{\lambda\nu}\frac{\delta}{dt}\dot{x}^\nu = k_a B_\lambda^a$$

ler

16) $$\frac{\delta'}{dt}\dot{x}^\nu = k_\lambda g'^{\lambda\nu},$$

o δ' das kovariante Differential der V_n^m andeutet. Es gilt also der Satz:

Der Bildpunkt eines Systems mit n notwendigen Koordinaten und — m Anholonomitätsbedingungen, das nicht unter dem Einfluß äußerer räfte steht, beschreibt eine geodätische Linie einer V_n^m.[21])

§ 13.

Affingeometrie einer X_n^{n-1} in L_n.

Wir erörtern zum Schluß noch kurz die Möglichkeit einer Affingeometrie r eine X_n^{n-1} in L_n. Wie bekannt, kommt eine Affingeometrie für X_{n-1} einer A_n zustande, indem sich zu jedem Punkte der X_{n-1} ein bis auf nen konstanten skalaren Faktor bestimmter Affinnormalvektor konstruieren ßt, und ist dies stets möglich, wenn die folgenden Bedingungen er- llt sind:

1. die Übertragung der A_n ist inhaltstreu;

2. ist t_λ ein kovarianter Vektor, der in jedem Punkte die X_{n-1} tan- ert, so hat $h_{ba} = B_{ba}^{\mu\lambda} V_\mu t_\lambda$ den Rang $n-1$.

Wir zeigen, daß sich unter genau denselben Bedingungen in jedem unkte der L_n ein Affinnormalvektor zur X_n^{n-1} konstruieren läßt. Ist die bertragung inhaltstreu, d. h. ist

17) $$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 0\,,$$ [22])

gibt es ein konstantes n-Vektorfeld $P_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$. Andere konstante Vektor- lder unterscheiden sich von diesem Feld durch einen *konstanten* skalaren

[21]) Vranceanu und Horak, a. a. O.

[22]) R. K., S. 89.

Faktor. Ist also der Rang von h_{ba} gleich $n-1$, so ist t_λ durch die Gleichung

$$t_{[\mu_1} t_{[\lambda_1} h_{\mu_2\lambda_2} \dots h_{\mu_n]\lambda_n]} = P_{\mu_1 \dots \mu_n} P_{\lambda_1 \dots \lambda_n} \tag{118}$$

bis auf einen *konstanten* skalaren Faktor bestimmt. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} t_\mu n^\mu &= 1, \\ B^\mu_\omega (\nabla_\mu t_\lambda) n^\lambda &= 0 \end{aligned} \tag{119}$$

bestimmen dann den Affinnormalvektor n^ν ebenfalls bis auf einen *konstanten* skalaren Faktor. Der weitere Ausbau der Affingeometrie geht nun so vor sich, daß zunächst die X_n^{n-1} mit Hilfe der Richtung von n^ν eingespannt wird und eben auf diese Einspannung die in den §§ 6 bis 9 entwickelte Theorie angewandt wird.

Es ist noch zu bemerken, daß statt h_{ba} auch $h_{[ba]}$ oder auch $h_{(ba)}$ in (118) verwendet werden können, vorausgesetzt, daß der Rang dieser Größen $n-1$ ist.

(Eingegangen am 16. Juni 1928.)

Die Verbiegung der konisch-zylindrischen Flächen.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

In seiner interessanten Arbeit „Über Lichtgrenztangentensysteme und it ihnen zusammenhängende Flächentransformationen“ hat Herr A. Schur[1]) ch eingehend mit den konisch-zylindrischen Flächen von Darboux befaßt id weitgehende Schlüsse auf die von Darboux besprochene Biegungsgruppe eser Flächenklasse gestützt.

Indessen bedarf die Bemerkung von Herrn Schur[2]): „Die Flächen ssen, wie Darboux gezeigt hat, Biegungen in Flächen derselben Art zu, ei denen das konisch-zylindrische Netz erhalten bleibt“, doch dringend ner Nachprüfung.

Darboux[3]) gibt nämlich nur für eine einfache Klasse, die später von Herrn Lagally[4]) als „achsenaffin“ bezeichneten Flächen, die Biegungsgruppe n und „überläßt dem Leser die Sorge, die allgemeine Lösung der (in etracht kommenden) Funktionalgleichungen zu erhalten“[5]).

Dieser gewiß an sich schon interessanten Aufgabe, die in § 1 be- prochen, in § 2 ganz losgelöst vom Biegungsproblem kinematisch gedeutet

[1]) Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 530–558.

[2]) A. Schur, a. a. O. S. 534.

[3]) G. Darboux, Théorie des surfaces I (2. Aufl., Paris 1914), S. 181–184.

[4]) Max Lagally, Über gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, insesondere der Flächen 2. Ordnung. Münch. Ber. 1919, S. 369–379. Die Arbeit ist nabhängig von Darboux' Untersuchung entstanden. — Bemerkt sei bei dieser Gegenheit, daß die Asymptotenlinien der achsenaffinen Flächen sich durch Quadratur estimmen lassen.

[5]) Darboux, a. a. O. Nr. 111 (S. 181). Die weitere Wendung: „Nous nous bornerons u cas particulier“ ... es werden dann eben die achsenaffinen Flächen besprochen, wingt doch wohl zu dem Schluß, daß Darboux meinte, es könne noch andere Flächen eben, auf die sein Biegungsvorgang anwendbar bleibt. Hierauf hat sich Herr A. Schur ann verlassen.

und in § 3 mit einer Reihe von Fallunterscheidungen gelöst wird, ist die folgende Darlegung gewidmet. Sie führt zu dem einschneidenden Ergebnis, daß die gesuchten Biegungen nur in dem Darbouxschen Fall der achsenaffinen Flächen möglich sind. Also gelten auch die von Herrn Schur gezogenen Folgerungen nur für diesen Fall — ein gewiß sehr bedauerlicher Ausfall. Dagegen treten neu auf die „Biegungskoppelungen", von denen in § 3, Nr. 3 und 4 die Rede sein wird.

Die direkte Behandlung der Darbouxschen Funktionalgleichung (D in § 1 oder D′ in § 2) wurde dadurch nahegelegt, daß Herr Wilhelm Schaaff in seiner in Heidelberg eingereichten Dissertation „Biegung mit Erhaltung zylindrisch-konjugierter Systeme" in anderm Zusammenhang mit weitausgreifenden Methoden der Flächentheorie auch nachwies, daß nur die achsenaffinen Flächen die Darbouxsche Biegung gestatten können. Der hier gewählte Weg ist ein ganz anderer, das Folgende ist, wie schon bemerkt, seiner ganzen Anlage nach auf die kinematische Deutung in § 2 gestützt.

§ 1.

Die konisch-zylindrischen Flächen.

In den Gleichungen

$$x = A\alpha + \int A' a\, du,$$
$$y = A\beta + \int A' b\, du,$$
$$z = A\gamma + \int A' c\, du$$

seien a, b, c und A Funktionen von u; α, β, γ Funktionen von v.

Aus

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} = \alpha' : \beta' : \gamma'$$

folgt, daß längs jeder Kurve $(dv = 0)$ die Tangenten an die Kurven $(du = 0)$ parallel sind, also einem *Zylinder* angehören.

Aus

$$\frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial u} = (a + \alpha) : (b + \beta) : (c + \gamma)$$

folgt, daß die durch die Gleichungen

$$\xi = x + \lambda(a + \alpha),$$
$$\eta = y + \lambda(b + \beta),$$
$$\zeta = z + \lambda(c + \gamma)$$

bestimmten Tangenten an die Kurven $(dv = 0)$ längs einer Kurve $(du = 0)$ jeweils durch den Punkt

$$\bar{\xi}(u) = -\int A a' du, \quad \bar{\eta}(u) = -\int A b' du, \quad \bar{\zeta}(u) = -\int A c' du$$

gehen, also einem *Kegel* angehören[6]).

Die Kurven sind auf der Fläche konjugiert, ferner erkennt man aus

$$L = \begin{vmatrix} \sum x_{uu}^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} : \sqrt{EG - F^2},$$

$$M = 0,$$

$$N = \begin{vmatrix} \sum x_{vv}^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} & G & F \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & E \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} : \sqrt{EG - F^2}$$

In Verbindung mit dem Gaußschen „Theorema egregium", daß zum Nachweis der Kongruenz zweier K.-Z.-Flächen mit denselben E, F, G nur erforderlich ist, zu zeigen, daß

$$\sum\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \sum\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}\right)^2 = \sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2$$

ist. Eines von beiden genügt. Flächen vom Krümmungsmaß Null werden nicht mit in Betracht gezogen.

Zwei K.-Z.-Flächen mit demselben A sind mit Erhaltung des K.-Z.-Netzes aufeinander abwickelbar, wenn

$$\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = (A')^2 \sum(a_1 + \alpha_1)^2 = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = (A')^2 \sum(a + \alpha)^2,$$

$$\sum\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = AA' \sum\alpha_1'(a_1 + \alpha_1) = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = AA' \sum\alpha'(a + \alpha),$$

$$\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = A' \sum(\alpha_1')^2 \qquad = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = A^2 \sum(\alpha')^2$$

ist, die zweite Fläche ist dann durch

$$x_1 = A\alpha_1 + \int A' a_1 du,$$
$$y_1 = A\beta_1 + \int A' b_1 du,$$
$$z_1 = A\gamma_1 + \int A' c_1 du$$

dargestellt.

---

[6]) So erklärt sich der Namen „konisch-zylindrische Flächen", „konisch-zylindrisches Netz"; wir werden fortan zur Abkürzung K.-Z.- schreiben.

Hieraus ergibt sich die Frage Darboux':

Welche Lösungen besitzen die Funktionsgleichungen

$$(D)\qquad \begin{aligned} \Sigma(a+\alpha)^2 &= \Sigma(a_1+\alpha_1)^2, \\ \Sigma(\alpha')^2 \quad &= \Sigma(\alpha_1')^2 \quad ? \end{aligned}$$

Denn diese Gleichungen bewirken, daß nicht nur

$$E = E_1, \quad G = G_1,$$

sondern auch

$$F = F_1$$

wird.

Um den trivialen Fall der Kongruenz auszuschalten, muß man noch die Nebenbedingung stellen, daß

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2 = (A'')^2\,\Sigma(\alpha_1+a_1)^2 + 2A'A''\,\Sigma a_1'(\alpha_1+a_1) + (A')^2\,\Sigma(a_1')^2$$

von $\Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2$ verschieden ist, oder also

$$\Sigma(a_1')^2 + \Sigma(a')^2.$$

Statt dessen genügt auch die Forderung, daß

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}\right)^2 = A^2\,\Sigma(\alpha_1'')^2$$

von

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2 = A^2\,\Sigma(\alpha'')^2$$

verschieden ist, oder also

$$\Sigma(\alpha_1'')^2 + \Sigma(\alpha'')^2.$$

Schließlich ist noch hervorzuheben, daß nur Biegungsgruppen Interesse verdienen, d. h. wir verlangen, daß die a_1, b_1, c_1 und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ noch einen veränderlichen Parameter enthalten.

§ 2.

Kinematische Deutung.

Die Darbouxsche Aufgabe läßt eine Deutung zu, die dann auch für ihre Lösung manche Vorteile gewährt.

Wir fassen jetzt a, b, c und $-\alpha, -\beta, -\gamma$ als rechtwinklige Koordinaten zweier Kurven C und Γ auf, ebenso a_1, b_1, c_1 und $-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1$ als rechtwinklige Koordinaten zweier Kurven C_1 und Γ_1 und bezeichnen die Koordinaten dann mit x, y, z; ξ, η, ζ; x_1, y_1, z_1; ξ_1, η_1, ζ_1. Die Gleichungen (D) verwandeln sich dann in

D′) $$\Sigma(x-\xi)^2 = \Sigma(x_1-\xi_1)^2,$$
$$\Sigma(\xi')^2 = \Sigma(\xi_1')^2,$$

o daß die Aufgabe auch so zu fassen ist:

Zu dem Kurvenpaar C, Γ sollen Kurvenpaare C_1, Γ_1 zugeordnet verden, und zwar derart, daß

1. *alle geraden Strecken, die die Punkte von C mit den Punkten von Γ verbinden, ihre Länge beibehalten*;

2. *die Bogenlänge von Γ ungeändert bleibt.*

Die Nebenbedingung

$$\Sigma(x_1')^2 + \Sigma(x')^2$$

besagt, daß die Bogenlänge von C sich ändert; die Nebenbedingung

$$\Sigma(\xi_1'')^2 + \Sigma(\xi'')^2$$

besagt, daß Γ_1 aus Γ nicht durch Bewegung hervorgeht. So scheiden für Γ z. B. die Geraden aus[7]).

Den von Darboux behandelten Fall erhält man, wenn man

$$x = y = x_1 = y_1 = \zeta = \zeta_1 = 0$$

nnimmt. Führt man weiter in der xy-Ebene (zugleich $\xi\eta$-Ebene) Polarkoordinaten ein, so verwandeln sich die Forderungen (D′) in

$$z_1^2 + r_1^2 = z^2 + r^2$$

nd

$$dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Hieraus folgt die Lösung

$$z_1^2 = z^2 + k,$$
$$r_1^2 = r^2 - k,$$
$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{1}{r^2-k^2}\sqrt{r^2(r^2-k^2) - k^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2},$$

nd man kann den Vorgang z. B. sehr anschaulich verfolgen, wenn man en einfachen Fall $r = \text{konst.}$ herausgreift[8]).

Bei den Flächen dieser Darbouxschen Klasse liegen die Spitzen der Kegel alle auf einer Achse, die Kegel berühren längs ebener Kurven, deren Ebenen diese Achse senkrecht schneiden, und die Zylinder, deren Mantellinien alle die Achse rechtwinklig kreuzen, berühren längs ebener Kurven,

[7]) Die Flächen des § 1 sind dann Torsen.

[8]) Eine Schar koaxialer Kreiskegel, die selbstverständlich längs einer Mantellinie ufgeschnitten sein müssen, und die einen Parallelkreis gemein haben. Die Biegungsruppe wird durch Änderung des Radius dieses Kreises hergestellt.

„Meridiane“, die in Ebenen durch die Achse liegen. Die Flächen heißen „achsenaffin“, weil nach Umklappung der Meridiane in eine Ebene zu erkennen ist, daß sie affin sind und ihre Affinitätsachse die genannte Flächenachse. Die bekannte Biegung der Drehflächen mit Erhaltung von Meridianen und Parallelkreisen ordnet sich hier ein.

Um die Darbouxsche Fragestellung zu behandeln, muß man Fallunterscheidungen vornehmen, je nachdem C eine Raumkurve, eine ebene Kurve oder eine Gerade ist und je nachdem Γ eine Raumkurve oder eine ebene Kurve, und zwar keine Gerade ist. So entstehen die Fälle

$$C(R),\ \Gamma(R),$$
$$C(R),\ \Gamma(E),$$
$$C(E),\ \Gamma(R),$$
$$C(E),\ \Gamma(E),$$
$$C(G),\ \Gamma(R),$$
$$C(G),\ \Gamma(E),$$

und es wird nur der letzte übrigbleiben, wobei übrigens die Gerade C auf der Ebene E der Kurve Γ senkrecht stehen muß.

Die Behandlung wird um so einfacher, je allgemeiner der betrachtete Fall ist. Außer den Gleichungen (D′) kommt die daraus folgende

$$\sum x_1' \xi_1' = \sum x' \xi'$$

viel zur Verwendung. Sie entsteht aus der ersten (D′)-Gleichung durch einmalige Differentiation nach u und v.

Außerdem werden wir oft davon Gebrauch machen, daß (D′) bei simultanen Bewegungen von C und Γ invariant bleibt. Dies erlaubt uns, z. B. im Fall $C(R), \Gamma(E)$ sowohl Γ wie Γ_1 in die Ebene $\zeta = 0$ zu verlegen, usw.

§ 3.

Lösung des Darbouxschen Problems.

Mit Befolgung dieser Vorschriften nimmt die Untersuchung dann folgenden Verlauf.

1. $C(R),\ \Gamma(R)$.

Hier ist also vorausgesetzt, daß die beiden Determinanten

$$U = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sind.

Differenziert man

$$\sum \xi' x' = \sum \xi_1' x_1'$$

noch zweimal nach u, so erhält man drei Gleichungen, die wegen $U \neq 0$ sicher nach ξ', η', ζ' auflösbar sind. Bildet man jetzt V, so ist diese Determinante gleich der entsprechenden V_1 multipliziert mit der Determinante der Transformation $\xi', \eta', \zeta' \to \xi_1', \eta_1', \zeta_1'$, also sind beide Determinanten von Null verschieden, insbesondere V_1.

Differenziert man die Gleichungen

$$\xi' = a_{11}\xi_1' + a_{12}\eta_1' + a_{13}\zeta_1',$$
$$\eta' = a_{21}\xi_1' + a_{22}\eta_1' + a_{23}\zeta_1',$$
$$\zeta' = a_{31}\xi_1' + a_{32}\eta_1' + a_{33}\zeta_1'$$

nach u, so steht links Null, also ist z. B.

$$a_{11}'\xi_1' + a_{12}'\eta_1' + a_{13}'\zeta_1' = 0,$$

und da die $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ wegen $V_1 \neq 0$ linear unabhängig sind, ergibt sich, daß die $a_{11}', a_{12}', a_{13}'$ usw. gleich Null, die a_{ik} also Konstanten sind. Wegen

$$\sum (\xi')^2 = \sum (\xi_1')^2$$

liegt also eine orthogonale Transformation — Drehung oder Spiegelung — mit konstanten Koeffizienten vor; daher ist auch

$$\sum (\xi'')^2 = \sum (\xi_1'')^2,$$

und dieser Fall scheidet nach § 2 aus. Für das kinematische Problem würde er eine kogrediente orthogonale Transformation der x, y, z und ξ, η, ζ bedeuten, also Kongruenz oder Spiegelung entsprechend für die Biegung der K.-Z.-Flächen.

2. $C(R)$, $\Gamma(E)$.

Da die Determinante U von Null verschieden ist, so kann man wie in Nr. 1 beginnen. Wählt man Γ in der Ebene $\zeta = 0$, so folgt

$$a_{31}\xi_1' + a_{32}\eta_1' + a_{33}\zeta_1' = 0,$$

also besteht zwischen den $\xi_1' \eta_1' \zeta_1'$ eine lineare homogene Relation (die a_{31}, a_{32}, a_{33} können nicht alle drei verschwinden, geben daher schon, wenn sie von u unabhängig sind, sicher eine Beziehung). Also ist Γ_1 eine ebene Kurve, die man durch simultane Drehung von C_1 und Γ_1 wieder in die Grundebene verlegen kann ($\zeta = \zeta_1 = 0$).

Hier bleibt die Forderung

$$x'\xi' + y'\eta' = x_1'\xi_1' + y_1'\eta_1'.$$

Da aber Γ keine Gerade sein soll, ist

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi'' & \eta'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ebenso ist

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \neq 0;$$

denn sonst wäre C eine ebene Kurve.

Also liegt in ξ, η eine orthogonale Transformation vor usw. wie im ersten Fall. Übrigens gilt dieselbe Schlußweise noch, wenn nur C nicht in einer Vertikalebene

$$ax + by + c = 0$$

liegt.

In allen anderen Fällen muß man weiter ausholen.

3. $C(E)$, $\Gamma(R)$.

Man kann zunächst, wenn $z = 0$ angenommen wird, zeigen, daß auch C_1 notwendig eine ebene Kurve sein muß, ähnlich wie in Nr. 2, und kann daher auch $z_1 = 0$ setzen. Man kann auch zeigen, daß x_1 und y_1 lineare Funktionen von x und y werden und darf setzen

$$x_1 = a_1 x, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y.$$

Aus

$$x' \xi' + y' \eta' = x_1' \xi_1' + y_1' \eta_1'$$

folgt dann

$$\eta_1 = \frac{\eta}{b_2} + \beta, \quad \xi_1 = \frac{\xi}{a_1} - \frac{a_2 \eta}{b_2 a_1} + \alpha,$$

wobei aber trotz des Grundsatzes, mit Konstanten möglichst zu sparen, α und β nicht gleich Null angenommen werden dürfen.

Aus

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + \zeta_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2$$

erhält man dann

$$x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 - x^2 - y^2 + \sum \xi_1^2 - \sum \xi^2 = 0,$$

also eine bereits separierte Funktionalgleichung mit der Lösung

$$x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 - x^2 - y^2 = k, \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - k.$$

Die erste Gleichung gibt (nachdem man x_1 und y_1 durch x und y ausgedrückt hat) eine Beziehung, die k enthält, *also keine feste Ausgangskurve* C, und das widerspricht dem Sinn der Aufgabe. Oder aber es ist

$$a_1^2 x^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 - x^2 - y^2 - 2a_1 \alpha x - 2\beta (a_2 x + b_2 y) \equiv 0,$$

und daher

$$a_1^2 = b_2^2 = 1, \quad a_2 = \alpha = \beta = 0,$$

nd dann wird

$$x_1 = \pm x, \quad y_1 = \pm y,$$

lso

$$\Sigma (x')^2 = \Sigma (x_1')^2,$$

nd daher scheidet auch dieser Fall aus.

Die Schlußweise bleibt erhalten, wenn nur

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi'' & \eta'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

lso die Kurve Γ in keiner Ebene liegt, die zur Ebene von $C(E)$ senkecht steht.

Übrigens läßt sich diesem Fall eine positive Wendung geben. Man ann nämlich gekoppelte Paare oder Biegungskoppelungen von K.-Z.-Flächen ieraus ableiten.

Jedem Kegelschnitt

$$a_1 x^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 - x^2 - y^2 - 2 a_1 \alpha x - 2 \beta (a_2 x + b_2 y) = k$$

rdnet man denjenigen zu, der daraus entsteht, indem man x und y wieder urch x_1 und y_1 ausdrückt, und dazu kommt

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\xi}{a_1} - \frac{a_2 \eta}{b_2 a_1} + \alpha\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b_2} + \beta\right)^2 + \zeta_1^2 - k$$

nd

$$\Sigma (\xi_1')^2 = \Sigma (\xi')^2 - k,$$

as auf eine Mongesche Gleichung zweiten Grades in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ führt. ede Integralkurve Γ dieser Gleichung liefert dann eine bestimmte Kurve Γ_1.

Das Ergebnis wird:

Wählt man für C irgendeinen Kegelschnitt, so wird ihm ein bestimmter Kegelschnitt C_1 zugeordnet, Γ (und Γ_1) sind dann durch eine Mongesche Gleichung zweiten Grades bestimmt, zu jedem Γ das Γ_1, und es ist stets

$$\Sigma (\xi - x)^2 = \Sigma (\xi_1 - x_1)^2, \quad \Sigma (\xi')^2 = \Sigma (\xi_1')^2,$$

o daß unendlichviele Paare von je zwei aufeinander abwickelbaren K.-Z.-Flächen entstehen — man kann dies „Biegungskoppelungen“ nennen[9]).

---

[9]) Eine „Biegungskoppelung“ mit einem Parameter t besteht z. B. zwischen den Scharen

$$x_1 = x + t\xi, \quad y_1 = y + t\eta, \quad z_1 = z + t\zeta$$

und

$$x_2 = x - t\xi, \quad y_2 = y - t\eta, \quad z_2 = z - t\zeta,$$

wenn

$$\Sigma\, dx\, d\xi = 0.$$

Diese Koppelung gestattete in einfachster Weise, den aus dem Jahre 1899 herrührenden Satz, daß eine Eifläche keine „infinitesimale“ Verbiegung zuläßt, dahin zu erweitern,

4. $C(E)$, $\Gamma(E)$.

Hier können wir uns, wie aus 2. und 3. hervorgeht, auf den Fall beschränken, daß die beiden Ebenen aufeinander senkrecht stehen.

Wir werden von vornherein verlangen

$$z = z_1 = 0$$

und gleich hinzufügen

$$\xi = \xi_1 = 0,$$

haben also die Gleichungen

$$x^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2 = x_1^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + \zeta_1^2, \qquad y'\eta' = y_1'\eta_1'$$

und

$$(\eta')^2 + (\zeta')^2 = (\eta_1')^2 + (\zeta_1')^2$$

zu erfüllen.

Weil C und Γ keine Geraden sind, denen man ja die Darstellung

$$(C) \quad z = y = 0, \qquad (\Gamma) \quad \xi = 0, \quad \eta = 0$$

geben könnte, so ist aus der zweiten Gleichung abzuleiten

$$y_1 = a^{-1} y, \qquad \eta_1 = a\eta + \alpha,$$

und man erhält wie in Nr. 3 zwei Gleichungen

$$x_1^2 = x^2 + y^2(1 - a^{-2}) + 2a^{-1}\alpha y - \alpha^2 + k$$

und

$$\zeta_1^2 = \eta^2(1 - a^2) - 2a\alpha\eta + \zeta^2 - k.$$

Hierzu kommt aber noch wegen

$$(\zeta_1')^2 + (\eta_1')^2 = (\zeta')^2 + (\eta')^2$$

die Mongesche Gleichung, die man durch Elimination erhält und die hier *ganz wesentlich eingreift.*

Sie hat die Form:

$$A(\zeta\eta' - \eta\zeta')^2 + 2B^2\zeta'(\eta\zeta' - \zeta\eta') + (\eta')^2(B + Ak) + k(\zeta')^2 = 0,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$1 - a^2 = A, \qquad a\alpha = B.$$

Sucht man nach Biegungen von K.-Z.-Flächen — nicht nach Biegungskoppelungen! —, so muß man fordern, daß *alle* Differentialgleichungen bei wechselnder Wahl der a, α, k eine Lösung gemein haben, die bestimmte

---

daß die Menge aller auf eine Eifläche abwickelbaren (nicht kongruenten) Eiflächen höchstens abzählbar sein kann (vgl. Jahresber. d. D. M.-V. XXIV, 1915, S. 359, sowie den früheren Beweis desselben Satzes ebenda XII, 1903, S. 540–555). Kürzlich hat Herr Cohn-Vossen ganz allgemein die Nichtverbiegbarkeit bewiesen, wobei aber die vorausgeschickten Literaturangaben nicht gleichmäßig gehandhabt sind.

Kurve Γ. Und dann kann C noch ganz beliebig gewählt werden, woraus y_1 und x_1, also C_1 zu berechnen ist.

So wird der Eindruck gewonnen, daß im Fall (4) Biegungen möglich sind. Indessen belehrt eine genaue Untersuchung besser. Die Differentialgleichung hat nämlich die Clairautsche Form, was durch Einführung homogener Linienkoordinaten mit Hilfe von

$$u\eta + v\zeta + w = 0, \quad u\eta' + v\zeta' = 0,$$

also

$$u : v : w = -\zeta' : \eta' : \eta\zeta' - \eta\zeta'$$

leicht erkannt wird. Man erhält

$$Aw^2 - 2B^2vw + (B + Ak)v^2 + ku^2 = 0,$$

d. h. die Integralkurven sind gerade Linien — Fall $\Gamma(G)$, der überhaupt ausscheidet — oder aber der von diesen Geraden umhüllte Kegelschnitt. Die geforderte Biegungsgruppe aber, ja sogar auch nur zwei Biegungen mit demselben Γ — dies verlangt, daß es *verschiedene* Wertsysteme a, α, k gibt, die dieselbe Kurve Γ liefern. Ist Γ der festgehaltene Kegelschnitt, dann sind damit a, α, k festgelegt, Γ_1 ist dann ebenfalls festgelegt, also hätte man keine Biegungsgruppe. Ist aber die gemeinsame Integralkurve aller Clairautgleichungen eine Gerade, und nur dieser Fall bleibt übrig, dann kommt man ja wieder auf $\Gamma(G)$. Wenn dann die Clairautsche Gleichung identisch erfüllt sein soll, so muß $a = \alpha = k = 0$ sein, und es fällt C_1 mit C zusammen, auch ist $y_1 = y$, $\eta_1 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta$, also liegt Kongruenz vor.

Indessen erhält man wieder Biegungskoppelungen, diesmal mit der Forderung, daß Γ ein Kegelschnitt ist, während die ebene Kurve $C(E)$ weiter keiner Beschränkung unterliegt.

Somit ist auch dieser Fall erledigt.

5. *Die Fälle $C(G)$.*

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen

$$x = y = x_1 = y_1 = 0$$

und folgert aus

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + (\zeta_1 - z_1)^2$$

weiter

$$z'\zeta' = z_1'\zeta_1'.$$

Hierin ist z' sicher von Null verschieden, ζ' auch, wenn Γ in keiner Ebene liegt, die die Gerade $C(G)$ *senkrecht schneidet*, also wenn es sich nicht um den Darbouxschen Fall handelt, den wir ausnehmen.

Also muß sein

$$z_1 = az, \quad \zeta_1 = a^{-1}\zeta + \alpha.$$

Es bleiben die Funktionalgleichungen

$$a^2 z^2 - 2\alpha a z = z^2 + k, \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 + (a^{-1}\zeta + \alpha)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - k,$$

und die erste Gleichung verlangt, da z doch auf C sich ändert,

$$a^2 = 1, \qquad \alpha = k = 0,$$

also wird

$$\Sigma (x')^2 = (z')^2 = \Sigma (x_1')^2 = (z_1')^2,$$

d. h. man erhält wieder nur kongruente K.-Z.-Flächen.

Von Biegungen der K.-Z.-Flächen mit Erhaltung des K.-Z.-Netzes bleibt nur der Fall der achsenaffinen Flächen.

Heidelberg, 23. Juni 1928.

(Eingegangen am 25. Juni 1928.)

Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Liebmann.

Von

Axel Schur in Bonn.

In der vorstehenden Arbeit gibt Herr Liebmann die so überraschende vollständige Lösung eines Problems, das ich in einer früheren Arbeit berührt habe. Ich hatte damals die fragliche Stelle bei Darboux so gedeutet, daß er außer dem von ihm dort behandelten einfachsten Beispiel der achsenaffinen Flächen noch allgemeinere K.-Z.-Flächen kenne, die Biegungen in ebensolche gestatteten. Mir schien dieser Schluß um so berechtigter, als ich von einem Parameter abhängige Lösungen der Funktionalgleichungen (D) gefunden hatte, die nicht linear aus den a, b, c; α, β, γ aufgebaut waren und allgemeiner als die achsenaffinen Flächen. Es handelte sich um den vorstehenden Fall 5. Da mir die von Herrn Liebmann aufgestellten Kriterien für die Kongruenz zweier K.-Z.-Flächen nicht bekannt waren, erkannte ich diesen Fall nicht in seiner wahren Natur.

Auf Grund einer Korrespondenz mit Herrn Liebmann nahm ich nun im Mai 1928 noch einmal die vollständige Diskussion der Funktionalgleichungen (D) auf und kam dabei unabhängig von ihm zu denselben Ergebnissen, wenn auch mit etwas anderen Methoden, die noch eine genauere Deutung der Beziehungen bei den Biegungskoppelungen zuließen.

(Eingegangen am 22. Februar 1929.)

Anmerkung zu der vorstehenden Note des Herrn Liebmann, betreffend die Darbouxschen Gleichungen.

Von

Otto Volk in Kaunas (Litauen).

Die briefliche Mitteilung des Ergebnisses der vorstehenden Arbeit hat mich veranlaßt, mich mit der Funktionalgleichung

$$(1) \qquad \Sigma (U_i + V_i)^2 = \Sigma (A_i + B_i)^2$$

zu beschäftigen; dabei bedeuten U_i, A_i Funktionen nur von u, B_i, V_i solche nur von v. Der zur Lösung versuchte Weg sei kurz skizziert.

Durch Differentiation nach U_1, V_1, dann nach $\overline{U}_2 = \frac{dU_2}{dU_1}$, $\overline{V}_2 = \frac{dV_2}{dV_1}$; $\overline{U}_3 = \frac{d^2U_3}{dU_1 dU_2}$, $\overline{V}_3 = \frac{d^2V_3}{dV_1 dV_2}$; $\bar{A}_1 = \frac{d^3A_1}{dU_1 d\overline{U}_2 dU_3}$, $\overline{B}_1 = \frac{d^3B_1}{dV_1 d\overline{V}_2 d\overline{V}_3}$ erhält man aus (1) die Gleichungen:

$$(2) \qquad 1 + \overline{U}_2 \overline{V}_2 + \frac{dU_3}{dU_1}\frac{dV_3}{dV_1} = \sum' \frac{dA_l}{dU_1}\frac{dB_l}{dV_1},$$

$$(3) \qquad 1 + \overline{U}_3 \overline{V}_3 = \sum' \frac{d^2A_l}{dU_1 d\overline{U}_2}\frac{d^2B_l}{dV_1 d\overline{V}_2},$$

$$(4) \qquad 1 = \sum' \frac{d^3A_l}{dU_1 d\overline{U}_2 d\overline{U}_3}\frac{d^3B_l}{dV_1 d\overline{V}_2 d\overline{V}_3},$$

$$(5) \qquad -1 = \frac{d^4A_2}{dU_1 d\overline{U}_2 d\overline{U}_3 d\bar{A}_1}\frac{d^4B_2}{dV_1 d\overline{V}_2 d\overline{V}_3 d\overline{B}_1} + \frac{d^4A_3}{dU_1 d\overline{U}_2 d\overline{U}_3 d\bar{A}_1}\frac{d^4B_3}{dV_1 d\overline{V}_2 d\overline{V}_3 d\overline{B}_1},$$

wobei vorausgesetzt, daß $\overline{U}_2, \overline{U}_3, \bar{A}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3, \overline{B}_1$ keine konstanten Werte haben. Unter dieser Voraussetzung folgt aus den Gleichungen (2) bis (5) unmittelbar, daß die A_i, B_i lineare Funktionen der U_i, V_i sein müssen. Die Ausnahmefälle $\bar{A}_1, \overline{B}_1, \overline{U}_3, \overline{V}_3, \overline{U}_2, \overline{V}_2$ gleich Konstanten, die gar keine

Schwierigkeiten machen, ergeben dann zwangsläufig die bei H. Liebmann geometrisch bedingten Unterscheidungen.

Die Lösung des Darbouxschen Problems, das noch die weitere Bedingung $\sum V_i'^2 = \sum B_i'^2$ anfügt, ist damit auch gegeben, wenn man nur in dieser zweiten Bedingung V_1 als unabhängige Veränderliche einführt und wie oben weiter differentiiert.

Kaunas (Litauen), den 11. Februar 1929.

(Eingegangen am 22. Februar 1929.)

Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle.

Von

Erich Kähler in Leipzig.

Die große Schwierigkeit, die die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen gegenüber der klassischen Funktionentheorie aufweist, liegt vor allem darin, daß zwischen geometrischen und analytischen Fragestellungen keine umkehrbar eindeutige Beziehung besteht. Und dies wiederum findet seinen Grund oder vielmehr seinen Ausdruck darin, daß die singulären Gebilde einer Funktion $F(x, y)$ keine isolierten Punkte oder Linien, sondern im allgemeinen (zweidimensionale) analytische Kurven sind.

Sehr deutlich zeigen sich diese Schwierigkeiten bereits bei den Fragen der Funktionentheorie zweier Variablen, die im folgenden im Anschluß an eine Arbeit von Herrn Brauner[1]) untersucht werden. Es handelt sich darum, die Verzweigung einer algebraischen, allgemein einer algebroiden Funktion $F(x, y)$ in der Umgebung einer singulären Stelle $x = a$, $y = b$ festzustellen. Obwohl die betreffenden Fragen zum größten Teil bereits von Herrn Brauner beantwortet sind, habe ich mir erlaubt, den Gegenstand auf dem etwas anschaulicheren Wege, der sich mir dargeboten hat, teilweise noch einmal darzustellen.

§ 1.

Bei einer algebroiden Funktion $f(x)$ einer Variablen ist der singuläre Punkt $x = a$ immer isoliert und daher die Verzweigung immer zyklisch, woraus man in elementarer Weise schließen kann, daß $f(x)$ in der Umgebung von $x = a$ nach Potenzen einer geeigneten Wurzelgröße $(x - a)^{\frac{1}{\nu}}$ entwickelt werden kann.

[1]) Hamb. Abh. 6 (1928) S. 1–55.

Anders ist es bei den Funktionen zweier Variablen. Man sagt, eine Funktion $z = F(x, y)$ verhalte sich in der Umgebung Σ von $x = a$, $y = b$ algebroid, wenn die analytische Fortsetzung von $F(x, y)$ längs beliebiger in Σ verlaufenden Wege immer nur eine endliche Anzahl verschiedener Zweige $z_1 = z_1(x, y)$, $z_2 = z_2(x, y)$, ..., $z_n = z_n(x, y)$ ergibt, die sich nur längs gewisser in Σ algebroiden Kurven[2]) — das sind zweidimensionale Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen Gebiet Σ — singulär verhalten. Diese singulären Kurven haben dabei entweder die Bedeutung von Verzweigungskurven, längs deren einige, eventuell alle Zweige von $z = F(x, y)$ zusammenhängen, d. h. dieselben Werte annehmen, oder sie sind Polkurven, oder auch beides zugleich. Da es stets einen in Σ holomorphen Faktor $\varphi(x, y)$ gibt, so daß das Produkt $\varphi(x, y) \cdot F(x, y)$ in Σ beschränkt bleibt, so können wir, indem wir z durch $z \cdot \varphi(x, y)$ ersetzen, von den Polkurven absehen. Wir können und wollen uns ferner auf eine so kleine Umgebung Σ von (a, b) beschränken, daß nur die Verzweigungskurven $P_1, P_2, \ldots, P_k$ in Betracht kommen, die durch (a, b) gehen, und daß diese außer (a, b) in Σ keinen weiteren Punkt gemein haben.

Beschreibt der Punkt (x, y), von einer Stelle (x', y') ausgehend, innerhalb Σ einen geschlossenen Weg L, ohne die Verzweigungskurven zu treffen, so werden die n Zweige $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch die analytische Fortsetzung längs L im allgemeinen eine Permutation erleiden. Offenbar entspricht zwei topologisch äquivalenten Wegen dieselbe Permutation.

Alle geschlossenen, in (x', y') anfangenden und dort endenden Wege L definieren durch ihre Zusammensetzung eine unendliche Gruppe Γ, zu der die Permutationsgruppe der Zweige $z_1, z_2, \ldots, z_n$ isomorph ist. Um also die Verzweigung der Funktion $z = F(x, y)$ zu studieren, ist es vor allem erforderlich, die Gruppe Γ zu kennen.

Der Einfachheit halber setzen wir $a = 0$, $b = 0$. Wenn wir voraussetzen, daß $x = 0$ keine singuläre Kurve ist — was durch eine unwesentliche lineare Transformation stets erreicht werden kann —, so ist jede singuläre Kurve von $F(x, y)$ in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ durch eine Entwicklung

$$y = f(x) = a_1 x^{\frac{m_1}{n}} + a_2 x^{\frac{m_2}{n}} + \ldots \quad (0 < m_1 < m_2 < \ldots) \tag{1}$$

gegeben, die für hinreichend kleine $|x|$, etwa für $|x| \leqq \mu$, gleichmäßig konvergiert. Es gilt daher eine Beziehung folgender Art:

$$|y| < M \cdot |x|^{\frac{m_1}{n}} \quad \text{für} \quad |x| \leqq \mu .$$

---

[2]) Eine analytische Kurve verhält sich in der Umgebung einer Stelle $x = 0$, $y = 0$ algebroid, wenn sie dort eine Darstellung von der Form (1) zuläßt.

Wir wollen nun für Σ ein solches Zylindergebiet

$$|x| \leqq \varrho_1, \quad |y| \leqq \varrho_2$$

wählen, daß die den einzelnen Kurven entsprechenden Entwicklungen (1) in ganz Σ gültig sind und überdies für alle derartigen Kurven $|y| < \varrho_2' < \varrho_2$ bleibt, wenn $|x| \leqq \varrho_1$ ist. Dies ist nach den obigen Bemerkungen immer möglich, wenn man nur ϱ_1 hinreichend klein wählt und ändert an den übrigen Betrachtungen nichts, da es uns ja nur um die Verzweigung in der nächsten Umgebung des Nullpunktes zu tun ist.

Da Σ ein vierdimensionales Gebiet ist, kann die Anschauung nicht ohne weiteres über die Struktur von Γ Aufschluß geben. Man kann aber, wie sogleich gezeigt werden soll, alle Wege L derart deformieren (ohne die Kurven P_ν zu treffen), daß sie in die dreidimensionale Mannigfaltigkeit $S = Z + Z'$, wo Z durch

$$|x| = r, \quad |y| \leqq \varrho_2 \qquad (r < \varrho_1)$$

und Z' durch

$$|x| \leqq r, \quad |y| = \varrho_2$$

definiert ist, zu liegen kommen.

Es sei $x = t \cdot e^{i\varphi}$, $y = \eta_1 + i\eta_2$ und $y = f_\nu(t \cdot e^{i\varphi})$ die Gleichung der singulären Kurve P_ν. Man bilde nun eine komplexe Funktion $Y = Y_1 + iY_2$ der reellen Argumente t, η_1, η_2 von folgender Beschaffenheit: $Y(t, \eta_1, \eta_2)$ soll mit seinen ersten Ableitungen für alle $\varrho_1 \geqq t \geqq 0$, $\eta_1^2 + \eta_2^2 \leqq \varrho_2$ stetig sein, mit Ausnahme etwa des Punktes $t = 0$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$. Ferner soll Y sich in den Punkten von P_ν auf $\frac{\partial f_\nu}{\partial t}$ reduzieren ($\nu = 1, 2, \ldots, k$). Da nach Voraussetzung die Kurven P_ν sich nur in $(0, 0, 0)$ schneiden, so sind diese Bedingungen alle miteinander vereinbar. Der Punkt $(0, 0, 0)$ ist im allgemeinen ein Unstetigkeitspunkt von Y.

Setzt man nun

$$\frac{d\eta_1}{dt} = Y_1(t, \eta_1, \eta_2), \quad \frac{d\eta_2}{dt} = Y_2(t, \eta_1, \eta_2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

so geht durch einen beliebigen von $(x = 0, y = 0)$ verschiedenen Punkt $x_0 = t_0 \cdot e^{i\varphi_0}$, $y_0 = \eta_1^0 + i\eta_2^0$ von Σ eine und nur eine Integrallinie $l_{x_0 y_0}$ dieses Systems.

Diese Linien können sich daher höchstens in $(x = 0, y = 0)$ schneiden. Ferner trifft eine Linie $l_{x_0 y_0}$ die singulären Kurven $P_1, P_2, \ldots, P_k$ außer etwa in $(0, 0)$ entweder überhaupt nicht oder sie ist ganz in einer dieser Kurven enthalten.

Mit Hilfe der Linien l_{xy} kann man nun jeden Punkt (x, y) von Σ auf S projizieren, da l_{xy} stets entweder Z oder Z' trifft. Zufolge der Eigenschaften der Linien l_{xy} entspricht bei dieser Zuordnung der Kurve P_ν

ine geschlossene Linie λ_ν (nämlich der Schnitt von Z mit P_ν), ferner iner Linie L, die die Kurven P_ν nicht trifft, eine die λ_ν nicht schneidende inie in S. Weiter entspricht offenbar einem Wege L, der in Σ homolog Null ist, ein Weg $\bar{L}$, der sich in S auf einen Punkt reduzieren läßt.

Hiernach ist die Gruppe Γ, welche die Zusammensetzung der in Σ' erlaufenden geschlossenen Wege definiert, holoedrisch isomorph mit der Gruppe G, welche nur die in S verlaufenden Wege in Betracht zieht.

§ 2.

Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit $S = Z + Z'$ kann leicht der Anschauung zugänglich gemacht werden. Es sei

$$x = t \cdot e^{i\varphi}, \qquad y = \varrho \cdot e^{i\psi}.$$

Setzt man dann

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= (R + \varrho\cos\psi)\, e^{i\varphi}, \qquad (R > \varrho_2) \\ \zeta &= \varrho \sin\psi, \end{aligned}$$

so wird Z, d. h. die Mannigfaltigkeit $t = r$, $\varrho \leqq \varrho_2$, eineindeutig auf das Innere und den Rand des Torus T:

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= (R + \varrho_2\cos\psi)\, e^{i\varphi}, \\ \zeta &= \varrho_2 \sin\psi \end{aligned}$$

im gewöhnlichen (ξ, η, ζ)-Raum bezogen.

Analog läßt sich auch Z' auf einen Torus T' abbilden, indem man

$$\begin{aligned} \xi' + i\eta' &= (R' + t\cos\varphi)\, e^{i\psi}, \qquad (R' > r) \\ \zeta' &= t \sin\varphi \end{aligned}$$

setzt. Die Oberflächen von T und T' sind dann derart aufeinander bezogen, daß den Meridiankreisen von T die Breitenkreise von T', den Meridiankreisen von T' die Breitenkreise von T eineindeutig zugeordnet sind. Nun kann man aber T' auf den Außenraum von T derart abbilden, daß die eben beschriebene Randzuordnung zu einer Identität wird. Man hat dann jedoch das Unendlichferne des (ξ, η, ζ)-Raumes als einen Kreis anzusehen, was aber bei den vorliegenden topologischen Betrachtungen nichts ausmacht.

Den Linien λ_ν entsprechen gewisse im (ξ, η, ζ)-Raum, und zwar innerhalb T, verlaufende Linien $\bar{\lambda}_\nu$. Um nun die Struktur der Gruppe G kennenzulernen, müssen wir uns erst über Gestalt und Lage der Linien λ_ν bzw $\bar{\lambda}_\nu$ orientieren. Nach einer Bemerkung in § 1 ist λ_ν der Schnitt von P_ν und Z (d. h. $|x| = r$).

Es sei

$$(2) \qquad y = f(x) = a_1 x^{\frac{m_1}{n}} + a_2 x^{\frac{m_2}{n}} + a_3 x^{\frac{m_3}{n}} + \ldots \qquad (0 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots)$$

die Entwicklung für die Kurve P, wobei immer nur Exponenten mit dem Nenner n auftreten sollen. Setzen wir

$$a_1 = A_1 e^{i\alpha_1}, \quad a_2 = A_2 e^{i\alpha_2}, \quad a_3 = A_3 e^{i\alpha_3}, \quad \ldots \quad (A_\nu \text{ reell} > 0),$$

dann stellt sich der Schnitt von P mit Z dar in der Form

$$(3) \quad x = r e^{i\varphi}, \quad y = A_1 r^{\frac{m_1}{n}} e^{i\left(\frac{m_1}{n}\varphi + \alpha_1\right)} + A_2 r^{\frac{m_2}{n}} e^{i\left(\frac{m_2}{n}\varphi + \alpha_2\right)} + A_3 r^{\frac{m_3}{n}} e^{i\left(\frac{m_3}{n}\varphi + \alpha_3\right)} + \ldots.$$

Deutet man hier die Parametergröße φ als die Zeit, so stellt die letzte Gleichung eine Epizykelbewegung von der Periode $2n\pi$ in der y-Ebene dar, deren Radien r_ν bzw. gleich

$$(4) \qquad r_1 = A_1 r^{\frac{m_1}{n}}, \quad r_2 = A_2 r^{\frac{m_2}{n}}, \quad r_3 = A_3 r^{\frac{m_3}{n}}, \quad \ldots$$

sind. Da es uns freisteht, r beliebig klein zu wählen, und da

$$\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} = \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} r^{\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{n}} \leqq \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} r^{\frac{1}{n}}$$

ist, können wir annehmen, daß dieser Quotient für alle ν und alle in Betracht kommenden Kurven P_i kleiner ist als eine beliebig gewählte Zahl $q < 1$.

Im (ξ, η, ζ)-Raum entspricht dem Schnitt (3) eine im Innern von T verlaufende Linie λ, die sich nach n Umläufen schließt. Der Vergleich mit der Epizykelbewegung gibt eine deutliche Übersicht über den Verlauf dieser Linie.

Nimmt man von der Entwicklung

$$(5) \qquad y = \sum_h r_h e^{\left(\frac{m_h}{n}\varphi + \alpha_h\right)i}$$

nur das erste Glied

$$y^{(1)} = r_1 e^{\left(\frac{m_1'}{n_1}\varphi + \alpha_1\right)i}, \qquad \frac{m_1'}{n_1} = \frac{m_1}{n}, \ (m_1', n_1) = 1,$$

so entspricht dem eine Knotenlinie L_1, die sich auf dem Torus τ:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi + i\eta &= (R + r_1 \cos\psi) e^{i\varphi}, \\ \zeta &= \quad r_1 \sin\psi \end{aligned}$$

gemäß der Gleichung $\psi = \frac{m_1'}{n_1}\varphi + \alpha_1$ n_1-mal in der Richtung der Breitenkreise und m_1'-mal im Meridian herumwindet.

Wird auch das zweite Glied hinzugenommen:

$$y^{(2)} = r_1 e^{\left(\frac{m_1'}{n_1}\varphi + \alpha_1\right)i} + r_2 e^{\left(\frac{m_2'}{n_2}\varphi + \alpha_2\right)i}, \qquad \frac{m_2'}{n_2} = \frac{m_2}{n}, \ (m_2', n_2) = 1,$$

o erhält man eine Linie L_2 von folgender Art. Mit L_1 als Achsenlinie konstruiere man die Schlauchfläche σ_1:

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \left(R + r_1 \cos\left(\frac{m_1'}{n_1}\varphi + \alpha_1\right) + r_2 \cos\psi_1\right) e^{i\varphi}, \\ \zeta &= \quad r_1 \sin\left(\frac{m_1'}{n_1}\varphi + \alpha_1\right) + r_2 \sin\psi_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Auf dieser windet sich dann L_2 nach Angabe der Gleichung

$$\psi_1 = \frac{m_2'}{n_2}\varphi + \alpha_2$$

herum. Die Linie L_2 schließt sich nach $\nu_2 = [n_1 n_2]$ Umläufen um die ζ-Achse, wo ν_2 das kl. gem. Vielf. von n_1, n_2 bedeutet, und umkreist dabei $u_2 = \nu_2 \cdot \frac{m_2'}{n_2}$-mal den Meridian von σ_1. Die Zahl der Umläufe längs σ_1 beträgt $\frac{\nu_2}{n_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$ ($n_1 = \nu_1$ gesetzt).

Allgemein entspricht dem h-ten Abschnitt

$$y^{(h)} = \sum_{l=1}^{h} r_l e^{\left(\frac{m_l'}{n_l}\varphi + \alpha_l\right)i}, \qquad (m_l', n_l) = 1, \ \frac{m_l'}{n_l} = \frac{m_l}{n}$$

eine auf der Schlauchfläche σ_{h-1}

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \left(R + \sum_{l=1}^{h-1} r_l \cos\left(\frac{m_l'}{n_l}\varphi + \alpha_l\right) + r_h \cos\psi_{h-1}\right) e^{i\varphi}, \\ \zeta &= \quad \sum_{l=1}^{h-1} r_l \sin\left(\frac{m_l}{n_l}\varphi + \alpha_l\right) + r_h \sin\psi_{h-1} \end{aligned} \tag{8}$$

mit der Achsenlinie L_{h-1} gelegene Linie L_h, deren Gleichung in den Flächenkoordinaten φ, ψ_{h-1} lautet:

$$\psi_{h-1} = \frac{m_h'}{n_h}\varphi + \alpha_h.$$

L_{h-1} schließt sich nach $\nu_{h-1} = [n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{h-1}]$, L_h nach $\nu_h = [n_1, n_2, \ldots, n_h]$ Umläufen um die ζ-Achse, wenn allgemein $[n_1, n_2, \ldots, n_p]$ das kl. gem. Vielf. von $n_1, n_2, \ldots, n_p$ bezeichnet. Daher vollführt L_h $\frac{\nu_h}{\nu_{h-1}}$ Umläufe längs σ_{h-1} ehe sie sich schließt.

Da es uns nur auf die topologischen Verhältnisse ankommt, ist es nicht nötig, die ganze Reihenentwicklung (5) zur Veranschaulichung von λ heranzuziehen; vielmehr genügt es, gewisse der Anfangsglieder zu betrachten.

In dem Falle, wo nur eine singuläre Kurve vorhanden ist, braucht man stets nur die charakteristischen Anfangsglieder von (2) bzw. (5) zu nehmen. Man versteht darunter denjenigen Abschnitt $y^{(k)}$, für welchen zum ersten Male

$[n_1, n_2, \ldots, n_k] = n$ ist. Unter den Linien $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k, L_{k+1}, \ldots$ ist dann L_k die erste, welche sich erst nach n Umläufen schließt. Daß L_k und $\lambda = L_\infty$ topologisch äquivalent sind, beweist man folgendermaßen.

Für den Abstand zweier in derselben Ebene $\varphi =$ konst. gelegenen Punkte $y_1 = f(\varphi + 2k_1\pi)$, $y_2 = f(\varphi + 2k_2\pi)$ $(k \neq k_2)$ von L_∞ gilt

$$(9) \quad |y_1 - y_2| > r_h \left|1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right| - 2r_{h+1} - 2r_{h+2} - \ldots > r_h \left[\left|1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right| - \frac{2q}{1-q}\right],$$

wenn h $(\leqq k)$ der erste der Indizes $1, 2, 3, \ldots$ ist, bei welchem die Differenz

$$r_l e^{\left(\frac{m_l}{n}(\varphi + 2k_1\pi) + \alpha_l\right) i} - r_l e^{\left(\frac{m_l}{n}(\varphi + 2k_2\pi) + \alpha_l\right) i}$$

nicht verschwindet. Andererseits ist der Abstand zweier zu demselben Parameterwert φ gehörigen Punkte von L_k und L_∞ kleiner als

$$2r_{k+1} + 2r_{k+2} + 2r_{k+3} + \ldots < 2r_k \frac{q}{1-q} < 2r_h \frac{q^{1+k-h}}{1-q}.$$

Durch Wahl eines hinreichend kleinen q kann stets erreicht werden, daß der letztere Abstand kleiner ist als die rechte Seite von (9) und somit die Linie L_∞ stetig in L_k übergeführt werden kann.

Liegt also nur eine singuläre Kurve vor, so genügt zur Charakterisierung der topologischen Verhältnisse die Angabe der Linie L_k, und dazu wiederum braucht man nur die Zahlen

$$\frac{m_1'}{n_1}, \frac{m_2'}{n_2}, \frac{m_3'}{n_3}, \ldots, \frac{m_k'}{n_k}$$

zu kennen.

Sind mehrere singuläre Kurven vorhanden und haben diese alle voneinander verschiedene charakterische Abschnitte, so reicht deren Angabe auch im vorliegenden Falle zur Beschreibung der topologischen Verhältnisse aus.

Seien

$$y = a_1 x^{\frac{m_1}{n_1}} + a_2 x^{\frac{m_2}{n_2}} + \ldots + a_k x^{\frac{m_k}{n_k}},$$

$$y = a_1' x^{\frac{m_1'}{n_1'}} + a_2' x^{\frac{m_2'}{n_2'}} + \ldots + a_l x^{\frac{m_l'}{n_l'}}$$

die charakteristischen Anfangsglieder zweier solcher Kurven P, P. Ist hierbei

$$a_1 = a_1', \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1'}{n_1'},$$

$$a_2 = a_2', \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_2'}{n_2'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{\tau-1} = a_{\tau-1}', \quad \frac{m_{\tau-1}}{n_{\tau-1}} = \frac{m_{\tau-1}'}{n_{\tau-1}'},$$

dagegen nicht gleichzeitig

$$a_\tau = a'_\tau, \qquad \frac{m_\tau}{n_\tau} = \frac{m'_\tau}{n'_\tau} \qquad (\tau \geqq 1),$$

so sind L_h und L'_h für $h = 1, 2, \ldots, \tau - 1$ identisch, hingegen L_τ und L'_τ verschieden. Nehmen wir zuerst an, daß $\frac{m_\tau}{n_\tau} < \frac{m'_\tau}{n'_\tau}$ ist, dann liegt (immer unter der Voraussetzung, daß q hinreichend klein gewählt ist) $\sigma'_{\tau-1}$ ganz innerhalb der Schlauchfläche $\sigma_{\tau-1}$, und daher wird L'_τ und somit auch L'_l ganz von L_τ und also auch von L_k umschlungen. Ist $\frac{m_\tau}{n_\tau} = \frac{m'_\tau}{n'_\tau}$, so sind L_τ und L'_τ topologisch äquivalent, und es ist gleichgültig, ob man sich $\sigma'_{\tau-1}$ als innerhalb oder außerhalb $\sigma_{\tau-1}$ liegend denkt. Im Falle zweier singulären Kurven genügt also die Angabe der Zahlen

$$(P) \qquad \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_k}{n_k},$$

$$(P') \qquad \frac{m'_1}{n'_1}, \frac{m'_2}{n'_2}, \ldots, \ldots, \frac{m'_l}{n'_l}$$

und des ersten Index τ, für den nicht gleichzeitig $a_\tau = a'_\tau$, $\frac{m_\tau}{n_\tau} = \frac{m'_\tau}{n'_\tau}$ ist. Sollten die charakteristischen Abschnitte vollständig übereinstimmen, so sind von den Entwicklungen von P, P' noch so viele Glieder hinzuzunehmen, bis sich der Unterschied bemerkbar macht, und auch dann braucht man nur die zugehörigen Zahlenreihen (P), (P') und den Index τ zu kennen.

Entsprechendes gilt für den Fall, wo mehr als zwei singuläre Kurven auftreten.

Nachdem wir uns über Gestalt und Lage der Linien $\bar{\lambda}_\nu$ orientiert haben, ist es unsere Aufgabe, die Struktur von Γ zu untersuchen. Zufolge einer früheren Bemerkung ist Γ holoedrisch isomorph zu der Gruppe G der geschlossenen, im (ξ, η, ζ)-Raum verlaufenden Wege, welche von einem Punkte Π ausgehend zu Π zurückkehren ohne die Linien $\bar{\lambda}$ zu treffen.

§ 3.

Untersuchen wir zunächst den einfachsten Fall, wo nur eine singuläre Kurve auftritt und überdies der charakteristische Abschnitt nur aus einem Term besteht, und zwar sei

$$y = a x^{\frac{m}{n}} + \ldots \qquad (m, n) = 1$$

die Gleichung dieser Kurve. Dieser entspricht im (ξ, η, ζ)-Raum eine auf dem Torus τ (siehe Gleichung (6)) gelegene Knotenlinie L_1, die in Parameterdarstellung die Gleichung $\psi = \frac{m}{n}\varphi + \alpha$ besitzt.

Es sei L ein beliebiger durch Π gehender Weg. Dieser wird aus mehreren Stücken von folgender Art bestehen. Von Π führt ein außerhalb τ verlaufendes Stück l' zu einem Punkt A' auf τ, von dem ein im Innern von τ liegendes Stück a' zu einem Punkte B' auf τ, dann folgt ein Stück b', das B', ganz außerhalb τ verlaufend, mit einem Punkte A'' auf τ verbindet, dann ein inneres Stück a'' mit den Endpunkten A'', B'' usw. Schließlich gelangt man zu einem Punkte $B^{(\mu)}$, von dem aus eine Linie l'' direkt wieder zu Π führt. Nun kann man durch eine geringfügige Deformation von L stets erreichen, daß die Punkte $A', B', A'', \ldots, B^{(\mu)}$ alle auf demselben Breitenkreis c und derselben Linie

$$\psi - \frac{m}{n}\varphi = \text{konst.} = k \tag{10}$$

liegen, und zwar auf derjenigen, welche durch einen beliebigen Punkt A auf τ geht (A möge auch auf c liegen). Ferner kann man durch folgende Konstruktion L stetig so verschieben, daß jene Punkte alle in A zu liegen kommen. Zunächst setzt man an l' kurz vor A' ein dicht neben (10) verlaufendes Stück A', das zu A führt, dort in das Innere von τ eindringt und hier in einem parallel zu λ' aber umgekehrt laufenden inneren Stück α' seine Fortsetzung findet. Das letztere wird dann kurz hinter A' mit a' vereinigt. Indem man den Teil $l' + a'$ durch $l' + \lambda' + \alpha' + a'$ ersetzt, erreicht man, daß A' mit A zusammenfällt. Auf ähnliche Weise können auch $B', A'', B'', \ldots, B^{(\mu)}$ mit A zur Deckung gebracht werden. Außerdem kann noch $l' + \lambda'$ durch eine Π mit A verbindende Gerade l und evtl. ein sich um τ schlingendes Stück b_0 und ebenso das letzte von A zurück nach Π führende Stück durch einige Umkreisungen von τ und die Gerade l ersetzt werden. Hierdurch ist L zerlegt worden in einzelne Stücke

$$l, b_0, a_1, b_1, a_2, \ldots, a_\mu, b_\mu, l^{-1},$$

wobei die a_i, b_i geschlossene in A anfangende und dort endende Stücke bezeichnen, die ganz im Innern bzw. im Außenraum von τ verlaufen und l^{-1} den rückwärts durchlaufenen Weg l darstellt.

Bedeutet nun p ein von A bis zurück nach A gehendes Wegstück, das τ außen im Sinne wachsender ψ einfach umkreist, und q ein entsprechendes Stück, das τ im Innern in der Richtung $d\varphi > 0$ einfach umläuft, so läßt sich jedes a_i durch einige Wiederholungen von p oder des umgekehrt durchlaufenen p^{-1} bilden und analog jedes b_i aus q oder q^{-1} zusammensetzen. Hieraus ergibt sich, daß jeder Weg L sich aus

$$l p l^{-1}, \quad l p^{-1} l^{-1}, \quad l q l^{-1} \quad l q^{-1} l^{-1}$$

zusammensetzen läßt. Wenn also zu $l p l^{-1}$, $l q l^{-1}$ die Substitutionen P, Q gehören, so sind P, Q die Erzeugenden von Γ.

Bestimmen wir z. B. die Darstellung P' von folgender einfachen Umkreisung der Toruslinie. Von A führt im Innern von τ in der Richtung $d\varphi > 0$ ein Stück a' zum Punkte B' auf τ und von dort ein parallel laufendes äußeres Stück b' zurück zu A. Hierbei soll L_1 von a' nur einmal unterkreuzt und von b' nur einmal überkreuzt werden. Wendet man nun die oben erklärte Konstruktion an, verschiebt also B so, daß es auf demselben Breitenkreise und derselben Linie $\psi - \frac{m}{n}\varphi = \text{konst.}$ wie A liegt, und setzt sodann an a' ein längs (10) verlaufendes Stück α und an b' ein umgekehrt verlaufendes Stück β an, so erkennt man, daß P' von der Form $Q^{\lambda} P^{-\varkappa}$ ist. Wenn man längs α von B nach A wandert, hat man $\left(\lambda - \frac{1}{m}\right)$ Äquatordrehungen und andererseits $\varkappa$ Meridiandrehungen auszuführen. Da nun hierbei eine Meridiandrehung gleichbedeutend ist mit $\frac{n}{m}$ Äquatordrehungen, so hat man

$$\frac{n\varkappa}{m} = \lambda - \frac{1}{m} \quad \text{oder} \quad m\lambda - n\varkappa = 1. \tag{11}$$

Die Exponenten λ, $\varkappa$ sind also die Lösungen der Diophantischen Gleichung $mx - ny = 1$. Es ist gleich, welche Lösung man wählt; denn zwischen P und Q besteht die Relation

$$P^m Q^{-n} = 1. \tag{12}$$

Dies erkennt man durch Betrachtung des Weges lkl^{-1}, wo k sich mit der einfach durchlaufenen Linie (10) deckt. Sieht man k als zu dem Innern von τ gehörend an, so bestimmt lkl^{-1} die Substitution Q^n, wird dagegen k als eine äußere Linie angesehen, so erhält man für lkl^{-1} die Darstellung P^m. Es gilt also

$$Q^n = P^m. \tag{13}$$

Die Beziehung (12) ist aber auch die einzige unabhängige Relation, die zwischen P und Q besteht. Jeder solchen entspricht nämlich ein geschlossener Weg Λ, der sich auf den Punkt Π zusammenziehen läßt. Es müssen sich also die im Innern von τ verlaufenden Stücke von A — das sind die, welche den Potenzen von Q in jener Relation entsprechen — in den Außenraum bringen lassen. Das ist aber nur möglich, wenn sich das betreffende Stück mit der ein- oder mehrfach durchlaufenen Linie (10) zur Deckung gebracht werden kann, d. h. wenn der Exponent von Q ein (positives oder negatives) Vielfaches von n ist. Dann aber ließe sich nach (13) Q^n überall durch P^m ersetzen und man hätte eine Relation von der Form $P^{\mu} = 1$, was nur für $\mu = 0$ möglich ist.

§ 4.

In dem Falle, wo der charakteristische Abschnitt zwei Glieder besitzt, zeigt man genau wie oben, daß jeder durch Π gehende und die Linie L_2 nicht treffende Weg L sich aus Stücken

$$l, b_0, a_1, b_1, a_2, \ldots, a_\mu, b_\mu, l^{-1}$$

zusammensetzen läßt, wo l eine Gerade ist, die Π mit einem Punkte A auf σ_1 (siehe Gleichung (7)) verbindet und a_i im Innern von σ_1, b_i im Außenraum verlaufende Linien bezeichnen, die in A anfangen und dort enden. Haben nun P_1, Q_1 in bezug auf den Außenraum, für den ja σ_1 die Rolle eines Torusknotens L_1 mit den Charakteristiken m_1', n_1 spielt, dieselbe Bedeutung wie P, Q im vorigen Falle, so läßt sich jede zu einer Linie $l b_i l^{-1}$ gehörige Substitution aus P_1, Q_1 zusammensetzen und es besteht die Relation

$$Q_1^{n_1} = P_1^{m_1}. \tag{14}$$

Ferner ist jeder Weg a_i äquivalent einer ein- oder mehrfachen Durchlaufung von σ_1 längs der Achse von σ_1. Bedeutet a ein von A ausgehendes Wegstück, das nach einer einfachen Durchlaufung des Innern von σ_1 im Sinne $d\varphi > 0$ zurückkehrt, und ist φ_2 die zu $l a l^{-1}$ gehörende Substitution, so gehört zu $l a_i l^{-1}$ eine Potenz von Q_2. Hiernach wird Γ durch P_1, Q_1, Q_2 erzeugt.

Die Fundamentalrelation zwischen P_1, Q_1, Q_2 erhält man wieder durch Betrachtung eines Weges $l k l^{-1}$, wo k die im Sinne $d\varphi > 0$ einfach durchlaufene Linie $\psi_1 - \frac{m_2'}{n_2}\varphi = \text{konst.}$ darstellt. Wird k zu dem Innern von σ_1 gerechnet, so führt $l k l^{-1}$ auf die Substitution $Q_2^{\frac{\nu_2}{\nu_1}}$. Im andern Falle kann man sich k erzeugt denken durch $\mu_2 = \nu_2 \cdot \frac{m_2'}{n_2}$ Umkreisungen von σ_1 und $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ darauffolgenden Umläufen längs σ_1. Zu einer Umkreisung von σ_1 gehört nach (11) eine Substitution

$$P_2 = Q_1^{\lambda_1} P_1^{-\varkappa_1}, \qquad m_1' \lambda_1 - n_1 \varkappa_1 = 1 \tag{15}$$

und zu einem Umlauf längs σ_1 die Substitution $Q_1^{n_1}$. Daher bestimmt der Weg $l k l^{-1}$ das Element $P_2^{\mu_2} Q_1^{n_1 \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1}} = P_2^{\mu_2} Q_1^{\nu_2}$ und es gilt

$$Q_2^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} = (Q_1^{\lambda_1} P_1^{-\varkappa_1})^{\mu_2} Q_1^{\nu_2}. \tag{16}$$

Aus der Ableitung dieser Gleichung erkennt man ohne weiteres, daß die rechte Seite nichts anderes ist als die Darstellung von L_2 in der durch L_1 bestimmten Gruppe $\{P_1, Q_1\}$.

Die Relationen (14), (16) sind die einzigen unabhängigen, die zwischen P_1, Q_1, Q_2 bestehen. Daß zwischen P_1, Q_1 allein nur die Beziehung (14) bestehen kann, haben wir schon gesehen. Enthält nun eine von (16) verschiedene Relation

$$(P_1 Q_1 Q_2) = 1 \tag{17}$$

Q_2, so muß die durch die linke Seite repräsentierte Linie, die sich auf Π zusammenziehen läßt, gewisse im Innern von σ_1 verlaufende Stücke a_i besitzen. Damit sich a_i aus σ_1 herausziehen läßt, muß es sich mit der ein- oder mehrfach durchlaufenen Linie $\psi_1 - \frac{m_2'}{n_2} = \text{konst.}$, auf welcher A liegt, zur Deckung bringen lassen, d. h. $l a_i l^{-1}$ bestimmt eine Substitution von der Form $Q_2^{\frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \lambda}$ (λ ganz). Indem man nun in (17) überall $Q_2^{\frac{\nu_2}{\nu_1}}$ nach (16) durch P_1, Q_1 ausdrückt, gewinnt man eine Relation zwischen P_1, Q_1 allein, usw.

Allgemein kann man sagen: Besitzt der charakteristische Abschnitt k Glieder, so läßt sich die zugehörige Gruppe G aufbauen aus $k+1$ Elementen $P_1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, welche einer einfachen Umkreisung von τ bzw. einer einfachen Durchlaufung von $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}$ entsprechen[3]). Genauer müßte man sagen: Q_i ist die Substitution, welche dem Wege $l l_{i-1} l^{-1}$ entspricht, wo l eine Π mit A (auf σ_{k-1}) verbindende Gerade und l_{i-1} eine mit L_{i-1} topologisch äquivalente, von A nach A führende Linie bezeichnet. Zwischen $P_1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ bestehen k Relationen von der Form

$$\begin{aligned}
&Q_1^{\nu_1} = L_1(P_1) && (\nu_1 = n_1),\\
&Q_2^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} = L_2(P_1 Q_1) && (\nu_i = [n_1 n_2 \ldots n_i]),\\
&Q_3^{\frac{\nu_3}{\nu_2}} = L_3(P_1 Q_1 Q_2), && \qquad (18)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\\
&Q_k^{\frac{\nu_k}{\nu_{k-1}}} = L_k(P_1 Q_1 Q_2 \ldots Q_{k-1}).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $L_1(P_1) = P_1^{m_1'}$ und allgemein $L_{i+1}(P_1 Q_1 Q_2 \ldots Q_i)$ die Darstellung von L_{i+1} (oder genauer von $l l_{i+1} l^{-1}$) in der durch L_i definierten Gruppe $\{P_1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_i\}$. Es gibt nur k unabhängige Relationen.

Man beweist diese Behauptungen sehr leicht durch Schluß von k auf $k+1$. Da aber die hierzu nötigen Betrachtungen genau denen entsprechen, die von $k=1$ auf $k=2$ führten, so erübrigt sich die nähere Ausführung des Beweises.

[3]) Unter L_0 ist hier der Kreis $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, $\zeta = 0$ zu verstehen.

§ 5.

Gehen wir zu dem Fall über, wo zwei singuläre Kurven

$$(I) \qquad y = a_1 x^{\frac{m}{n}} + \dots,$$

$$(II) \qquad y = a_1' x^{\frac{m'}{n}} + \dots$$

vorhanden sind und für beide der charakteristische Teil nur aus einem Gliede besteht.

Wenn nicht gleichzeitig $a_1 = a_1'$, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ ist, genügen die Zahlen $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ zur Kennzeichnung der topologischen Verhältnisse. Man hat zwei Knotenlinien L_1, L_1', die auf den Tori τ bzw. τ' liegen. Ist $\frac{m}{n} \leqq \frac{m'}{n'}$, so kann man annehmen, daß τ' ganz innerhalb τ liegt.

Durch τ und τ' wird der (ξ, η, ζ)-Raum in drei Teile $(A), (B), (C)$ zerlegt, wo (A) den Außenraum von τ, (B) den Raum zwischen τ und τ' und (C) das Innere von τ' darstellt. Dieser Einteilung entsprechend kann man jeden durch Π gehenden geschlossenen Weg L in mehrere Stücke a, b, b', c von folgender Art zerlegen. Die Stücke a verlaufen in (A) und haben als Endpunkte Π und einen auf τ gelegenen Punkt; die Stücke b, b' liegen in (B), wobei die ersteren ihre beiden Endpunkte auf τ, die letzteren einen Endpunkt auf τ und den anderen auf τ' haben; schließlich verbinden die in (C) verlaufenden Stücke c zwei Punkte von τ' miteinander.

Genau wie im Falle eines Torus zeigt man nun, daß durch eine stetige Deformation der Linien a, b, b' stets erreicht werden kann, daß alle ihre auf τ liegenden Endpunkte mit einem festen Punkte $\bar{A}$ zusammenfallen. Danach ergibt die Anwendung derselben Konstruktion auf τ', daß alle auf τ' liegenden Endpunkte von b', c stetig in ein und demselben Punkt $\bar{B}$ übergeführt werden können. Man kann fernerhin $\bar{A}, \bar{B}$ so wählen, daß beide dieselben φ, ψ-Koordinaten besitzen.

Bezeichnet man die geradlinige Verbindung von Π nach $\bar{A}$ mit l, die von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$ mit h, ferner mit $\bar{a}$ eine in (A) von $\bar{A}$ nach $\bar{A}$ zurückführende Linie, welche τ einmal im Sinne $d\psi > 0$ umkreist, weiter mit $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ zwei in (B) von $\bar{A}$ nach $\bar{A}$ verlaufende Linien, die τ' im Sinne $d\psi > 0$ bzw. $d\varphi > 0$ einfach umlaufen, bedeutet schließlich $\bar{c}$ einen einfachen Umlauf $(d\varphi > 0)$ im Innern von τ' mit $\bar{B}$ als Anfangs- und Endpunkt, so kann nach obiger Deformation jeder Weg a aus $l, \bar{a}, \bar{a}^{-1}, l^{-1}$, jedes b aus $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_1^{-1}, \bar{b}_2^{-1}$, jedes b' aus h und $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_1^{-1}, \bar{b}_2^{-1}$, jedes c aus $\bar{c}$ oder $\bar{c}^{-1}$ zusammengesetzt werden.

Hiernach läßt sich jeder Weg L aus den Elementarwegen

$$p = l\bar{a}l^{-1}, \quad q = lh\bar{c}h^{-1}l^{-1}, \quad r = l\bar{b}_1 l^{-1}, \quad s = l\bar{b}_2 l^{-1}$$

und ihren Inversen aufbauen. Die zugehörige Gruppe wird also aus den durch p, q, r, s bestimmten Substitutionen P, Q, R, S erzeugt.

Man erhält eine Fundamentalrelation zwischen P, Q, R, S, indem man die durch $\bar{A}$ gehende Linie k: $\psi - \frac{m}{n}\varphi = \text{konst.}$ auf τ, genauer die Linie klk^{-1}, auf zwei verschiedene Weisen darstellt. Denkt man sich k in (A) gelegen, so gehört zu klk^{-1} die Substitution P^m. Sieht man sie dagegen als zu (B) gehörig an, so ist sie eine Knotenlinie, welche τ' m-mal im Meridian umschlingt und dabei n Umläufe längs τ' vollführt. Man findet also hier für klk^{-1} die Substitution $R^m S^n$ und es gilt

$$P^m = R^m S^n. \tag{19}$$

Eine ganz analoge Betrachtung, angewandt auf die Linie $lk'l^{-1}$, wo k' die durch $\bar{B}$ gehende Linie $\psi - \frac{m'}{n'}\varphi = \text{konst.}$ auf τ' darstellt, führt auf die Relation

$$R^{m'} S^{n'} = Q^{n'}, \tag{20}$$

indem man einmal k' als zu (B) gehörig, das andere Mal als zu (C) gehörig ansieht.

Ferner sind, wie leicht ersichtlich, R und S vertauschbar, was auf die Relation

$$RS = SR \tag{21}$$

führt.

Außer den Beziehungen (19), (20), (21) gibt es keine anderen unabhängigen Relationen zwischen P, Q, R, S.

Zunächst kann zwischen R, S allein neben (21) keine weitere Relation $R^\alpha S^\beta = 1$ bestehen, da einer solchen immer ein auf Π zusammenziehbarer Weg Λ entspricht und andererseits jedes Symbol $R^\alpha S^\beta$ $(\alpha > 0)$ einen Weg darstellt, der sich um τ' schlingt und daher nicht auf Π reduziert werden kann.

Enthält nun eine Relation

$$(PQRS) = 1 \tag{22}$$

das Element Q, so entspricht jedem Glied Q^α in (22) ein innerhalb τ' verlaufendes Stück des Weges Λ, dessen Symbol die linke Seite von (22) ist. Ein solches Stück läßt sich aber nur dann aus (C) herausziehen, wenn es mit der ein- oder mehrfach durchlaufenen Linie k' zur Deckung gebracht werden kann, d. h. wenn α ein (positives oder negatives) Vielfache von n' ist. Zufolge (20) kann daher in (22) Q überall durch R, S ausgedrückt werden, und man bekommt eine Relation von der Form

$$(PRS) = 1. \tag{23}$$

Dieser entspricht eine teils in (A), teils in (B) verlaufende Linie Λ'. Damit die in (B) befindlichen Teile von Λ' aus (B) nach (A) gezogen werden können, müssen sie mit der Linie k zur Deckung gebracht werden können, d. h. die Elemente R, S treten nur in der Verbindung $R^m S^n$ auf, und man gewinnt nach (19) aus (23) eine Relation $(P) = 1$, was nur die Identität $P^0 = 1$ sein kann.

Die eben durchgeführten Betrachtungen können unmittelbar auf den Fall ausgedehnt werden, wo mehrere Torusknoten $L_1, L_1', L_1'', \ldots, L_1^{(p-1)}$ auftreten. Gilt für die Charakteristiken die Ungleichung

$$\frac{m}{n} \leqq \frac{m'}{n'} \leqq \frac{m''}{n''} \leqq \cdots \leqq \frac{m^{(p-1)}}{n^{(p-1)}},$$

und ist für alle p Kurven der Index τ gleich 1 (siehe S. 195), so darf man annehmen, daß die zugehörigen Tori $\tau, \tau', \tau'', \ldots, \tau^{(p-1)}$ in eben dieser Reihenfolge ineinander gelagert sind.

Es sei (A) der Außenraum von τ, (B_i) der Raum zwischen $\tau^{(i-1)}, \tau^{(i)}$, (C) das Innere von $\tau^{(p-1)}$, und es mögen die Substitutionen R_i, S_i in bezug auf (B_i) dieselbe Bedeutung haben wie R, S bezüglich (B) im obigen Falle. Ferner entspreche P einer einfachen Umkreisung von τ im Sinne $d\psi > 0$ und Q einem einfachen Umlauf des Innern von $\tau^{(p-1)}$ im Sinne $d\varphi > 0$.

Dann baut sich die Gruppe G aus $P, R_1, S_1, R_2, S_2, \ldots, R_{p-1}, S_{p-1}, Q$ auf. Es gelten zunächst die Relationen

$$R_i S_i = S_i R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1). \tag{24}$$

Weiter führt die zwiefache Darstellung einer auf τ liegenden Linie $\psi - \frac{m}{n}\varphi = \text{konst.}$ auf

$$P^m = R_1^m S_1^n, \tag{25}$$

die zwiefache Darstellung einer auf $\tau^{(i)}$ $(0 < i < p-1)$ gelegenen Linie $\psi - \frac{m^{(i)}}{n^{(i)}}\varphi = \text{konst.}$ auf

$$R_i^{m^{(i)}} S_i^{n^{(i)}} = R_{i+1}^{m^{(i)}} S_{i+1}^{n^{(i)}} \qquad (0 < i < p-1), \tag{26}$$

und endlich ergibt die Betrachtung einer Linie $\psi - \frac{m^{(p-1)}}{n^{(p-1)}}\varphi = \text{konst.}$ auf $\tau^{(p-1)}$ die Relation

$$R_{p-1}^{m^{(p-1)}} S_{p-1}^{n^{(p-1)}} = Q^{n^{(p-1)}}. \tag{27}$$

Man zeigt wie oben, daß alle anderen Beziehungen zwischen den P, Q, R_i, S_i sich aus den vorstehenden ableiten lassen.

Auch der allgemeinste Fall, wo die charakteristischen Abschnitte der singulären Kurven aus mehr als einem Gliede bestehen, kann nach den obigen Methoden erledigt werden. Es soll uns jedoch genügen, an den vorstehenden bereits sehr allgemeinen Beispielen die merkwürdigen Verzweigungsverhältnisse der Funktionen mehrerer Variablen dargetan zu haben.

§ 6.

Die Kenntnis der Gruppe G, die ja zu Γ holoedrisch isomorph ist, estattet in einigen Fällen, die analytische Darstellung von $F(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes anzugeben.

Nehmen wir z. B. an, daß durch $(0, 0)$ nur eine Verzweigungskurve $(x, y) = 0$, und zwar einfach, hindurchgeht, d. h. daß die in der Umebung von $(0, 0)$ irreduzible Entwicklung $q(x, y) = 0$ mit Gliedern erster Ordnung beginnt. Dann läßt sich entweder y nach ganzen Potenzen von x, der x nach ganzen Potenzen von y entwickeln. Es sei etwa

$$0 = p(x, y) = (y - a x^{m_1} - a x^{m_2} - \ldots) h(x, y), \qquad h(0, 0) \neq 0$$

ie Gleichung der singulären Kurve. Die Verzweigung wird hier durch inen Torusknoten L_1 mit den Charakteristiken $(m_1, 1)$ bestimmt. Sind P, Q die durch L_1 definierten Elemente von G, so gilt nach (13) $Q = P^{m_1}$, d. h. G ist einfach die durch P erzeugte zyklische Gruppe.

Bezeichnet man den aus $z(x, y) = z_0(x, y)$ nach Durchlaufung des Weges P^ν erhaltenen Zweig mit z_ν, so gilt, wenn in $p = 0$ n Zweige zuammenhängen, $z_{k+n} = z_k$.

Der Ausdruck

$$Z_0 = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1}$$

leibt daher bei Ausführung der Substitution P invariant, d. h. er ist in Σ indeutig. Außerdem ist Z_0 wie die z_i in Σ beschränkt und stetig und eigt höchstens in den Punkten von $p(x, y) = 0$ singuläres Verhalten. Daraus folgt nach bekannten Sätzen, daß Z_0 in ganz Σ holomorph ist. Die Summe

$$Z_\nu = z_0 + \varepsilon_\nu^{-1} z_1 + \varepsilon_\nu^{-2} z_2 + \ldots + \varepsilon_\nu^{-(n-1)} z_{n-1}, \quad \left(\varepsilon_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}} \; \nu = 1, 2, \ldots, n-1\right);$$

immt bei P den Faktor ε_ν an. Da nun die Funktion $p(x, y)^{\frac{\nu}{n}}$ bei Durchlaufung des zu P gehörigen Weges sich mit ε_ν^{-1} multipliziert, so ist

$$Z_\nu \cdot p^{-\frac{\nu}{n}} = r_\nu$$

n Σ eindeutig. Von der Funktion $r_\nu \cdot p$ zeigt man dann wie oben, daß ie in ganz Σ holomorph ist. Da sie aber wegen $\nu < n$ in $p(x, y)$ verchwindet, so ist sie durch $p(x, y)$ teilbar, d. h. auch r_ν ist in Σ regulär. Aus den n Gleichungen

$$z_0 + \varepsilon_\nu^{-1} z_1 + \varepsilon_\nu^{-2} z_2 + \ldots + \varepsilon_\nu^{-(n-1)} z_{n-1} = r_\nu p^{\frac{\nu}{n}}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad r_0 = Z_0)$$

rgibt sich durch Addition

$$n \cdot z_0(x, y) = r_0(x, y) + r_1(x, y) \cdot p^{\frac{1}{n}} + r_2(x, y) p^{\frac{2}{n}} + \ldots + r_{n-1}(x, y) \cdot p^{\frac{n-1}{n}}.$$

In dieser Form läßt sich also $z(x, y)$ unter den gemachten Voraussetzungen darstellen.

Treten in Σ zwei singuläre Kurven auf, die sich im Nullpunkt einfach schneiden, so ist, eventuell nach einer linearen Transformation der Größen x, y, in den zugehörigen Entwicklungen (I), (II) (S. 200) $m = n = m' = n' = 1$, $a_1 \neq a_1'$, und es wird daher nach (19), (20) G aus den beiden vertauschbaren Substitutionen R, S allein erzeugt. Es seien $p(x, y) = 0$, $q(x, y) = 0$ die in Σ irreduziblen holomorphen Formen der beiden Kurvengleichungen.

Der aus einem bestimmten Zweige z_{00} von $z(x, y)$ nach Durchlaufung des Weges $R^i S^k$ hervorgehende Zweig werde mit $z_{i,k}$ bezeichnet. Ist m der kleinste Index, für welchen $z_{m,0} = z_{0,0}$, und n der kleinste Index, für den $z_{0,n} = z_{0,0}$ ist, so gilt allgemein

$$z_{i+\varrho m,\, k+\sigma n} = Z_{i,k}$$

und die Anzahl der in Σ zusammenhängenden Zweige ist gleich mn.

Setzen wir nun

$$Z_{\mu,\nu} = \sum_{i,k=0}^{m-1,n-1} \varepsilon_\mu^{-i}\, \delta_\nu^{-k}\, z_{ik} \qquad \left(\varepsilon_\mu = e^{\frac{2\pi i \mu}{m}},\ \delta_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\right),$$

so geht $Z_{\mu,\nu}$ bei R in $\varepsilon_\mu Z_{\mu\nu}$, bei S in $\delta_\nu Z_{\mu\nu}$ über. Da das Produkt

$$p(x, y)^{\frac{\mu}{m}} \cdot q(x, y)^{\frac{\nu}{n}}$$

dasselbe Verhalten zeigt, so ist

$$r_{\mu\nu} = Z_{\mu\nu} \cdot p^{-\frac{\mu}{m}} q^{\frac{\nu}{n}}$$

bei R, S invariant, d. h. in Σ eindeutig. Ferner kann $r_{\mu,\nu}$ nur in $p(x, y) = 0$ oder $q(x, y) = 0$ singuläres Verhalten zeigen. Der Ausdruck $r_{\mu\nu} \cdot p \cdot q$ ist in ganz Σ beschränkt und daher holomorph; wegen $\mu < m$, $\nu < n$ verschwindet er in den beiden Kurven $p = 0$, $q = 0$ und ist daher durch $p \cdot q$ teilbar. $r_{\mu\nu}$ ist also auch holomorph.

Aus

$$\sum_{ik} \varepsilon_\mu^{-i}\, \vartheta_\nu^{-k}\, z_{ik} = r_{\mu\nu}\, p^{\frac{\mu}{m}} q^{\frac{\nu}{n}} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

erhält man durch Summation über alle μ, ν:

$$m \cdot n \cdot z_{00} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m-1,n-1} r_{\mu\nu}\, p^{\frac{\mu}{m}} q^{\frac{\nu}{n}}$$

als Darstellung einer beschränkten algebroiden Funktion, die nur zwei sich einfach schneidende Verzweigungskurven $p(x, y) = 0$, $q(x, y) = 0$ in Σ aufweist.

(Eingegangen am 19. Dezember 1928.)

Über einen Valironschen Satz.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Der folgende Satz zeigt, daß als $\varepsilon(u)$ im Sinne der Valironschen Fassung II seines Satzes I in der Arbeit *Sur les valeurs des fonctions holomorphes dans un cercle*[1]) $e^{-\frac{1}{u}}$ für jedes $k < \frac{1}{2}$, aber für kein $k \geqq \frac{1}{2}$ gewählt werden kann. Damit ist die qualitative Vermutung (es gibt ein brauchbares $k > 0$) bewiesen, welche Herr Valiron damals aussprach und deren Nachweis in einem Briefe von mir er[2]) erwähnte; und quantitativ ist eine Weltkonstante ($\frac{1}{2}$) bestimmt, nebst Entscheidung, wie es sich für diesen Wert von k verhält.

Satz. *Zu jedem $k < \frac{1}{2}$, aber zu keinem $k \geqq \frac{1}{2}$ gibt es ein $P(k) > 0$ mit folgender Eigenschaft.*

Es sei $f(x)$ für $|x| < 1$ regulär, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Dann gibt es ein $c = c(k, f) \neq 0$, so daß $f(x)$ in $|x| < 1$ alle Werte y annimmt für die zugleich

$$|y| \leqq P(k), \quad |y - c| \geqq |c|\, e^{-\frac{k}{|c|}}$$

ist.

Vorbemerkung. Natürlich genügt es, die Existenz von $P(k)$ für $0 < k < \frac{1}{2}$ und die Nichtexistenz eines $P(\frac{1}{2})$ zu beweisen.

Beweis. 1. Es sei $0 < k < \frac{1}{2}$. Wie üblich, bedeute $\varphi(\alpha)$ für $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ die untere Grenze der $\psi(\alpha)$, so daß aus

$$\alpha + \beta x + \ldots \text{ regulär, } \neq 0 \text{ und } \neq 1 \text{ für } |x| < 1$$

folgt

$$|\beta| \leqq \psi(\alpha).$$

---

[1]) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 183 (1926), S. 1256–1258.

[2]) S. 1258, Fußnote ([1]).

Bekanntlich läßt sich (sogar ohne die genaue Carathéodorysche Formel für $\varphi(\alpha)$) leicht beweisen:

$$\varphi(\alpha) = |\alpha|^2 \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{für } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1, \tag{1}$$

$$\varphi(\alpha) \leqq P_1 \quad \text{für } |\alpha| \leqq 2,\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1, \tag{2}$$

$$\varphi(\alpha) < \frac{1}{k} |\alpha| \log \frac{1}{|\alpha|} \quad \text{für } 0 < |\alpha| \leqq P_2(k). \tag{3}$$

Ich setze

$$P(k) = \frac{P_2(k)}{P_1} \tag{4}$$

und behaupte, daß diese Zahl das Gewünschte leistet.

Entweder nimmt $f(x)$ für $|x| < 1$ alle y mit $|y| \leqq P(k)$ an. Dann kann $c \neq 0$ beliebig gewählt werden, und die Behauptung ist trivial.

Oder $f(x)$ läßt für $|x| < 1$ einen Wert mit $|y| \leqq P(k)$ aus. Da $f(x)$ nicht konstant ist, bilden die für $|x| < 1$ in $|y| \leqq P(k)$ ausgelassenen Werte eine abgeschlossene Menge. a bezeichne einen solchen Wert von möglichst großem absoluten Betrage. Es genügt zu zeigen: Wenn unser $f(x)$ für $|x| < 1$ die Werte a und b ausläßt, wo

$$a \neq b, \quad |b| \leqq |a| \leqq P(k) \tag{5}$$

ist, so ist

$$|b - a| < |a| e^{-\frac{k}{|a|}}.$$

(Denn $c = a = c(k, f)$ leistet ja dann das Gewünschte.)

Weil

$$\frac{f(x) - a}{b - a} = -\frac{a}{b - a} + \frac{x}{b - a} + \cdots$$

für $|x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$ ist, ist nach Definition von $\varphi(\alpha)$ und nach (1)

$$\frac{1}{|b - a|} \leqq \varphi\left(-\frac{a}{b - a}\right) = \frac{|a|^2}{|b - a|^2} \varphi\left(\frac{a - b}{a}\right),$$

$$|b - a| \leqq |a|^2 \varphi\left(\frac{a - b}{a}\right). \tag{6}$$

Wegen

$$\left|\frac{a - b}{a}\right| \leqq 2$$

ist nach (6) und (2)

$$|b - a| \leqq |a|^2 P_1,$$

also nach (5) und (4)

$$\left|\frac{a - b}{a}\right| \leqq |a| P_1 \leqq P(k) P_1 = P_2(k). \tag{7}$$

Aus (7) und (3) folgt

$$\varphi\left(\frac{a - b}{a}\right) < \frac{1}{k} \left|\frac{a - b}{a}\right| \log \left|\frac{a}{a - b}\right|,$$

lso nach (6)

$$1 < \frac{|a|}{k} \log \left| \frac{a}{a-b} \right|,$$

$$|b-a| < |a| e^{-\frac{k}{|a|}},$$

ie behauptet.

2. Es sei $k = \frac{1}{2}$. Ich habe zu jedem $P > 0$ ein in $|x| < 1$ reguläres $(x) = x + \ldots$ anzugeben, so daß bei keinem $c \neq 0$ alle y mit

$$|y| \leqq P, \quad |y-c| \geqq |c| e^{-\frac{1}{2|c|}}$$

n $|x| < 1$ angenommen werden.

Hierzu wähle ich $q = q(P) > 0$ mit

$$\frac{1}{2q}(1+e^{-q}) \leqq P.$$

Die beiden Zahlen

$$a = \frac{1}{2q}(1+e^{-q}), \qquad b = \frac{1}{2q}(1-e^{-q})$$

egen also in $|y| \leqq P$.

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2q} - \frac{1}{2q} e^{-\frac{2qx}{1+x}} = x + \ldots$$

st in $|x| < 1$ regulär und läßt dort a und b aus, wegen

$$\left| f(x) - \frac{1}{2q} \right| = \frac{1}{2q} e^{-q \Re \frac{2x}{1+x}} > \frac{1}{2q} e^{-q}.$$

Es genügt zu zeigen: Für kein $c \neq 0$ liegen a und b in

$$|y-c| < |c| e^{-\frac{1}{2|c|}}.$$

Andernfalls wäre

$$\frac{1}{2q}(1-e^{-q}) = |b| > |c| \left(1 - e^{-\frac{1}{2|c|}}\right),$$

lso $\left(\text{da } t\left(1-e^{-\frac{1}{2t}}\right) \text{ für } t > 0 \text{ wegen}\right.$

$$e^{\frac{1}{2t}} \frac{d}{dt}\left(t - te^{-\frac{1}{2t}}\right) = e^{\frac{1}{2t}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2t}} - \frac{1}{2t} e^{-\frac{1}{2t}}\right) = e^{\frac{1}{2t}} - 1 - \frac{1}{2t} > 0$$

teigt und für $t = \frac{1}{2q}$ den Wert $\frac{1}{2q}(1-e^{-q})$ hat$\left.\right)$

$$|c| < \frac{1}{2q},$$

$$|a-c| < \frac{1}{2q} e^{-q}, \qquad |b-c| < \frac{1}{2q} e^{-q},$$

$$\frac{1}{q} e^{-q} = |a-b| < \frac{1}{q} e^{-q}.$$

Göttingen, den 4. März 1929.

(Eingegangen am 6. März 1929.)

Über die Carathéodorysche Verschärfung des großen Picardschen Satzes.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Satz. *Es sei* $0 < \alpha < \beta$. *Dann gibt es ein* $P(\alpha, \beta)$ *mit* $0 < P < 1$ *und folgender Eigenschaft.*

Es sei $0 \leqq \varrho < 1$ *und* $f(x)$ *für* $\varrho P < |x| < 1$ *eindeutig-regulär,* $\neq 0$ *und* $\neq 1$. *Dann ist für* $\varrho < |x| < P$ *eine der Ungleichungen*

$$|f(x)| > \alpha, \quad |f(x)| < \beta$$

überall gültig.

In der weniger besagenden Fassung mit ϱ^2 statt ϱP bei der Voraussetzung ist dieser Satz seit 1912 Herrn Carathéodory bekannt. Publiziert hat er[1]) zwar damals nur den Beweis mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ (und $0 < \alpha < 1 < \beta$ geht offenbar ebenso); er hat mir aber bereits in einem Briefe vom 5. 6. 1912 mitgeteilt, daß sich $0 < \alpha < \beta$ fast ebenso erledigen läßt. Immerhin ist meine Beweisanordnung (auch[2]) für $0 < \alpha < 1 < \beta$) in mehreren Punkten einfacher als die Carathéodorysche.

§ 1.

Hilfssatz. *Es gibt ein nur von* $c > 0$ *und* $\delta > 0$ *abhängiges* $p = p(c, \delta) > 0$ *mit folgender Eigenschaft.*

Es sei $\varphi(z)$ *für* $|z| < 1$ *regulär,* $\neq 0$ *und* $\neq 1$. *Es sei*

$$|\varphi(0)| \leqq c.$$

Dann ist für $|z| \leqq p$

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| < \delta.$$

---

[1]) *Sur le théorème général de M. Picard* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **154** (1912), S. 1690–1693].

[2]) Hier geht mein § 3 noch zu vereinfachen. $|f(x_1)| \leqq \alpha$, $|f(x_2)| \geqq \beta$ genügt als Ansatz, und statt des Streckenzuges im Bildbereich kann die Peripherie des Einheitskreises betrachtet werden, um zum Widerspruch zu gelangen, daß 1 angenommen würde.

Beweis[3]). Nach einer von mir 1910 bewiesenen Verschärfung des chottkyschen Satzes ist für $|z| \leqq \frac{1}{2}$

$$|\varphi(z)| < p_1(c),$$

so

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| < 2p_1(c),$$

so nach dem Schwarzschen Lemma

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| \leqq 4p_1(c)|z|.$$

aher leistet

$$p = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{\delta}{5p_1(c)}\right) = p(c, \delta)$$

as Gewünschte.

§ 2.

Wenn man den großen Picardschen Satz benutzt, folgt der Spezialfall $= 0$ des obigen Satzes (also insbesondere Herrn Carathéodorys théorème I) nmittelbar aus dem Hilfssatz[4]). Denn ist $f(x)$ für $0 < |x| < 1$ eindeutig- gulär, $+0$ und $+1$, so ist $f(x)$ in 0 meromorph. Also ist entweder $'(0)| \leqq \sqrt{\alpha\beta}$ oder $|f(0)| \geqq \sqrt{\alpha\beta}$ (Pol 0 in letzterer Möglichkeit ein- egriffen). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte ersteres. (Denn oraussetzung und Behauptung ändern sich nicht, wenn $f(x)$ durch $\frac{1}{f(x)}$, durch $\frac{1}{\beta}$, β durch $\frac{1}{\alpha}$ ersetzt wird.) Nach dem Hilfssatz ist alsdann ir $|x| \leqq p(\sqrt{\alpha\beta}, \beta - \sqrt{\alpha\beta}) = P(\alpha, \beta)$

$$|f(x)| < \beta.$$

§ 3.

Beweis des Satzes. Ich setze

$$\delta_1 = \operatorname{Min}\left(\alpha, \frac{\beta - \alpha}{2}\right), \quad \delta_2 = \frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\beta}, \quad \mu = \operatorname{Min}\left(p(\alpha, \delta_1), p\left(\frac{1}{\beta}, \delta_2\right)\right),$$

$$P = e^{-\frac{\pi}{\mu}} = P(\alpha, \beta).$$

Väre die Behauptung falsch, so gäbe es aus Stetigkeitsgründen x_1, x_2 mit

$$|f(x_1)| = \alpha, \quad |f(x_2)| = \beta, \quad \varrho < |x_1| < P, \quad \varrho < |x_2| < P.$$

ie Funktion

$$f(e^{-s}) = g(s)$$

---

[3]) Nicht neu; vgl. Lévy, *Remarques sur le théorème de M. Picard* [Bulletin de la ciété Mathématique de France **40** (1912), S. 25–39], S. 35–36.

[4]) Die beiden Referenten im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **3** (1915), S. 506] und in der Encyklopädie [2, Teil 3, S. 414], die nur théorème I bendrein übereinstimmend in trivialerweise falscher Formulierung; Gegenbeispiel: x) konstant $= \frac{3}{4}$), nicht théorème II erwähnen, haben also die Pointe der rathéodoryschen Arbeit übergangen.

ist für $0 < \sigma = \Re s < \log\frac{1}{\varrho} + \frac{\pi}{\mu}$ (d. h. $0 < \sigma$ im Falle $\varrho = 0$) regulär, $\neq 0$, $\neq 1$ und hat die Periode $2\pi i$. Und es gäbe s_1, s_2 mit

$$|g(s_1)| = \alpha, \quad |g(s_2)| = \beta,$$

$\frac{\pi}{\mu} < \sigma_1 < \log\frac{1}{\varrho}$, $\frac{\pi}{\mu} < \sigma_2 < \log\frac{1}{\varrho}$ (d. h. $\frac{\pi}{\mu} < \sigma_1$, $\frac{\pi}{\mu} < \sigma_2$ im Falle $\varrho = 0$).

Wird der Hilfssatz auf $g\left(s_1 + \frac{\pi i z}{\mu}\right)$ mit $c = \alpha$, $\delta = \delta_1$ und auf $\frac{1}{g\left(s_2 + \frac{\pi i z}{\mu}\right)}$ mit $c = \frac{1}{\beta}$, $\delta = \delta_2$ angewendet, so liefert er auf der Vertikalstrecke der Länge 2π mit s_1 bzw. s_2 als Mitte

$$|g(s) - g(s_1)| < \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{\beta - \alpha}{2}\right), \tag{1}$$

also

$$0 < |g(s)| < \frac{\alpha + \beta}{2},$$

bzw.

$$\left|\frac{1}{g(s)} - \frac{1}{g(s_2)}\right| < \frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{1}{\beta},$$

also

$$|g(s)| > \frac{\alpha + \beta}{2}. \tag{2}$$

Wegen der Periodizität gälte also (1) auf $\sigma = \sigma_1$, (2) auf $\sigma = \sigma_2$.

Aus Stetigkeitsgründen gäbe es, da (1) und (2) keinen Punkt gemeinsam haben, ein s_0 mit σ_0 zwischen σ_1 und σ_2, so daß $g(s_0) = \eta$ weder (1) noch (2) erfüllt. Da auch 0 weder (1) noch (2) erfüllt und die um (1) und (2) verminderte Ebene zusammenhängend ist, ließe sich η mit 0 durch einen Streckenzug $\mathfrak{S}$ verbinden, der (1) und (2) vermeidet.

Die für den durch $\sigma = \sigma_1$ und $\sigma = \sigma_2$ begrenzten Streifen angenommenen Werte wären (wegen der Periodizität) eine abgeschlossene Menge[5]; ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{S}$ wäre also auch abgeschlossen. Jeder auf $\mathfrak{S}$ angenommene Wert würde für einen inneren Punkt des Streifens angenommen (da die Bilder der Ränder zu (1) und (2) gehören), also mit ihm eine ganze Umgebung (da $g(s)$ nicht konstant ist). Jener Durchschnitt wäre also eine abgeschlossene, in bezug auf $\mathfrak{S}$ offene, nicht leere Menge auf $\mathfrak{S}$, also das volle $\mathfrak{S}$. Also würde 0 angenommen, was ein Widerspruch ist.

Göttingen, den 6. März 1929.

---

[5]) Diese Abänderung des Beweisendes verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Boh

(Eingegangen am 7. März 1929.)

Über die Konvergenzfragen der Mondtheorie*).

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Einleitung.

Der modernen Mondtheorie liegt eine periodische Lösung des Differentialsystems des parallaktenlosen restringierten Dreikörperproblems, die sogenannte Variationskurve zugrunde, die Hill[1]) in einer berühmten Arbeit gefunden hat. Es werden dabei die Koordinaten x und y als Fouriersche Reihen von t angesetzt. Man erhält (durch Vergleichung der Fourierschen Koeffizienten im Differentialsystem) für die Fourierschen Koeffizienten ein unendliches System von Bedingungsgleichungen, die nicht linear und auch nicht von rekursivem Charakter sind, so daß die Fourierschen Koeffizienten *grundsätzlich* nur alle gleichzeitig bestimmt werden können. *Praktisch* geht Hill so vor, daß er in dem System der Bedingungsgleichungen gewisse Terme vernachlässigt, wodurch es einen rekursiven Charakter erhält. In das System der Bedingungsgleichungen geht ein Parameter m ein, der von der — zunächst willkürlich gelassenen — Periode der angesetzten Lösung herrührt (die Fourierschen Reihen werden differentiiert, bevor man die Bedingungsgleichungen erhält). Die Fourierschen Koeffizienten sind, unter Zugrundelegung des (unverkürzten) Systems der Bedingungsgleichungen, nach Potenzen von m zu entwickeln.

Die dabei auftretenden neuartigen Konvergenz- bzw. Existenzfragen, die den sich auf endliche Systeme beziehenden Cauchyschen Untersuchungen[2]) nicht zugänglich sind, mußte Hill ausdrücklich[3]) offen lassen; seine kühne Methode wurde nur durch den numerischen Erfolg gerechtfertigt:

*) Die vorliegende Abhandlung stellt einen Abdruck der von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig angenommenen Inauguraldissertation dar.

[1]) G. W. Hill, Coll. Math. Works **1**, Washington 1905, S. 284—335.

[2]) Nach einer Bemerkung von H. v. Koch kann z. B. die Cauchysche Majorantenmethode unmittelbar auf *gewisse* unendliche Systeme übertragen werden. Doch liegt das Hillsche System wohl außerhalb der Tragweite der sehr speziellen Sätze, die auf diese Weise überhaupt erhalten werden können. Methodische Bemerkungen findet man in meinen Aufsätzen Math. Annalen **95** (1926), S. 544—556; **98** (1927), S. 273 bis 280; Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 451—470.

[3]) Vgl. Hill, a. a. O. S. 287.

"I regret that, on account of the difficulty of the subject and the length of investigation it seems to require, I have been obliged to pass over the important questions of the limits between which the series are convergent, and of the determination of superior limits to the errors committed in stopping short at definite points. There can not be a reasonable doubt that, in all cases, where we are compelled to employ infinite series in the solution of a problem, analysis is capable of being perfected to the point of showing us within what limits our solution is legitimate, and also of giving us a limit which its error cannot surpass. When the coordinates are developed in ascending powers of the time, or in ascending powers of a parameter attached as a multipler to the disturbing forces, certain investigations of Cauchy afford us the means of replying to these questions. But when, for powers of the time, are substituted circular functions of it, and the coefficients of there are repanded in powers and products of certain parameters produced from the combination of the masses with certain of the arbitrary constants introduced by integration, it does not appear that anything in the writings of Cauchy will help us to the conditions of convergence."

Vor einiger Zeit habe ich diese Lücken z. T. ausgefüllt [4]), und zwar unter direkter Zugrundelegung eines passenden allgemeinen Existenzsatzes über unendliche Systeme von impliziten Gleichungen, der die gesuchten Funktionen (d. h. die Fourierschen Koeffizienten) für hinreichend kleine Werte von $|m|$ nicht nur festzulegen und anzugeben, sondern auf passende Weise, nämlich derart abzuschätzen gestattet hat, daß daraus die Existenz und die zweimal stetige Differentiierbarkeit der für die Koordinaten angesetzten Fourierschen Reihen geschlossen werden konnte. Damit war für hinreichend kleine Werte von $|m|$ die Zulässigkeit des Hillschen Verfahrens sichergestellt, und zwar auf demselben rechnerischen Wege, auf welchem bei Hill die numerische Behandlung erfolgt. Denn der Beweis jenes Existenzsatzes ist, im Anschluß an E. Lindelöf, nur die primitive Konstruktion der Lösung auf Grund der Methode des unbestimmten Koeffizienten der Maclaurinschen Reihen, die auch von Hill verwendet wird [5]). — Herr E. Hölder hat inzwischen gefunden, daß die Existenz

---

[4]) A. Wintner, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 259–265; vgl. Astr. Nachr. 223 (1925), S. 232–237.

[5]) Es sind bekanntlich auch andere periodische Lösungen in der Mondtheorie untersucht worden, sowie periodische Lösungen, von denen anzunehmen ist, daß sie mit der Hillschen Variationskurve identisch sind, trotzdem sie unter Zugrundelegung von anderen Parametern oder Koordinaten erhalten worden sind. Vgl. G. W. Hill, loc. cit. [1]) 4, S. 78–93; A. Liapounoff, Fortschritte der Math. 26 (1895), S. 1103; F. R. Moulton, Transact. of Amer. Math. Soc. 7 (1906), S. 537 ff., insb. S. 566.

der Variationskurve für hinreichend kleine Werte von $|m|$ auch unter Zugrundelegung der Lichtensteinschen Methoden sichergestellt werden kann.

Diese Ergebnisse lassen die Frage offen, ob die Variatiationskurve noch auch bei demjenigen Werte von m existiert, der bei dem Erdmond vorliegt, d. h. ob dieser Wert „hinreichend klein" ist. Unlängst habe ich, anläßlich einer wesentlich weitergehenden Untersuchung [6]), gefunden, daß diese Frage zu bejahen ist. Ich habe nämlich die Fourierschen Koeffizienten, die durch die Maclaurinschen Reihen zunächst vielleicht nur für sehr kleine Werte von $|m|$ dargestellt werden, auf Grund der Bedingungsgleichungen analytisch fortgesetzt, zugleich passend abgeschätzt und dabei den zum Erdmond gehörigen Wert wesentlich überschritten. Es fragt sich nun, ob zum Existenzbeweis der Variationskurve des Erdmondes die analytische Fortsetzung nicht überflüssig ist, d. h. im wesentlichen, ob der zum Erdmond gehörige Wert von m noch im Innern des gemeinsamen Konvergenzkreises der Maclaurinschen Reihen der Fourierschen Koeffizienten liegt.

Ich werde hier diese Frage bejahend beantworten und so beweisen, daß die Hillschen Reihen für den Fall des Erdmondes konvergent sind. Es ergeben sich daraus unmittelbar auch die Fehlerabschätzungen, die von Hill in den oben zitierten Zeilen verlangt werden.

Außer jenem Existenzsatz über unendliche Gleichungssysteme ist dabei die folgende Riemannsche Bemerkung [7]) von Wichtigkeit: Sind $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ Fouriersche Reihen derart, daß der n-te Fouriersche Koeffizient sowohl bei φ_1 als auch bei φ_2 gleich $O(|n|^{-\delta})$; $\delta > 1$ ist, so ist [8]) der n-te Fouriersche Koeffizient des Produktes $\varphi_1 \varphi_2$ ebenfalls $= O(|n|^{-\delta})$. Anders ausgedrückt: Die Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \left| \frac{n}{k(n-k)} \right|^{\delta} \qquad (\delta > 1),$$

wobei die Summationszeiger $k = 0$ und $k = n$ auszulassen sind, bleibt unterhalb einer nur von δ abhängigen, also von n unabhängigen Schranke [9]).

Ist einmal die mathematische Grundlage für die Variationskurve gewonnen, die von Hill loc. cit. berechnet wurde, so gilt dies auch von seiner

---

[6]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 430–450.

[7]) B. Riemann, Ges. Werke, 2. Aufl. (1892), S. 250; vgl. Lütkemeyer, Diss. Göttingen 1902.

[8]) Der Satz gilt bekanntlich auch dann, wenn anstatt O durchweg o gelesen wird, sofern nur eine kleine Zusatzbedingung hinzukommt. Vgl. A. Zygmund, Math Zeitschr. **24** (1925), S. 49, insb. die Fußnote [4]).

[9]) Vgl. A. Wintner, Math. Annalen **96** (1926), S. 309–311.

Perigäumstheorie[10]). Denn Hill stützt sich dort außer auf die Variationskurve nur auf seine Theorie der unendlichen Determinanten bzw. der charakteristischen Exponenten, die seit den Untersuchungen von Poincaré[11]) mathematisch in vollkommen befriedigender Weise begründet ist. Numerische Verhältnisse kommen dabei, im Gegensatz zu der Untersuchung der Variationskurve, überhaupt nicht in Betracht, da ja das Problem ein lineares (und übrigens ein Eigenwertproblem[12])) ist. — Entsprechendes gilt bei der Berücksichtigung der Parallaxe[13]). Denn die Brownsche periodische Lösung[14]), bei der auch die Parallaxe berücksichtigt wird, läßt sich, wie man sich leicht überzeugt, mit meiner Methode ebenso behandeln wie die Hillsche Variationskurve, die zur Parallaxe Null gehört. Nur hat man sodann um einen Parameter mehr (nämlich außer m auch die Parallaxe), was jedoch keinerlei Schwierigkeit verursacht[15]).

Was endlich die höheren Potenzen etwa der Exzentrizität anlangt, wie diese in der Brownschen Theorie[16]) berechnet werden — die Theorie der charakteristischen Exponenten behandelt nur die erste Potenz des jeweiligen „störenden", d. h. neu hinzugefügten Integrationsparameters — so ist dabei nicht mehr von periodischen Lösungen und überhaupt nicht von einer Theorie mit unendlich vielen Veränderlichen die Rede, sondern nur von einer sinngemäßen Umschreibung der gewöhnlichen schrittweisen Annäherungen bzw. des Linstedt-Poincaréschen Verfahrens. Es werden dabei beim k-ten Schritt offenbar nur die Terme k-ter Ordnung behandelt und die Terme der ersten $k-1$ Ordnungen festgehalten, trotzdem der k-te Schritt auf den $(k-1)$-ten zurückwirkt. Man hat es also nicht etwa mit einer *fertigen* Reihe zu tun, und die übliche Behauptung, wonach die Reihen das Differentialsystem zumindest formal befriedigen, ist wohl nur cum grano salis zu verstehen. Man hat ja überhaupt keine „Reihe", sondern nur einen unendlichen Prozeß[17]) von ineinandergeschachtelten Reihen. Wird also die Rückwirkung des k-ten Schrittes auf den $(k-1)$-ten nicht berücksichtigt, so dürfte der Prozeß, *wenn* er konvergieren würde, das Differentialsystem gewiß gar nicht befriedigen. Daß das Verfahren dennoch

---

[10]) G. W. Hill, loc. cit. [1]), S. 243—270.

[11]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 2 (1893), S. 260 bis 270 oder loc. cit. [16]), S. 49—56.

[12]) Vgl. eine Bemerkung von mir in der Zeitschr. f. Phys. 48 (1928), S. 151.

[13]) Vgl. G. W. Hill, loc. cit. [1]), 4, S. 153—168.

[14]) E. W. Brown, Amer. J. of Math. 14 (1893), S. 141—160.

[15]) Vgl. loc. cit. [9]), S. 284ff.

[16]) Siehe etwa E. W. Brown, Amer. J. of Math. 17 (1895), S. 318—358; H. Poincaré, Lecons de mécanique céleste 2, 2 (1909), S. 77—109.

[17]) Vgl. loc. cit. [15]), sowie Astr. Nachr. 224 (1925), S. 7—10.

u großen praktischen Erfolgen geführt hat, beruht einerseits auf dem besonderen, beim Erdmond vorliegenden numerischen Verhältnissen des dynamischen Systems, andererseits aber sehr wesentlich auf der Möglichkeit, die immer wieder neu eintretenden verfügbaren Integrationskonstanten m Einklang z. B. mit der Delaunayschen Mondtheorie und mit der Erfahrung zu deuten und festzulegen. Es ist freilich — abweichend von der Brownschen Mondtheorie — sehr wohl möglich, die Differentialgleichungen unter Benutzung der Theorie der unendlich vielen Veränderlichen formal wirklich zu befriedigen[18]), und zwar auch dann, wenn der charakteristische Exponent irrational ist. Doch muß man dann die mondtheoretische Konstantendeutung preisgeben, indem nämlich die Terme auf eine andere Weise gruppiert werden[18]). Aber auch rein mathematisch wäre damit z. Z. nicht viel gewonnen. Einem Konvergenzbeweise stehen nämlich, wie aus meiner zitierten Annalenarbeit hervorgeht, die aus der Methode der allgemeinen Störungen bekannten Integrationsdivisoren[19]) im Wege, die hier eigentlich als Differentiationsdivisoren erscheinen[20]).

§ 1.

Die von Hill zugrunde gelegten Differentialgleichungen sind:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} + \frac{x}{r^3} = 3x; \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} + \frac{y}{r^3} = 0 \qquad (r^2 = x^2 + y^2), \tag{1}$$

wobei x und y die kartesischen Koordinaten des parallaktenlosen Mondes in einem geozentrischen Achsenkreuz bezeichnen, in welchem die Sonne ruht, indem die konstante Drehgeschwindigkeit gleich der mittleren Bewegung der Sonne gewählt ist. Die Einheiten sind so festgelegt wie bei Hill, dessen Ansatz der folgende ist:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos(2i+1)\tau; \qquad y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sin(2i+1)\tau. \tag{2}$$

Hierbei ist

$$\tau = \frac{t}{m},$$

ferner

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$

gesetzt, wobei n' die mittlere Bewegung der Sonne, n diejenige des Mondes (bezogen auf ein ruhendes Achsenkreuz) bezeichnet, so daß bei dem Erdmond

[18]) Vgl. meine unter [9]) zitierte Arbeit.
[19]) Z. B. H. Poincaré, loc. cit. [11]), S. 94—99.
[20]) Loc. cit. [9]), S. 303.

der Periodenquotient m etwas kleiner als $^1/_{12}$ ausfällt:

$$m_0 = 0{,}08084\ldots \tag{3}$$

Die Aufgabe ist, die Funktionen $a_i(m) = a_i$ derart zu bestimmen, daß durch (2) eine Lösung von (1) geliefert wird. Zu diesem Ende muß nach Hill das folgende System von Bedingungsgleichungen befriedigt werden:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [j,i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1} = 0 \tag{4}$$

$$\text{für } j = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

während dem Zeiger $j = 0$ die Beziehung

$$\left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \right\}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \{2i+1+m\}^2 + 2m^2 \right\} a_i} \tag{5}$$

entspricht, welche die Rolle einer „Verzweigungsgleichung" hat. Die Klammerausdrücke in (4) sind rationale Funktionen von m mit absoluten Koeffizienten:

$$[j,i] = -\frac{i}{j} \frac{4(j-1)i + 4j^2 + 4j - 2 - 4(i-j+1)m + m^2}{2(4j^2-1) - 4m + m^2}, \tag{6}$$

$$[j] = -\frac{3m^2}{16j^2} \frac{4j^2 - 8j - 2 - 4(j+2)m - 9m^2}{2(4j^2-1) - 4m + m^2}, \tag{7}$$

$$(j) = -\frac{3m^2}{16j^2} \frac{20j^2 - 16j + 2 - 4(5j-2)m + 9m^2}{2(4j^2-1) - 4m + m^2}. \tag{8}$$

Das System (4) ist homogen, indem es in einer Gestalt geschrieben werden kann, in welche nur die Verhältnisse $\frac{a_j}{a_0}$ eingehen; vgl. (10) und (11). Dementsprechend kann man die Verzweigungsgleichung (5) zunächst beiseite lassen. Es soll bis zum § 8 angenommen werden, daß $j \neq 0$ ist, so daß es sich nur um die eigentlichen Bedingungsgleichungen (4) handelt.

Wegen (6) ist $[j,j] = -1$ und $[j,0] = 0$, also wegen (4)

$$a_0 a_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j,i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1}, \tag{9}$$

wobei der Apostroph neben dem ersten Summenzeichen die Auslassung der beiden Summationszeiger $i = 0$ und $i = j$ bedeutet. Ich führe nun in (9) die Substitution

$$a_j = m a_0 \frac{b_j}{j^2} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{10}$$

in und multipliziere die so erhaltene j-te Gleichung mit $\frac{j^2}{m a_0^2}$, so aß (9) in

$$11) \qquad b_j = m \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j,i] \frac{j^2}{i^2(i-j)^2} b_i b_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i}{a_0} \frac{a_{-i+j-1}}{a_0} \frac{j^2}{m}$$

$$+ (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i}{a_0} \frac{a_{-i-j-1}}{a_0} \frac{j^2}{m} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bergeht. In der Tat kann in der ersten Summe (9), wegen $i \neq 0$ und $\neq j$, weder a_i noch a_{i-j} gleich a_0 ausfallen; vgl. (10). Anders steht es, egen (10), bei der zweiten und der dritten Summe in (11), so daß sie icht mehr quadratische Formen, sondern quadratische Polynome der unndlich vielen Veränderlichen b_j sind.

Es ist übrigens wesentlich, daß es in (11) rechterhand einen Term ibt, der in den b_j nicht einmal linear, sondern von diesen unabhängig st. Sonst würde nämlich jedes b_j nicht nur für $m = 0$, sondern identisch erschwinden, so daß die gesuchte periodische Lösung nicht vorhanden, zw. die Substitution (10) nicht erlaubt wäre. Denn zunächst ist (11) egen (6), (7), (8) und (10) von der Form

$$12) \qquad b_j = m f_j(m; b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, \ldots) \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

obei die Potenzreihe f_j keine negativen Potenzen der unendlich vielen rgumente enthält. Sie kann ferner „passend" abgeschätzt werden [vgl. eiter unten (43)], so daß es nur eine, nach Potenzen von m fortschreiende Lösung geben kann[21]). Würde nun kein f_j ein konstantes Glied enthalten, so wäre $b_j(m) \equiv 0$; $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ eine, also die einzige Lösung on der gesuchten Art, q. e. d.

Es ist nicht schwer, die Terme anzugeben, die von den b_j unabhängig nd. In der zweiten Summe (11) muß hierfür (wenn alles zusammenezogen wird, was zusammengezogen werden kann)

$$13a) \qquad i = 0, \quad -i + j - 1 = 0,$$

n der dritten aber

$$13b) \qquad i = 0, \quad -i - j - 1 = 0$$

esetzt werden, d. h.

$$13\alpha) \qquad j = 1, \quad i = 0,$$

zw.

$$13\beta) \qquad j = -1, \quad i = 0.$$

[21]) Vgl. loc. cit. [4]).

Also nur in der $(+1)$-ten und in der (-1)-ten Gleichung gibt es ein konstantes Glied, und beidemal nur ein einziges; vgl. (7), (8). Die übrigen Gleichungen kommen, wie man leicht einsieht, erst bei der Berechnung der beziehentlich m *höheren* Glieder in Betracht, während in den beiden ersten Gleichungen (12) die konstanten „Hauptterme" beziehentlich m *lineare* Glieder der Maclaurinschen Reihe $b_1(m)$ bzw. $b_{-1}(m)$ ergeben. Dem entspricht es, daß bei der für unsere Zwecke notwendigen numerischen Abschätzung der f_j die beiden Hauptterme die eigentliche Schwierigkeit verursachen und eine allzu weitgehende Abschätzung überhaupt zu verhindern scheinen.

§ 2.

Um (11) in (12) überzuführen, hat man

$$f_j = \frac{F_j}{\omega_j}, \tag{14}$$

$$\omega_j = 1 - \frac{4m - m^2}{2(4j^2-1)}, \tag{15}$$

$$F_j = \Phi_j + \Psi_j + \Lambda_j, \tag{16}$$

$$\Phi_j = \omega_j \varphi_j, \qquad \Psi_j = \omega_j \psi_j, \qquad \Lambda_j = \omega_j \lambda_j, \tag{17}$$

$$\varphi_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j, i] \frac{j^2}{i^2 (j-i)^2} b_i b_{i-j}, \tag{18}$$

$$\psi_j = [j] \frac{j^2}{m^2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0}, \tag{19}$$

$$\lambda_j = (j) \frac{j^2}{m^2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0} \tag{20}$$

zu setzen. Hierbei sind $\varphi_j, \psi_j, \lambda_j$ Funktionen von m; $b_1, b_{-1}, \ldots$, während ω_j nur von m abhängig ist.

Um das System (12) meinem zitierten Existenzsatz unterwerfen zu können, hat man alle $\bar{f}_j(\alpha; \beta, \beta, \ldots)$ abzuschätzen[22]). Hierbei ist $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\bar{f}_j(m; b_1, b_{-1}, \ldots)$ die beste Majorante der Potenzreihe $f_j(m; b_1, b_{-1}, \ldots)$, d. h. die Potenzreihe, in welche f_j übergeht, wenn man darin die Glieder, die zusammengezogen werden können, zusammenzieht und sodann die Koeffizienten durch ihre Beträge ersetzt. In $\bar{f}_j(\alpha; \beta, \beta, \ldots)$

[22]) Es gelten jedoch auch weitergehende Sätze. Vgl. Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 451—470.

nd alle $b_i = \beta$ gesetzt. Aus Gründen, die später ersichtlich sein werden, irfen wir $\alpha = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{1}{3}$, also

21) $$|m| \leqq \frac{1}{12}, \quad |b_j| \leqq \frac{1}{3} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

nnehmen.

§ 3.

In den §§ 4, 5, 6 sollen bzw. die Zahlen

$$\bar{\Phi}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \quad \bar{\Psi}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \quad \bar{A}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$
$$(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bgeschätzt werden. In § 7 erfolgt die besondere Behandlung der Haupterme, endlich in § 8 der Konvergenzbeweis.

Zunächst sollen die folgenden Ungleichheiten bewiesen werden:

22) $$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} < \frac{10}{3}; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{j^2}{i^2(j-i)^2} < 17;$$

23) $$\bar{\omega}_j^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) \leqq \frac{16}{15}.$$

Hierbei sind aus den Summationen (22) die Zeiger $i = 0$ und $i = j$ auszulassen; j ist eine beliebige, von Null verschiedene ganze Zahl. $\omega_j(m)$ ist ie unter (15) erklärte quadratische Funktion und $\bar{\omega}_j^{-1}(m)$ die beste Maorante der Maclaurinschen Reihe der gebrochenen rationalen Funktion $\frac{1}{\omega_j(m)}$.

Die erste Ungleichheit (22) folgt wegen $\pi^2 < 10$ aus

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} < 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = 2\frac{\pi^2}{6},$$

ie zweite braucht aus Symmetriegründen nur für $j > 0$ bewiesen zu werden. ür $1 \leqq i \leqq \left[\frac{j-1}{2}\right]$ ist aber $0 < \frac{i}{j} \leqq \frac{1}{2}$, also

*) $$\sum_{i=1}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{j^2}{i^2(i-j)^2} = \sum_{i=1}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{1}{i^2\left(1-\frac{i}{j}\right)^2} \leqq \sum_{i=1}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{1}{\left(\frac{i}{2}\right)^2} < 4 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2},$$

nd für $i \geqq \left[\frac{j+1}{2}\right] > 0$ gilt $\frac{i}{j} \geqq \frac{1}{2}$, also

$$(*)\qquad \sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{j-1}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}=\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{j-1}\frac{1}{\left(\frac{i}{j}\right)^2(i-j)^2}\leqq\sum_{i=\left[\frac{j+1}{2}\right]}^{i-1}\frac{1}{\frac{1}{2^2}(i-j)^2}<4\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2},$$

während für $i>j$ genauer $\frac{i}{j}>1$, also

$$(*)\qquad \sum_{i=j+1}^{+\infty}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}<\sum_{i=j+1}^{+\infty}\frac{1}{(i-j)^2}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2},$$

endlich offenbar

$$(*)\qquad \sum_{i=-\infty}^{-1}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{j^2}{i^2(i+j)^2}<\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}\qquad(j>0)$$

behauptet werden kann. Durch Addition der vier mit (*) bezeichneten Ungleichheiten (die erste steht auf der vorigen Seite) folgt

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}<(4+4+1+1)\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}=10\,\frac{\pi^2}{6}<\frac{100}{6}<17,$$

womit auch die zweite Abschätzung (22) bewiesen ist.

Setzt man

$$\sigma_j(\xi,\eta)=\frac{4\xi}{2(4j^2-1)}+\frac{-\eta^2}{2(4j^2-1)},$$

so daß wegen (15)

$$\varrho_j(m,m)=\omega_j^{-1}(m)$$

gilt, wenn

$$\varrho_j(\xi,\eta)=\frac{1}{1-\sigma_j(\xi,\eta)}$$

gesetzt wird, so hat man zunächst

$$\bar{\sigma}_j\left(\tfrac{1}{12},\tfrac{1}{12}\right)\leqq\frac{1}{2(4j^2-1)}\left(\tfrac{4}{12}+\tfrac{1}{144}\right),$$

also wegen $2(4j^2-1)\geqq 2(4-1)=6$:

$$\bar{\sigma}_j\left(\tfrac{1}{12},\tfrac{1}{12}\right)\leqq\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{144}\right)<\tfrac{1}{18}+\tfrac{1}{800}<\tfrac{1}{16}\left(=\tfrac{1}{18}+\tfrac{1}{144}\right).$$

Es ist ferner für $|\xi|\leqq\frac{1}{12}$, $|\eta|\leqq\frac{1}{12}$

$$|\varrho_j(\xi,\eta)|\leqq\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16}{15},$$

also auch

$$\bar{\omega}_j^{-1}\left(\tfrac{1}{12}\right)\leqq\bar{\varrho}_j\left(\tfrac{1}{12},\tfrac{1}{12}\right)\leqq\frac{16}{15}.$$

enn die Maclaurinsche Reihe von $\sigma_j(\xi,\eta)$ hat ebenso viele Glieder wie ariablen, und jedes Glied enthält eine andere Variable. Damit ist (23) ewiesen.

§ 4.

Wegen (17), (18), (16), (6) ist

$$\begin{aligned}(24)\quad \Phi_j = &\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \Big\{ -\frac{i}{j}\,\frac{4(j-1)i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} - \frac{i}{j}\,\frac{4j^2+4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} \\ &\qquad + \frac{i}{j}\,\frac{2}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\Big\} b_i b_{i-j} \\ &+ m \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \Big\{ \frac{i}{j}\,\frac{4i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} - \frac{i}{j}\,\frac{4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\Big\} b_i b_{i-j} \\ &+ (m+m^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{i}{j}\,\frac{1}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\, b_i b_{i-j} \\ &\equiv \Phi_{j1} + \Phi_{j2} + \Phi_{j3}.\end{aligned}$$

Wir behandeln zunächst Φ_{j2} und Φ_{j3}. Es ist wegen $j \neq 0$ und $i \neq 0$

$$\left|\frac{4i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = 2\left|\frac{j}{4j^2-1}\right|\frac{1}{(i-j)^2} \leqq 2\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(i-j)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2},$$

$$\left|\frac{i}{j}\,\frac{4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = \left|\frac{2}{i}\right|\left|\frac{j^2}{4j^2-1}\right|\frac{1}{(i-j)^2} \leqq \frac{2}{1}\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(i-j)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2},$$

$$\left|\frac{1}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = \left|\frac{1}{2i}\right|\left|\frac{j}{4j^2-1}\right|\frac{1}{(i-j)^2} \leqq \frac{1}{2\cdot 1}\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(i-j)^2} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(i-j)^2},$$

Also wegen (22)

$$\begin{aligned}(25)\quad &\bar{\Phi}_{j2}\Big(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\Big) + \bar{\Phi}_{j3}\Big(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\Big) \\ &\leqq \frac{1}{12}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\Big(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\Big)\frac{\frac{1}{3^2}}{(i-j)^2} + \Big(\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}\Big)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{6}\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{(i-j)^2} \\ &= \Big[\frac{4}{3}\,\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{12}+\frac{1}{144}\Big)\Big]\frac{1}{9}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(i-j)^2} < \Big[\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{800}\Big]\frac{1}{9}\,\frac{10}{3} \\ &= \Big[\frac{1}{8}+\frac{1}{800}\Big]\frac{10}{27} = \frac{10}{216} + \frac{10}{21600} < \frac{10}{200} = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\left|-\frac{i}{j}\,\frac{4(j-1)i}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = 2\left|\frac{j}{2j+1}\right|\left|\frac{j-1}{2j-1}\right|\frac{1}{(i-j)^2}$$

$$\leqq 2\left|\frac{-1}{-2+1}\right|\left|\frac{-1-1}{-2-1}\right|\frac{1}{(j-i)^2} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2},$$

$$\left|-\frac{i}{j}\,\frac{4j^2+4j}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| = 2\left|\frac{j+1}{2j+1}\right|\left|\frac{j}{2j-1}\right|\left|\frac{j}{i}\,\frac{1}{(j-i)^2}\right|$$

$$\leqq 2\left|\frac{1+1}{2+1}\right|\left|\frac{1}{2-1}\right|\left|\frac{j}{i}\,\frac{1}{(j-i)^2}\right| = \frac{4}{3}\left|\frac{j}{i}\,\frac{1}{j-i}\right|\left|\frac{1}{j-i}\right|$$

$$\leqq \frac{2}{3}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(j-i)^2} \quad \left(\text{wegen } |AB| \leqq \frac{1}{2}|A|^2 + \frac{1}{2}|B|^2\right),$$

$$\left|\frac{i}{j}\,\frac{2}{2(4j^2-1)}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2}\right| \leqq \left|\frac{1}{i}\right|\left|\frac{j}{4j^2-1}\right|\frac{1}{(j-i)^2} \leqq \frac{1}{1}\,\frac{1}{4-1}\,\frac{1}{(j-i)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(j-i)^2},$$

also wegen (22) und (24)

$$(26)\qquad \overline{\Phi}_{j1}\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$

$$\leqq \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\frac{4}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{j^2}{i^2(j-i)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(i-j)^2}\right\}\frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{7}{3}\,\frac{1}{9}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{9}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{j^2}{i^2(j-i)^2} < \frac{7}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{10}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{9}\,17$$

$$= \frac{70}{81} + \frac{102}{81} = 2 + \frac{10}{81} < 2 + \frac{3}{20}.$$

Aus (24), (25), (26) folgt

$$(27)\qquad \overline{\Phi}_j\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right) < \frac{1}{20} + 2 + \frac{3}{20} = 2 + \frac{1}{5}.$$

§ 5.

Wir gehen zu Ψ_j über. Bezeichnen zwei Apostrophe neben einem Summenzeichen:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''$$

die Auslassung der beiden Summationswerte $i = 0$ und $i = j-1$, setzt man ferner

$$(28)\qquad \Psi_j^* = -\frac{3m^2}{16}\,\frac{4j^2-8j-2-4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''\,\frac{b_i b_{-i+j-1}}{i^2(-i+j-1)^2},$$

o ist wegen (17), (19), (15), (7), (10)

$$29) \qquad \Psi_j = \Psi_j^* - \frac{3m^2}{16}\,\frac{4j^2-8j-2-4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)}\,\frac{a_{j-1}}{a_0}\,\frac{2}{m^2}.$$

Da der Quotient

$$\left|\frac{4j^2-8j-2}{2(4j^2-1)}\right| = \left|\frac{2j^2-4j-1}{4j^2-1}\right|$$

einen Höchstwert für $j=-1$ annimmt, so ist er

$$\leqq \frac{2+4-1}{4-1} = \frac{5}{3}.$$

Es gilt ferner wegen (21)

$$\left|\frac{-4(j+2)m}{2(4j^2-1)}\right| = 2|m|\left|\frac{j+2}{4j^2-1}\right| \leqq 2|m|\,\frac{1+2}{4-1} = 2|m| \leqq \frac{1}{6}$$

und

$$\left|\frac{-9m^2}{2(4j^2-1)}\right| \leqq \frac{9}{2}|m|^2\,\frac{1}{4-1} = \frac{3}{2}|m|^2 \leqq \frac{3}{2}\,\frac{1}{12^2} = \frac{1}{96},$$

endlich

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' \frac{|b_i\,b_{-i+j-1}|}{i^2(-i+j-1)^2} < \frac{1}{3^2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' \frac{1}{(-i+j-1)^2} < \frac{2}{9}\,\frac{10}{6} < \frac{1}{2},$$

also wegen (28)

$$(30) \qquad \bar{\Psi}_j^*\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right) < \frac{3}{16}\,\frac{1}{12^2}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{96}\right)\frac{1}{2} < \frac{3}{16}\,\frac{1}{144} < \frac{1}{600}.$$

Für $j \neq 1$ ist nach (10)

$$\frac{a_{j-1}}{a_0} = m\,\frac{b_{j-1}}{(j-1)^2}.$$

Wegen $\frac{1}{(j-1)^2} \leqq 1$ folgt daher aus (29), daß die beste Majorante von $\Psi_j - \Psi_j^*$ bei allen $j \neq 1$ für $|m| \leqq \frac{1}{12}$ und $|b_{j-1}| \leqq \frac{1}{8}$ dem Betrage nach

$$< \frac{3}{16}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{96}\right)\frac{1}{12}\,\frac{1}{2}\,2 < \frac{3}{16}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{32}$$

ausfällt, also, wegen (30), (28) und (29),

$$(31) \qquad \bar{\Psi}_j\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right) < \frac{1}{32}+\frac{1}{600} < \frac{1}{10} \qquad (j \neq 1)$$

gilt. Für $j=1$ folgt aus (29) wegen $\frac{a_0}{a_0}=1$ nur

$$|\Psi_1 - \Psi_1^*| \leqq \frac{3}{16}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{96}\right)2 < \frac{3}{8}\left(2-\frac{1}{25}\right) = \frac{3}{4}-\frac{3}{200} < \frac{3}{4}-\frac{1}{600},$$

also, wegen (30) und da $\Psi_1 - \Psi_1^*$ ein Monom ist, offenbar

$$(32) \qquad \bar{\Psi}_1\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right) < \frac{3}{4}.$$

§ 6.

Die Potenzreihe Λ_j läßt sich ebenso wie Ψ_j behandeln, nur ist dabei nicht $j=1$, sondern $j=-1$ auszuzeichnen. Bedeutet das Zeichen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''',$$

daß $i \neq 0$ und $i \neq -j-1$ ist, wird ferner

$$\Lambda_j^* = -\frac{3}{16}m^2\frac{20j^2-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'''\frac{b_i b_{-i-j-1}}{i^2(-i-j-1)^2}$$

gesetzt, so ist wegen (17), (20), (15), (8), (10)

$$(33)\qquad \Lambda_j = \Lambda_j^* - \frac{3m^2}{16}\frac{20j-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)}\frac{a_{-j-1}}{a_0}\frac{2}{m^2}.$$

Hierbei nehmen alle drei Quotienten

$$\left|\frac{20j^2-16j+2}{2(4j^2-1)}\right|,\quad \left|\frac{-4(5j-2)}{2(4j^2-1)}\right|,\quad \left|\frac{9}{2(4j^2-1)}\right|,$$

wie man sich leicht überzeugt, ihren Höchstwert für $j=-1$ an, so daß

$$\left|\frac{20j^2-16j+2}{2(4j^2-1)}\right| = \left|\frac{10j^2-8j+1}{4j^2-1}\right| \leqq \frac{10+8+1}{3} = 6+\frac{6}{18},$$

$$\left|\frac{-4(5j-2)m}{2(4j^2-1)}\right| = 2|m|\left|\frac{5j-2}{4j^2-1}\right| \leqq 2|m|\left|\frac{-5-2}{4-1}\right| = \frac{14}{3}|m| \leqq \frac{14}{3\cdot 12} = \frac{7}{18},$$

$$\left|\frac{9m^2}{2(4j^2-1)}\right| \leqq \frac{9}{2}\frac{|m|^2}{4-1} = \frac{3}{2}|m|^2 \leqq \frac{3}{2\cdot 144} < \frac{1}{18},$$

also, wegen (21),

$$(34)\qquad \bar{\Lambda}_j^*\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right) < \frac{3}{16}\frac{1}{144}\left(6+\frac{6}{18}+\frac{7}{18}+\frac{1}{18}\right)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'''\frac{\frac{1}{9}}{i^2(-i-j-1)^2}$$

$$< \frac{3}{16}\frac{1}{144}\frac{7}{9}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{i^2} < \frac{3\cdot 7\cdot 2\cdot 10}{16\cdot 144\cdot 9\cdot 6} < \frac{1}{100}$$

ausfällt. Für $j \neq -1$ ist nach (10)

$$\frac{a_{-j-1}}{a_0} = m\frac{b_{-j-1}}{(-j-1)^2}.$$

Wegen $\frac{1}{(-j-1)^2} \leqq 1$ folgt daher aus (33), daß die beste Majorante von $\Lambda_j - \Lambda_j^*$ bei allen $j \neq -1$ für $|m| \leqq \frac{1}{12}$ und $|b_{-j-1}| \leqq \frac{1}{3}$ dem Betrage nach

$$(35)\qquad < \frac{3}{16}\left(6+\frac{7}{18}+\frac{1}{18}\right)\frac{1}{12}\frac{1}{3}\cdot 2 < \frac{1}{16}\frac{1}{6}\cdot 7 < \frac{1}{12}$$

ist. Für $j=-1$ hat man hingegen $\frac{a_{-j-1}}{a_0}=1$, also, wegen (33), nur

$$|\Lambda_{-1}-\Lambda_{-1}^*|<\frac{3}{16}\left(6+\frac{7}{18}+\frac{1}{18}\right)2=\frac{3}{8}\left(6+\frac{4}{9}\right)=\frac{9}{4}+\frac{1}{6},$$

woraus (34) die Abschätzung

(36) $$\bar{\Lambda}_{-1}\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<2+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{100}$$

ergibt, während für $j\neq -1$ wegen (34), (35) bereits

(37) $$\bar{\Lambda}_j\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<\frac{1}{12}+\frac{1}{100} \qquad (j\neq -1)$$

gilt.

§ 7.

Die Schranke in (36) ist so groß, daß wir uns, wie aus dem nachstehenden hervorgeht, genötigt sehen, die Schranke (27), die für alle j gilt, für $j=-1$ wesentlich zu verschärfen. Dies ist möglich, und zwar aus dem folgenden Grunde: Die Schranke (27) ist *nur wegen* (23) so groß, wie sie ist, und die Schranke (23) ist *nur darum* eine so große Zahl wie 17, weil in (23) auch große $|j|$ berücksichtigt werden. Nun sind die Λ_j glücklicherweise eben für große $|j|$ klein, so daß bei der *Summe* (16) eine Art Kompensation möglich ist.

Zu diesem Ende beachte man nur, daß wegen (24)

$$\Phi_{-11}=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\left\{i\frac{4(-1-1)}{2(4-1)}\frac{1}{i^2(-1-i)^2}+0-i\frac{2}{2(4-1)}\frac{1}{i^2(-1-i)^2}\right\}b_ib_{i+1}$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\left(-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{i(i+1)^2}b_ib_{i+1} \qquad (i\neq 0,\ i\neq -1),$$

also, wegen (21),

$$\bar{\Phi}_{-11}=\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<\frac{5}{3}\frac{1}{9}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(i+1)^2}=\frac{5}{27}\left(-1+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)$$

$$<\frac{5}{27}\left(-\frac{3}{3}+2\frac{10}{6}\right)=\frac{5}{27}\frac{7}{3}=\frac{35}{81}<\frac{1}{2}-\frac{1}{20},$$

mithin, wegen (25) und (24),

(38) $$\bar{\Phi}_{-1}\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<\frac{1}{2}$$

ausfällt.

Aus (16), (27), (32), (37) folgt nun:

(39) $$\bar{F}_1\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<\left(2+\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{100}\right),$$

aus (16), (38), (31), (36):

$$\bar{F}_{-1}\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{10}+\left(\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{100}\right), \tag{40}$$

aus (16), (27), (31), (37):

$$\bar{F}_j\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<\left(2+\tfrac{1}{5}\right)+\tfrac{1}{10}+\left(\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{100}\right) \text{ für } |j|>1, \tag{41}$$

aus (39), (40), (41):

$$\bar{F}_j\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<3+\tfrac{3}{4}=\tfrac{15}{4} \quad \text{für} \quad j=\pm 1,\pm 2,\ldots, \tag{42}$$

endlich aus (14), (23), (42) als Schlußresultat der Abschätzungen:

$$\bar{f}_j\left(\tfrac{1}{12};\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\ldots\right)<4 \qquad (j=\pm 1,\pm 2,\ldots). \tag{43}$$

§ 8.

Nun habe ich loc. cit. [4]) den folgenden Satz bewiesen: Ist die Potenzreihenfolge $\{f_j(\xi;\eta_1,\eta_{-1},\ldots)\}$ derart, daß $\bar{f}_j(A;B,B,\ldots)\leqq M$ ausfällt, wobei die positiven Zahlen A, B, M von den Zeigern unabhängig sind, so hat das unendliche implizite Gleichungssystem $\eta_j=\xi f_j$ in einem hinreichend kleinen Kreise $|\xi|<\alpha$ genau eine, bei $\xi=0$ holomorphe Lösung $\eta_i=\eta_i(\xi)$. Und zwar kann

$$\alpha=\operatorname{Min}\left(A,\frac{B}{M}\right)$$

gesetzt werden, und es gilt für $|\xi|<\alpha$ die Ungleichheit

$$|\eta_j(\xi)|<B \qquad (j=\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Die Koeffizienten der Maclaurinschen Reihen $\eta_j(\xi)$ sind reell, wenn diejenigen der f_j reell sind.

Setzen wir nun $A=\frac{1}{12}$, $B=\frac{1}{3}$, so darf wegen (43) $M=4$, mithin auch $\frac{B}{M}=\frac{1}{12}$, d. h. $\alpha=\frac{1}{12}$ gesetzt werden. Folglich hat das System (12) genau eine bei $m=0$ holomorphe Lösung $b_j=b_j(m)$, und zwar ist sie im Kreise $|m|<\frac{1}{12}$ holomorph und dem Betrage nach $<\frac{1}{3}<1$, ferner für $m>0$ reell. Da nach Poincaré [23]) in die Maclaurinsche Reihe $b_j(m)$ mindestens $m^{|j|}$ aufgeht, so folgt daraus nach dem Schwarzschen Lemma

$$|b_j(m)|<\frac{|m|^{|j|}}{12^{|j|}} \quad \text{für} \quad |m|<\frac{1}{12}, \tag{44}$$

so daß dabei die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty}(|a_j(m)|+|a_{-j}(m)|)$$

[23]) H. Poincaré, loc. cit. [16]), S. 36.

vegen (10) gewiß konvergiert. Setzt man nun die a_j $(j \neq 0)$ in die Verweigungsgleichung (5) ein, so kann a_0 als Funktion der Quotienten, also, vegen (10), als Funktion von m allein dargestellt werden. Durch formales Rechnen findet Hill

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} a_0 = 1 + \mathfrak{P}(m),$$

vobei $\mathfrak{P}(m)$ eine nach positiven ganzen Potenzen fortschreitende Reihe nit reellen Koeffizienten bedeutet, die nach den vorhergehenden für hineichend kleine $|m|$, etwa für $|m| < \gamma$, gewiß konvergiert, da ja die Prämissen des Weierstraßschen Doppelreihensatzes erfüllt sind. Also kann $a_0(m) \gtreqless 0$ für $0 < m < \gamma$ auf genau eine Weise bestimmt werden, und war ist dabei $a_0(m) > 0$, wegen $\mathfrak{P}(0) = 0$. Es wäre nun möglich, daß $< \alpha = \frac{1}{12}$ und daß sogar der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(m)$ überhaupt kleiner ist als derjenige von $b_j(m)$ oder $\frac{a_j(m)}{a_0(m)}$. Ich habe aber in der weiterwähnten Arbeit[6]) u. a. bewiesen, daß $a_0(m)$ wenn auch vielleicht nicht für $|m| < \alpha$, so doch gewiß für $0 < m < \alpha$ holomorph ist und außerdem $\neq 0$ (also > 0). Wegen (10), (44) ist damit (die Existenz und) die Konvergenz der Reihen (2), (10), die offenbar eine Lösung von 1) darstellen, für $0 < m < \frac{1}{12}$ bewiesen. Nun liegt die Zahl (3) im Innern dieses Intervalles, q. e. d.

Die von Hill gewünschten Restabschätzungen ergeben sich aus (44) mit Rücksicht auf die Cauchysche Koeffizientenabschätzung unmittelbar. Es ist überflüssig zu erwähnen, daß $\alpha = \frac{1}{12}$ vielleicht, ja höchstwahrscheinlich ziemlich kleiner ist als der gemeinsame Konvergenzradius der Potenzreihen $b_j(m)$, so daß diese und auch die Fourierreihen noch besser konvergieren, als das aus (44) allein folgen würde.

(Eingegangen am 2. August 1928.)

Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Inhalt.

Seite

Einleitung 228
§ 1. Grundbegriffe 232
§ 2. Das Spektrum 237
§ 3. Die Funktionentheorie der Resolventenmatrix . . . 245
§ 4. Die Abschnittsspektra 249
§ 5. Die Konvexitätsregel 252
§ 6. Die unitären Matrizen 255
§ 7. Das allgemeine Abbildungsprinzip 261
§ 8. Spektraltheorie der unitären Matrizen 268
Anhang. Anwendung des Spektrumbegriffes auf die Matrizentheorie der regulären Potenzreihen 277
Radonsche Integrale und normale Spektraltheorie 281

Einleitung.

Im nachstehenden sollen einige Sätze, die im Falle von endlichen oder Laurentschen bzw. Hermiteschen unendlichen beschränkten Matrizen bekannt sind, auf beschränkte Matrizen in möglichst großer Allgemeinheit sinngemäß übertragen werden. In den genannten Spezialfällen stützen sich die üblichen Beweise auf algebraische oder funktionentheoretische Hilfsmittel, welche in dem allgemeinen Falle nicht zur Verfügung stehen (z. T. heute nicht, z. T. überhaupt nicht). Auch das Abschnittsprinzip kann dabei, wie Beispiele zeigen (§ 2, § 4), versagen. Merkwürdigerweise sind die allgemein gültigen Beweise zum Teil übersichtlicher als diejenigen, welche auf die Eigenschaften der erwähnten spezielleren Matrizenklassen zugeschnitten sind.

Es scheint bisher nicht beachtet worden zu sein[1]), daß — in Ver-

[1]) Vgl. z. B. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues, Paris 1913 (Collection Borel), S. 114ff.

llgemeinerung des Fundamentalsatzes der Algebra — jede beschränkte Matrix ein Spektrum hat (§ 2). Allerdings wird dieser Satz durch eigenümliche, zum Teil miteinander kombinierende Umstände verhüllt.

Einerseits kann nämlich die Theorie des Spektrums ihren Parallelismus mit derjenigen der Eigenlösungen einbüßen, wenn beliebige (nicht Hermitesche, oder wenigstens nicht normale) beschränkte Matrizen zugelassen werden. Bei endlichen Gleichungssystemen gibt es stets eine Eigenlösung, wenn der Eigenwertparameter dem Spektrum angehört, d. h. eine (durch den Fundamentalsatz gesicherte) Nullstelle des Säkularpolynoms ist[2]), unabhängig davon, ob die Martix Hermitesch ist oder nicht. Entsprechendes läßt sich, wie Herr Hellinger mittels seiner Theorie der Differentiallösungen gezeigt hat, z. B. über alle Hermiteschen Streckenspektra behaupten. Nun gibt es aber nach den Herren E. Schmidt und Toeplitz[3]) (freilich nicht Hermitesche) beschränkte Matrizen, die bei keinem Werte des Eigenwertparameters eine Eigenlösung haben, wie allgemein man auch den Begriff der Eigenlösung fassen mag. Man könnte also erwarten, daß diese Matrizen kein Spektrum haben. Tatsächlich handelt es sich aber nur darum, daß der erwähnte Parallelismus nicht so weit reicht, daß er sich auch auf diese Matrizen beziehen könnte. Wir werden ja sehen, daß jede beschränkte Matrix ein Spektrum hat. Das Spektrum ist dabei als die Gesamtheit derjenigen Parameterwerte erklärt, für welche es keine eindeutige und beschränkte Reziproke (Resolvente) gibt, es ist also auf dieselbe Weise festgelegt wie in der klassischen Theorie der Integralgleichungen oder in der Hilbert-Hellingerschen Theorie der beschränkten Hermiteschen Formen. Die vorher gesperrt gesetzte Einschränkung, einer der methodischen Grundgedanken der ganzen Hilbertschen Lehre über unendlich viele Variablen, liegt in der Natur der Sache, die Preisgabe dieser Einschränkung läuft auf die Preisgabe der Hilbert-Hellingerschen, auch in der Theorie der

---

[2]) Den Eigenwertparameter wollen wir stets so wählen, wie dies in der Algebra zu geschehen pflegt. Es handelt sich also um $\lambda f(s) - \int K(s,t) f(t)\, dt = 0$ und nicht um $f(s) - \lambda \int K(s,t) f(t)\, dt = 0$. Sonst würde ja nicht einmal bei den endlichen Gleichungssystemen der Satz gelten, daß ein Spektrum stets vorhanden ist. Bei der nicht-algebraischen Normierung braucht nämlich, wenn n die Anzahl der Unbekannten ist, das Säkularpolynom nicht vom Grade n zu sein, und die Säkulargleichung einer „Volterraschen" Matrix $\|a_{ik}\|$, wobei $a_{ik} = 0$ ist für $i \geqq k$, hat keine Wurzel. Die Säkulargleichung wäre dann nämlich $1 = 0 \cdot \lambda$. — Für uns wird hingegen das Spektrum stets im Endlichen liegen, und in den Volterraschen Fällen nicht den unendlich fernen Punkt, sondern den Nullpunkt enthalten. — Wir werden übrigens sehen, daß es beschränkte „Volterrasche" Matrizen gibt, deren Spektrum — im Gegensatz zu der klassischen Theorie der Integralgleichungen — außer dem Nullpunkt noch weitere Punkte enthält; vgl. (18) oder den Anhang.

[3]) Enc. d. math. Wiss. 2C (1928), S. 1575.

Laurentmatrizen[4]) üblichen Terminologie hinaus; man denke nur an die Hilbertsche Integraldarstellung einer Hermiteschen Resolvente, und zwar bei einer beschränkten Matrix, die kein Punktspektrum hat[5]). Die Natürlichkeit unserer Festsetzung ist aus dem Anhang (S. 277ff.) besonders ersichtlich.] — Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß das Ausbleiben des eingangs erwähnten Parallelismus einfach durch die Ungültigkeit des Alternativsatzes (bezüglich homogene und inhomogene Gleichungen) bedingt ist, ja sogar nur darauf hinausgeht, daß es beschränkte (und übrigens auch vollstetige) Matrizen gibt, bei welchen der Alternativsatz in keinem Punkte des stets vorhandenen Spektrums gilt. — Vgl. auch die Fußnote [39]).

Andererseits kann die Existenz gewisser Punkte des Spektrums durch den Umstand verschleiert sein, daß sie nicht bereits funktionentheoretisch in Evidenz tritt: Bei beliebigen endlichen Matrizen oder bei den der Fredholmschen Theorie unmittelbar zugänglichen Integralgleichungen, ferner bei den beschränkten Hermiteschen Matrizen kann das Spektrum dahin charakterisiert werden, daß es aus den Singularitäten der Resolvente besteht (welche bei Fredholm (für $\lambda \neq 0$) Pole, bei den beschränkten Hermiteschen Matrizen aber eventuell von komplizierterer Beschaffenheit sind); bei beliebigen beschränkten Matrizen ist auch dieser Satz ungültig (§ 3). Eine Resolventensingularität ist nämlich in diesem Rahmen nur ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kennzeichen für die in dem Spektrum gelegenen Punkte. Bei den C. Neumannschen Reihen kann also eine Art Überkonvergenz stattfinden. Allen Punkten des Spektrums kann daher nur eine (in dem klassischen Fredholm-Schmidtschen Rahmen noch überflüssige) spezifische Matrizenfunktionentheorie[6]) gerecht werden (§ 3). Durch diese Überlegungen wird man zu einer Verschärfung der Schur-Toeplitzschen Theorie der regulären Potenzreihen geführt (Anhang).

In § 5 wird eine Konvexitätsregel bewiesen, die sich auf die gegenseitige Lage des Spektrums und des Wertevorrates bezieht. Im Falle der

[4]) O. Toeplitz. Math. Annalen **70** (1910), S. 351—376.

[5]) Die Integrale können etwa in dem Cauchyschen Sinne der Hauptwerte auch in einem Punkte des Spektrums konvergieren und dabei eine vordere und zugleich hintere Reziproke liefern, die aber nicht beschränkt sein kann, so daß sie nicht für alle quadratisch konvergenten rechten Seiten in Betracht kommt. — So haben unlängst Frl. R. C. Young und Herr Pollard im Auschluß an die Herren Plessner, Titchmarch und Besicovitch den höchst merkwürdigen Satz bewiesen, daß die unter (48) [S. 262 weiter unten] stehenden Resolventenintegrale, als Cauchysche Hauptwerte aufgefaßt, bis auf eine Nullmenge der reellen λ-Achse konvergent sind; s. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **28** (1928), S. 293ff. — Vgl. auch die unter [45]) zitierte Arbeit von G. H. Hardy, ferner eine Untersuchung von G. Herglotz über die Kroneckersche Grenzformel in reellen quadratischen Körpern, Sächs. Sitzungsber. 1923, insb. S. 31ff.

[6]) Vgl. z. B. A. Wintner, Math. Annalen **95** (1926), S. 553ff.; Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 451ff., oder die general analysis von E. H. Moore.

endlichen und der Laurentschen Matrizen ist der Satz von Herrn Toeplitz[7]) gefunden worden. Da für den allgemeinen Fall die Toeplitzsche Schlußweise samt dem Abschnittsprinzip bei dem heutigen Stand der Dinge ganz wesentlich zu versagen scheint, so mußte auch dieser Satz auf eine „primitive" Weise behandelt werden. Der Weg führt durch den Begriff der normaloiden Matrix hindurch. Die Klasse der normaloiden Matrizen, auf welche sich die Konvexitätsregel bezieht, umfaßt z. B. die von Toeplitz behandelten Fälle, also die Laurentmatrizen und diejenigen endlichen Matrizen, die normal sind (das sind im Bereiche der endlichen Matrizen diejenigen Matrizen, bei welchen das Spektrum und seine Zerlegungen das *vollständige* Invariantensystem der unitären Gruppe bilden). Es gibt jedoch normale, d. h. mit ihrer „begleitenden" Matrix $\overline{\mathfrak{A}}' = \|\bar{a}_{qp}\|$ vertauschbare beschränkte Matrizen $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, deren kein Abschnitt normal ist. Es gibt ferner (§ 4) beschränkte normaloide Matrizen, die nicht normal sind (ob auch die Umkehrung davon gilt, bleibt dahingestellt, ist aber unwahrscheinlich). Da andererseits die beiden von Toeplitz behandelten Fälle nicht nur normal, sondern auch normaloid sind, so ist in dem normaloiden und nicht in dem normalen Charakter die wahre Wurzel der Konvexitätsregel zu erblicken.

Die Entwicklungen des § 7 setzen diese Betrachtungen nicht voraus. — Bekanntlich hat Herr F. Riesz[8]) die Hilbertsche Theorie der beschränkten Hermiteschen (oder eigentlich reell-symmetrischen) Matrizen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation mittels eines funktionalen Korrespondenzprinzips von neuem hergeleitet. Es handelt sich um das formale Grundprinzip der Heisenbergschen Mechanik[9]). Für die Zwecke von Herrn Riesz war es wesentlich, das Korrespondenzprinzip nur für reellwertige Funktionen in Anspruch zu nehmen. Denn läßt man auch komplexwertige Funktionen zu, so werden Hermitesche Matrizen auf nicht Hermitesche abgebildet, während Herr Riesz den Raum der Hermiteschen Matrizen nicht verlassen durfte. — Dies läßt sich nun beheben, und zwar auf die folgende Weise. Wir stellen uns gewissermaßen auf den umgekehrten Standpunkt: die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation der Hermitschen Matrizen soll nicht mittels des Korrespondenzprinzips von neuem begründet, sondern als natürliches Hilfsmittel korrespondenzmäßiger Betrachtungen an die Spitze der Untersuchung gestellt werden. Dann hat man es von vornherein mit *expliziten* Formeln zu tun und *so* steht dann freilich nichts im Wege, diese auf eine definitorische Weise auch bei nicht reellen Abbildungen in Anspruch zu nehmen und dadurch den Bereich der

[7]) O. Toeplitz, Math. Zeitschr. **2** (1918), S. 187—197.

[8]) Loc. cit. [1]), S. 128ff.; vgl. Ann. de l'Éc. Norm. Sup. **31** (1914), S. 9—14.

[9]) W. Heisenberg, Math. Annalen **95** (1926), S. 694.

Hermiteschen Matrizen zu verlassen. Es handelt sich also um einen fast selbstverständlichen Ansatz, der bisher des näheren nicht verfolgt worden ist, trotzdem er eine ziemlich naheliegende Verallgemeinerung der Toeplitzschen Theorie der Fourierreihen darstellt. In den §§ 6 und 8 wird durch trigonometrische Spezialisierung des Ansatzes und unter Heranziehung des Carathéodory-Toeplitzschen Gedankenkreises gezeigt, daß sich so eine der Hermiteschen (Hilbert-Hellinger) völlig parallellaufende Invarianten- und Transformationstheorie der unitären Matrizen, d. h. der Drehungen des (komplexen) Hilbertschen Raumes ergibt. — Ob es beschränkte Matrizen gibt, die überhaupt eine Art Spektraltheorie zulassen (d. h. bei welchen das Spektrum und seine Zerlegungen das vollständige unitäre Invariantensystem enthalten), und die aus den Hermiteschen Matrizen nicht mittels einer korrespondenzmäßigen (nötigenfalls unstetigen) Abbildung gewonnen werden können, bleibt dahingestellt. Die Frage hängt mit dem Momentenproblem

$$\int_0^1 (F(\mu))^n \, d\varrho(\mu) = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad d\varrho(\mu) \geqq 0$$

zusammen, wobei ϱ gesucht wird, während F nicht *vorgeschrieben*[10]) ist, sondern eine *verfügbare* beschränkte und entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen genügende, nicht reellwertige Funktion bezeichnet. — In dem Falle $F(\mu) = e^{i\mu}$ des trigonometrischen Momentenproblems ergibt sich in § 8 aus der Hilbert-Hellingerschen Theorie die Spektraltheorie der unitären Matrizen. Das gewöhnliche Momentenproblem, $F(\mu) = \mu$, ist von Herrn F. Riesz[11]) zur Herleitung der Hilbertschen „Partialbruchzerlegung" der Resolvente auf dieselbe Weise benutzt worden.

§ 1.

Grundbegriffe.

Es sei $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ eine beschränkte Matrix[12]), wobei die Zeiger von 1 bis $+\infty$ laufen, und es bezeichne $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ einen Vektor mit unendlich vielen, nicht notwendig reellen Komponenten; sein Betrag ist $|\mathfrak{x}| = \sqrt{\sum |x_p|^2}$. Wenn nichts anderes vermerkt ist, möge $\mathfrak{x}$ (und ebenso $\mathfrak{y}$) stets einen normierten Vektor bedeuten, $|\mathfrak{x}| = 1$. Durch $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ bezeichnen wir den Vektor, dessen p-te Komponente gleich $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q$ ist. Diese Reihe

[10]) Vgl. F. Riesz, Ann. de l'Éc. Norm. Sup. 28 (1911), S. 54ff.; vgl. jedoch J. Radon, Wiener Sitzber. 1913 und 1919.

[11]) F. Riesz, Gött. Nachr. 1910, S. 190—195.

[12]) Die Beweise der Sätze dieses Paragraphen findet man bei E. Hellinger und O. Toeplitz, Math. Annalen 69 (1910), S. 289—330.

onvergiert, da $\mathfrak{A}$ beschränkt und $|\mathfrak{x}|$ endlich ist. Aus demselben Grunde t $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|$ endlich, und die Bilinearform

1) $$\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_p y_q = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{y}$$

onvergiert im Sinne der Konvergenz der Doppelreihen (jedoch nicht notendig absolut). Insbesondere gilt also

2) $$\lim_{n=\infty}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q = \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \quad (|\mathfrak{x}|=1,\ |\mathfrak{y}|=1).$$

Es bezeichne $\mathsf{r}(\mathfrak{A})$ die obere Grenze des absoluten Betrages der Funkion (1) unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$, $|\mathfrak{y}|=1$. Die Beschränktheit on $\mathfrak{A}$ besagt, daß $\mathsf{r}(\mathfrak{A})$ endlich ist. Es bezeiche $\mathsf{V}(\mathfrak{A})$ die abgeschlossene Hülle derjenigen Werte, derer (1) unter dieser Nebenbedingung fähig ist. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathsf{V}(\mathfrak{A})$ identisch ist mit dem Kreisbereiche $|\Psi| \leqq \mathsf{r}(\mathfrak{A})$ der komplexen Ψ-Ebene. Ist $\mathfrak{B}$ eine andere beschränkte Matrix, o gilt für das Matrizenprodukt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Ungleichung[12])

3) $$\mathsf{r}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leqq \mathsf{r}(\mathfrak{A})\,\mathsf{r}(\mathfrak{B}).$$

Die Form, die aus (1) durch die Kopplung $\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}$ entsteht, wobei $= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ der zu $\mathfrak{x}$ konjugierte Vektor ist, möge „Kopplungsform on $\mathfrak{A}$" genannt und durch $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ bezeichnet werden. Die Kopplungsform

4) $$\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\bar{\mathfrak{x}}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_p\bar{x}_q$$

st bei passendem $\mathfrak{A}$ nicht nur reeller Werte fähig, da sie nicht Hermitesch u sein braucht. Insbesondere ist also $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ im allgemeinen $\neq \Phi(\mathfrak{A};\bar{\mathfrak{x}})$. Aus (1) und (4) folgt leicht

5) $$\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{y},\mathfrak{x}) = \tfrac{1}{2}[\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}-\mathfrak{y})].$$

Es bezeichne $\mathsf{m}(\mathfrak{A})$ die obere, $\mathfrak{n}(\mathfrak{A})$ die untere Grenze von $|\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})|$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$. Offenbar ist

6) $$\mathsf{m}(\mathfrak{A}) \leqq \mathsf{r}(\mathfrak{A}),$$

es gilt ferner aus Gründen der Homogenität $|\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{z})| \leqq \mathsf{m}(\mathfrak{A})|\mathfrak{z}|^2$, auch wenn $\mathfrak{z}$ nicht normiert ist. Die rechte Seite von (5) ist also absolut

$$\leqq \tfrac{1}{2}\,\mathsf{m}(\mathfrak{A})\,(|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|^2 + |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2] = \mathsf{m}(\mathfrak{A})\,[|\mathfrak{x}|^2 + |\mathfrak{y}|^2],$$

so daß für $|\mathfrak{x}|=1$, $|\mathfrak{y}|=1$

7) $$|\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{y},\mathfrak{x})| \leqq 2\,\mathsf{m}(\mathfrak{A})$$

gilt.

Es bezeichne $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ den „Wertevorrat“ der Kopplungsform, das ist die abgeschlossene Hülle derjenigen Werte, derer $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$ fähig ist. Aus einem von Herrn Toeplitz[7]) vermuteten, von Herrn Hausdorff[13]) bewiesenen Satz folgt mit Rücksicht auf (2) nach bekannten Sätzen (etwa unter Beachtung des weitergehenden Blaschkeschen Auswahlsatzes), daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein konvexer Bereich ist; er liegt stets in dem Kreise $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ und ist davon im allgemeinen verschieden. $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ braucht nämlich kein Kreis zu sein, und wenn auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein Kreis ist, brauchte in (6) nicht das Gleichheitszeichen zu gelten, während doch $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ der Radius des kleinsten, alle Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenden Kreises um den Nullpunkt ist. — Eine Matrix, bei welcher

$$\mathbf{m}(\mathfrak{A})=\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \tag{8}$$

ausfällt, möge normaloid heißen.

Man setze bei jeder Matrix $\mathfrak{A}=\|a_{pq}\|$

$$\mathfrak{A}'=\|a_{qp}\|,\quad \overline{\mathfrak{A}}=\|\bar{a}_{pq}\|,\quad \mathfrak{A}^*=\|\bar{a}_{qp}\|;\quad \mathfrak{A}^*=\overline{\mathfrak{A}}'=\overline{\mathfrak{A}'}.$$

$\mathfrak{A}'$ ist die transponierte, $\overline{\mathfrak{A}}$ die konjugierte, $\mathfrak{A}^*$ die „begleitende“ Matrix von $\mathfrak{A}$. Offenbar gilt

$$\mathbf{r}(\mathfrak{A})=\mathbf{r}(\mathfrak{A}')=\mathbf{r}(\overline{\mathfrak{A}})=\mathbf{r}(\mathfrak{A}^*),\quad \mathbf{m}(\mathfrak{A})=\ldots=\mathbf{m}(\mathfrak{A}^*),\quad \mathbf{n}(\mathfrak{A})=\ldots. \tag{9}$$

Man hat ferner[13])

$$(\mathbf{r}(\mathfrak{A}))^2=\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*), \tag{10}$$

d. h. wegen (9)

$$\mathbf{r}(\mathfrak{A})\,\mathbf{r}(\mathfrak{A}^*)=\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*); \tag{10a}$$

mithin gilt

$$\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)=\mathbf{m}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}), \tag{11}$$

trotzdem im allgemeinen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^*$ nicht vertauschbar ist. Gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}, \tag{12}$$

so heißt $\mathfrak{A}$ normal; doch soll (12) zunächst nicht vorausgesetzt werden. — Offenbar ist

$$\overline{\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y})}=\Psi(\mathfrak{A}^*;\bar{\mathfrak{y}},\bar{\mathfrak{x}}), \tag{13}$$

was für $\mathfrak{y}=\bar{\mathfrak{x}}$ wegen (4) in

$$\overline{\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})}=\Phi(\mathfrak{A}^*;\mathfrak{x}) \tag{14}$$

übergeht.

---

[13]) F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 314–316.

Man kann jede Matrix $\mathfrak{A}$ auf genau eine Weise in der Gestalt $= \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$ schreiben, wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ Hermitesch sind ($\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$). ffenbar ist $\Phi(\mathfrak{G}; \mathfrak{x})$ der Realteil, $\Phi(\mathfrak{H}; \mathfrak{x})$ die imaginäre Komponente er Zahl $\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}) = \Phi(\mathfrak{G}; \mathfrak{x}) + i\Phi(\mathfrak{H}; \mathfrak{x})$. Sind daher μ und ν reell, so egt $\lambda = \mu + i\nu$ dann und nur dann in dem Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, wenn $((\mu\mathfrak{E} - \mathfrak{G}) + i(\nu\mathfrak{E} - \mathfrak{H})) = 0$ ist. Hierbei hat $\mathfrak{n}$ die oben erklärte Bedeutung und $\mathfrak{E} = \|\delta_{ik}\|$ ist die Einheitsmatrix. — Man hat $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G}^* - i\mathfrak{H}^*$, o daß die Bedingung (12) des normalen Charakters auf

$$(12)' \qquad \mathfrak{G}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{G}$$

inausgeht, so daß dann auch

$$(15) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2$$

ilt.

Der normale Charakter ist unitären[14]) Transformationen gegenüber nvariant[7]). Da jede Diagonalmatrix normal ist, so sind also die Matrizen, ie mit einer Diagonalmatrix unitär äquivalent sind, gewiß normal. Eine Matrix, in welcher alle oberhalb der Diagonale stehenden Elemente verchwinden, ist nur dann normal, wenn sie eine Diagonalmatrix ist[7]). Nach einem Satze von Herrn Schur[15]) kann man jede endliche Matrix unitär in eine Matrix transformieren, in welcher alle oberhalb der Diagonale gelegenen Elemente verschwinden. Folglich ist eine endliche Matrix dann und nur dann normal, wenn sie unitär in eine Diagonalmatrix übergeführt werden kann. Dieser Satz gilt auch im Bereiche der (unendlichen) vollstetigen Matrizen[16]). Es scheint jedoch nicht bekannt zu sein, ob es nicht bereits vollstetige Matrizen gibt, für welche der Schursche Satz ungültig ist. Im Bereiche der beschränkten Matrizen ist die Antwort gewiß bejahend. Denn sonst könnte man jede beschränkte normale Matrix unitär in eine Diagonalmatrix transformieren, was nicht der Fall ist. Denn die Hermiteschen Matrizen sind mit ihrer begleitenden Matrix identisch, also gewiß vertauschbar und daher normal, und sie können, wenn sie ein Streckenspektrum haben, in keine Diagonalmatrix übergeführt werden. Hingegen kann man jede normale vollstetige Matrix gewiß in eine Diagonalmatrix unitär überführen[16]).

Der normaloide Charakter ist, wie man sich leicht überzeugt, unitären Transformationen gegenüber invariant. Es ist ferner trivial, daß jede Diagonalmatrix normaloid ist. Die endlichen (und die vollstetigen) normalen Matrizen

---

[14]) Eine Matrix $\mathfrak{A}$ unitär zu transformieren heißt, $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{U}^{-1}$ zu ersetzen, wobei $\mathfrak{U}$ unitär (= komplex-orthogonal) ist, d. h. der Bedingung $\mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U}^*$ genügt.

[15]) I. Schur, Math. Annalen **66** (1909), S. 489 ff.

[16]) Siehe loc. cit. [3]), S. 1563.

sind also gewiß normaloid. Wegen (2) sind daher alle unendlichen Matrizen, die, wie z. B. die Hermiteschen, unendlich viele normale Abschnitte haben, ebenfalls normaloid [und übrigens auch normal]. Auch die Laurentmatrizen sowie ihre Analogien[17]) sind (nicht nur normal, sondern auch) normaloid. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man in der Kopplungsform bzw. in der Bilinearform die Variablenfolgen nach dem Fischer-Rieszschen Satz als Fouriersche Koeffizientenfolgen auffaßt und sodann je zweimal die Vollständigkeitsrelation anwendet. Wir werden sehen, daß die (stets beschränkten) unitären Matrizen ebenfalls nicht nur normal, sondern auch normaloid sind. Es ist überhaupt keine beschränkte normale Matrix bekannt, die nicht normaloid ist [NB. das Abschnittsprinzip kann hier nicht herangezogen werden, da es beschränkte normale, ja unitäre Matrizen gibt, von denen kein Abschnitt normal ist]. Mit Rücksicht auf bekannte Vorkommnisse[18]) bei den Schwarzschen Ungleichungen[19])

$$(16)\quad |\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*;\mathfrak{x}), \quad |\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A};\mathfrak{x});$$
$$|\mathfrak{x}| = 1, \quad |\mathfrak{y}| = 1$$

[vgl. (10)] ist die Existenz von beschränkten normalen Matrizen, die nicht normaloid sind, nicht zu erwarten. Hingegen gibt es beschränkte normaloide Matrizen, die nicht normal sind. Dies wird, wie man auch direkt verifizieren kann, durch das Beispiel

$$\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + \ldots$$

belegt, worauf wir übrigens in § 4 noch zurückkommen.

Es sei noch erwähnt, daß aus dem normaloiden Charakter aller (unendlichen) Hermiteschen Matrizen die für jede Matrix gültige Toeplitzsche Ungleichung[7])

$$(6)' \qquad \mathfrak{r}(\mathfrak{A}) \leqq 2\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$$

leicht geschlossen werden kann. Denn sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die Hermiteschen Komponenten von $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$, so gilt offenbar

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{A}) \leqq \mathfrak{r}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{r}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{m}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{m}(\mathfrak{H}) \leqq \mathfrak{m}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{m}(\mathfrak{A}).$$

---

[17]) D. Hilbert, Gött. Nachr. 1906, S. 206ff.; E. Hellinger, Diss., Göttingen 1907, S. 61ff.; O. Toeplitz, loc. cit. [4]), S. 353; E. Hellinger, Journ. f. Math. **136** (1909), S. 210ff.; F. Riesz, loc. c. [1]), S. 150ff.; E. Hellinger und O. Toeplitz, Journ. f. Math. **144** (1914), S. 212ff.; A. Wintner, Zeitschr. f. Phys. **48** (1928), S. 149ff.

[18]) Die obere Grenze der nichtnegativ definiten Hermiteschen Form $|\sum \alpha_j \xi_j|^2$ unter der Nebenbedingung $\sum |\xi_j|^2 = 1$ ist gleich der trivialen Schranke $\sum |\alpha_j|^2$.

[19]) Beim Beweis von (16) ist freilich auch der erste Hilbertsche Faltungssatz zu verwerten.

Wie Herr Toeplitz bemerkt hat[7]), kann in (6)′ auch das Gleichheitszeichen gelten. Eine solche Matrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ ist z. B. diejenige, in welcher außer a_{31} alle Elemente verschwinden.

§ 2.

Das Spektrum.

Ist $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix und $\mathfrak{B}$ eine andere, so heißt $\mathfrak{A}$ eine vordere Reziproke von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ eine hintere Reziproke von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ (= Einheitsmatrix) gilt. Es sei ein für allemal angenommen, daß $\mathfrak{A}$ beschränkt ist. Es sind dann nach den sogenannten Formalsätzen[20]) (welchen freilich die Hilbertschen Faltungssätze zugrunde liegen[21])] nur die folgenden vier Fälle möglich: 1. Die Matrix $\mathfrak{A}$ hat eine und nur eine vordere beschränkte Reziproke, eine und nur eine hintere beschränkte Reziproke und die hintere Reziproke ist gleich der vorderen; 2. es gibt keine vordere und keine hintere beschränkte Reziproke; 3a. es gibt unendlich viele hintere beschränkte Reziproken und keine einzige beschränkte vordere Reziproke, oder 3b. es tritt das Umgekehrte ein. Die beiden letzten dieser vier Fälle sind voneinander nicht wesentlich verschieden, da der Übergang von 3a. zu 3b. nur auf die Vertauschung von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}'$ (oder mit $\mathfrak{A}^*$) hinausgeht. Damit also die pathologischen Fälle 3. nicht vorliegen, ist hinreichend (jedoch keinesfalls notwendig), daß $\mathfrak{A}$ normal ist.

Es sei $\mathfrak{A}$ irgendeine beschränkte Matrix. Dann sind die beiden, voneinander im allgemeinen verschiedenen Matrizen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ wegen (3), (9) beschränkt, wegen $(\mathfrak{M}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{N}^*\mathfrak{M}^*$ Hermitesch und wegen (16) nichtnegativ definit. Wir haben in § 1 zu jeder beschränkten Matrix $\mathfrak{C}$ eine Zahl $\mathfrak{n}(\mathfrak{C}) \geqq 0$ zugeordnet. Nach Herrn Toeplitz[22]) lassen sich nun die vier vorher aufgezählten Fälle mittels des Wertepaares

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*), \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) \tag{17}$$

durch die folgenden notwendigen und zugleich hinreichenden Kriterien kennzeichnen:

1. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) > 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) > 0;$
2. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) = 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) = 0;$
3a. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) > 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) = 0;$
3b. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) = 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) > 0.$

---

[20]) Siehe loc. cit. [12]).

[21]) Für nicht beschränkte, jedoch sonst ganz natürliche Matrizen sind die Formalsätze ungültig; vgl. z. B. T. Carleman, C. R. 171 (1920), S. 383–386, oder Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala 1923.

[22]) O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1907, S. 101–109.

Bei einer endlichen Matrix sind die pathologischen Fälle ausgeschlossen, da sie höchstens eine Reziproke hat; dem entspricht es, daß bei jeder endlichen Matrix $\mathfrak{A}$

$$(11)^* \qquad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A})$$

gilt. Bei passenden beschränkten $\mathfrak{A}$ ist $(11)^*$ unrichtig. Denn die Matrix

$$(18) \qquad \mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \end{Vmatrix}$$

ist beschränkt und sie läßt, wie Herr Toeplitz[22]) bemerkt hat, die beschränkte Matrix

$$(18)' \qquad \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_2 & 0 & 1 & 0 & \\ \gamma_3 & 0 & 0 & 1 & \\ \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \end{Vmatrix} \qquad \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2 < +\infty\right)$$

als vordere Reziproke zu, wobei die γ_j willkürlich sind, so daß für die Matrix (18) der Fall 3b., also für ihre transponierte oder begleitende Matrix der Fall 3a. vorliegt. Die unter (11) stehenden beiden Zahlen $(\geqq 0)$ können also verschieden sein. Sind sie aber von dem gleichen Signum, so sind sie gleich. Anders ausgedrückt, sind sie *beide* von Null verschieden, so daß der Fall 1. vorliegt und daher eine und nur eine beschränkte Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ vorhanden ist, so gilt $(11)^*$. Für eine solche Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ gilt nämlich[23])

$$(10)^* \qquad (\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{-1}))^2 = \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)}.$$

Da nach den Formalsätzen $(\mathfrak{A}^{-1})^* = \mathfrak{A}^{*-1}$ ist und wegen (9) stets $\mathfrak{r}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{C}^*)$ gilt, so kann man hierfür auch

$$(10\,\mathrm{a})^* \qquad \mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{-1})\,\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{*-1}) = \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)}$$

schreiben, woraus $(11)^*$ ersichtlich ist.

Wir wollen $\mathfrak{B}$, wie vorhin, nur dann eine Reziproke der beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ nennen und mit $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnen, wenn die folgenden drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind: a) die Matrix $\mathfrak{B}$ ist beschränkt, b) es gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und c) endlich $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$. Diese Bedingungen sind, wie sich

---

[23]) Vgl. weiter unten (S. 241).

igen läßt, unabhängig voneinander. Nach den vorangehenden gibt es öchstens ein $\mathfrak{A}^{-1}$. Aus den Formalsätzen folgt unter Beachtung von

$$\mathfrak{E}' = \overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}, \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{N})' = \mathfrak{N}'\mathfrak{M}', \quad \overline{(\mathfrak{M}\mathfrak{N})} = \overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{C}^* = \overline{\mathfrak{C}}' = \overline{\mathfrak{C}'}$$

mittelbar

$$9) \qquad \overline{\mathfrak{B}^{-1}} = (\overline{\mathfrak{B}^{-1}}), \quad \mathfrak{B}'^{-1} = (\mathfrak{B}^{-1})', \quad \mathfrak{B}^{*-1} = (\mathfrak{B}^{-1})^*,$$

e Existenz von $\mathfrak{B}^{-1}$ vorausgesetzt. Eine beschränkte Matrix hat also la wir außer b) auch c) vorausgesetzt haben] nur dann eine (also nur ne) Reziproke, wenn dies auch von der transponierten Matrix gilt [bei ermiteschen, Laurentschen, und allgemeiner bei normalen Matrix ist frei- ch die Bedingung c) überflüssig]. Für unsere Zwecke, insbesondere für den xistenzbeweis des Spektrums, ist dies sehr wesentlich, und zwar bereits dem vollstetigen Spezialfall, trotzdem bei den Matrizen, die sich von er Einheitsmatrix nur um eine vollstetige Matrix unterscheiden, die athologischen Fälle 3a., 3b. ausgeschlossen sind[24]) [ein Widerspruch zu den chmidt-Toeplitzschen Beispielen[3]) liegt nicht vor, vgl. nämlich [2]) und [39])].

Aus Hilbertschen Konvergenzsätzen folgt ohne weiteres, daß, wenn $\mathfrak{A}$ eschränkt ist, $\mathfrak{A}^{-1}$ dann und nur dann existiert, wenn das zu der latrix $\mathfrak{A}$ und zu irgendeiner quadratisch konvergenten, d. h. der Bedingung $|\mathfrak{c}|^2 = \sum |c_p|^2 < +\infty$ genügenden Folge $\{c_p\}$ gehörige Gleichungssystem $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ genau eine quadratisch konvergente Lösung $\mathfrak{x}$ hat (und zwar t dann diese quadratisch konvergente Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c}$). Doch kann ieser Satz nicht mittels des Alternativprinzips irgendwie umgekehrt werden; s gibt nämlich beschränkte Matrizen $\mathfrak{A}$, die keine Reziproke haben und otzdem derart sind, daß weder die zu $\mathfrak{A}$ noch die zu $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}^*$ gehörigen omogenen Gleichungen eine auch nur der Bedingung $0 < |\mathfrak{x}| \leqq +\infty$ ge- ügende Lösung hätten[3]).

Wir definieren nun, in voller Übereinstimmung mit der Terminologie ei denjenigen beschränkten Matrizen, die bisher spektral untersucht worden nd, das Spektrum einer beliebigen beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ wie folgt: die ahl λ liegt dann und nur dann in dem Spektrum, wenn $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ icht existiert; $\lambda = \infty$ gehört also nicht dem Spektrum an und soll über- aupt nicht als ein Punkt gelten. — Nach der Toeplitzschen Tabelle ist also dann und nur dann in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ gelegen, wenn mindestens ine der beiden Zahlen $(\geqq 0)$

$$20) \qquad \mathfrak{n}\left((\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*\right), \quad \mathfrak{n}\left((\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\right)$$

erschwindet. Hierbei kann man die Multiplikationen ausführen, wenn man eachtet, daß $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^* = \bar{\lambda}\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^*$ gilt.

---

[24]) D. Hilbert, Gött. Nachr. 1906, S. 218ff.

Ist $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^*$ vertauschbar, so ist, da $c\mathfrak{E}$ mit jeder Matrix vertauschbar ist, auch $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})$ mit $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^*$ vertauschbar, so daß die beiden Zahlen (20) gewiß gleich sind. Mithin liegt λ dann und nur dann außerhalb des Spektrums einer normalen Matrix $\mathfrak{A}$, wenn

$$\mathfrak{n}(|\lambda|^2\mathfrak{E}-\lambda\mathfrak{A}^*-\lambda\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)>0 \tag{20}$$

ausfällt, und dann und nur dann in dem Spektrum, wenn hierbei nicht >0, sondern $=0$ gilt, oder, was wegen (15) auf dasselbe hinausgeht, $\mathfrak{n}((\mu\mathfrak{E}-\mathfrak{G})^2+(\nu\mathfrak{E}-\mathfrak{H})^2)=0$ ist, wobei wieder $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}+i\mathfrak{H}$, $\lambda=\mu+i\nu$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^*$, $\mu\gtrless 0$, $\nu\gtrless 0$ gesetzt wurde. Da die Matrizen $|\lambda|^2\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ nichtnegativ definit sind, so ist in (20)′ der Ausdruck linkerhand gewiß

$$\begin{aligned}&\geqq \mathfrak{n}(|\lambda|^2\mathfrak{E})+\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)-\mathfrak{m}(-\lambda\mathfrak{A}^*)-\mathfrak{m}(-\lambda\mathfrak{A})\\&=|\lambda|^2+\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)-|-\lambda|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A}^*)-|-\bar{\lambda}|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Nun ist aber $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}^*)=\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$. Damit also λ außerhalb des Spektrums der normalen Matrix $\mathfrak{A}$ liegt, ist hinreichend, daß

$$|\lambda|^2+\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)-2|\lambda|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A})>0 \tag{21}$$

ausfällt; notwendig ist diese Bedingung nicht. — Doch wollen wir jetzt die normalen Matrizen wieder verlassen.

Es sei $\mathfrak{A}$ beschränkt und derart, daß $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert, und es möge λ außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}$ liegen und $\neq 0$ sein. Dann ist auch $(\lambda^{-1}\mathfrak{E}-\mathfrak{A}^{-1})^{-1}$ vorhanden, d. h. λ^{-1} liegt außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}^{-1}$. Man erkennt dies mittels der Neumann-Hilbschen Reihen, auf welche wir noch zurückkommen. Wegen $(\mathfrak{A}^{-1})^{-1}=\mathfrak{A}$ können wir also behaupten, daß λ dann und nur dann in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ liegt, wenn λ^{-1} in dem Spektrum von $\mathfrak{A}^{-1}$ enthalten ist. Denn die Existenz von $\mathfrak{A}^{-1}$ ist vorausgesetzt und $\mathfrak{A}^{-1}$ ist wegen $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1}_{\lambda=0}=-\mathfrak{A}^{-1}$ dann und nur dann vorhanden, wenn $\lambda=0$ außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}$ liegt. Bezeichnet $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ die Punktmenge, welche aus den Punkten des Spektrums von $\mathfrak{A}$ besteht, so können wir also symbolisch

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^{-1})} \tag{22}$$

schreiben. — Mit Rücksicht auf das bei (20) Gesagte gehen die beiden Punktmengen $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^*)$ durch Spiegelung an der reellen Achse ineinander über,

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\overline{\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^*)}. \tag{23}$$

Es ergibt sich ferner aus der ersten Relation (19), wobei man $\mathfrak{B}=\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A}$ zu setzen hat, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\overline{\mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{A}})}$ ist. Mit Rücksicht auf $\overline{\mathfrak{C}}'=\mathfrak{C}^*$ folgt daraus wegen (23) offenbar $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\mathfrak{S}(\mathfrak{A}')$. — Es verhält sich mithin

lles so, als ob der Determinantenapparat auch jetzt zur Verfügung stehen ürde.

Herr F. Levi machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß die elationen (11), (11)* nach einer wohlbekannten gruppentheoretischen chlußweise wesentlich verallgemeinert werden können, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert. ind nämlich zwei beschränkte Matrizen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in dem Sinne äquivalent „ähnlich"), daß es eine beschränkte Matrix $\mathfrak{C}$ gibt derart, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{C}^{-1}$ ilt ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$), so haben die beiden Matrizen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ wegen

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{M})^{-1} = (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{C}^{-1})^{-1} = \mathfrak{C}(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{N})^{-1}\mathfrak{C}^{-1}$$

offenbar dasselbe Spektrum. Setzt man nun

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{-1},$$

o folgt daraus, daß die beiden (nichtnegativ definiten Hermiteschen) Matrizen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ dasselbe Spektrum haben, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert und $\mathfrak{A}$ beschränkt und sonst beliebig ist [während (11) und (11)* nur darauf inauslaufen (§ 4), daß die extremen Punkte der beiden Spektra übereinstimmen]. — Ist $\mathfrak{A}$ beschränkt und $\mathfrak{A}^{-1}$ nicht vorhanden, so brauchen die Spektra von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ nicht übereinzustimmen; dies wird, wie man eicht ausrechnet, bereits durch das Beispiel (18) belegt.

Es sei noch erwähnt, daß der pathologische Fall 3. nur dann vorliegen, d. h. (11)* höchstens dann unrichtig sein kann, wenn es ein $\eta > 0$ gibt derart, daß das ganze Kreisgebiet $|\lambda| < \eta$ in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ liegt. Es sei nämlich $\{\varepsilon_\nu\}$ eine (nicht notwendig reelle) gegen Null konvergierende und außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}$ gelegene Zahlenfolge, d. h. es sei $\varepsilon_\nu\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ bei jedem ν vorhanden und $\varepsilon_\nu \to 0, \nu \to +\infty$. Nach den vorhergehenden erhält man eine richtige Gleichung, wenn man in (11)* von der Matrix $\mathfrak{A}$ zu $\varepsilon_\nu\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ übergeht. Nimmt man aber in dieser Gleichung den Grenzübergang $\nu \to +\infty$ vor, so folgt aus ersichtlichen Stetigkeitsgründen, daß auch die beiden Zahlen (17) gleich sein müssen. — Analog erkennt man den spektralen Grund des Umstandes, daß (11) bei jeder beschränkten Matrix richtig ist. — Ebenso folgt, daß die charakteristischen Polynome von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ bei endlichen Matrizen auch dann übereinstimmen, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ nicht existiert, so daß dabei diese beiden Hermiteschen Matrizen stets unitär äquivalent sind.

Wir zeigen nun mittels einer sinngemäßen Anpassung des geläufigsten unktionentheoretischen Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra, daß die Punktmenge $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ nie leer ist, mit andern Worten, daß jede beschränkte Matrix ein Spektrum hat. Wir bemerken vorerst, daß das Spektrum (sofern es existiert) gewiß eine beschränkte Punktmenge ist und genauer in dem vorher (§ 1) mit $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ bezeichneten Kreise $|\lambda| \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$

liegt. Aus (3) folgt nämlich, unter $\mathfrak{A}^0$ die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ verstanden,

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^n) \leqq (\mathfrak{r}(\mathfrak{A}))^n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

so daß die C. Neumannsche [bei beliebigen beschränkten Matrizen zuerst von Herrn Hilb[25]) benutzte] Reihe

$$\mathfrak{R}_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^n}{\lambda^{n+1}}$$

für $|\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A})$ eine Matrix $\mathfrak{R}_\lambda$ erklärt, und zwar eine beschränkte, da offenbar

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{R}_\lambda) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{A})^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \mathfrak{r}(\mathfrak{A})}$$

gilt, wobei der letzte Nenner > 0 ist. Nun findet man durch gliedweise Multiplikation mit $\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$, was offenbar gestattet ist, daß $\mathfrak{R}_\lambda(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$ und ebenso auch $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\mathfrak{R}_\lambda = \mathfrak{E}$ ausfällt, so daß $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ für $|\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A})$, wie behauptet, gewiß existiert. —

Außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ möge

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \|R_{pq}(\lambda)\| \tag{25}$$

gesetzt und die Matrix (25), als Funktion von λ aufgefaßt, als Resolvente von $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Da für die Resolvente die Entwicklung

$$\|R_{pq}(\lambda)\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^n}{\lambda^{n+1}}; \quad |\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A}) \tag{26}$$

gilt, so folgt aus (24) unmittelbar, daß für $|\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A})$ jedes Element $R_{pq}(\lambda)$ der Resolvente eine reguläre Funktion ist, die sich auch für $\lambda = \infty$ regulär verhält und für $|\lambda| \to +\infty$ verschwindet. — Wir bedienen uns nun des projektiven Kunstgriffes von Herrn Hilb[25]), indem wir jetzt die Resolvente nicht, wie in (26), in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, sondern in der Umgebung einer im Endlichen und außerhalb des Spektrums gelegenen Stelle λ_0 entwickeln. Da λ_0 außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ liegt, so ist $(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ vorhanden. Man erkennt wie vorher, daß

$$\|R_{pq}(\lambda)\| = (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (-(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1})^{n+1} \tag{27}$$

$$\text{gilt für} \quad |\lambda - \lambda_0| < \mathfrak{r}((\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}),$$

da die Reihe rechterhand in diesem Kreise eine beschränkte Matrix darstellt, die mit $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ von rechts oder links multipliziert die Einheitsmatrix ergibt, und daß in diesem Kreise jedes $R_{pq}(\lambda)$ regulär ist. — Setzen wir nun zwecks Zurückführung ad absurdum voraus, daß es kein Spektrum

---

[25]) E. Hilb, Erlang. Sitzber. 1908, S. 84–89.

ibt, so daß $(\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ bei jedem λ_0 existiert. Dann ist jedes $R_{pq}(\lambda)$ ine ganze Funktion, die außerdem, wie wir gesehen haben, auch für $\lambda = \infty$ egulär ist und für $|\lambda| \to \infty$ gegen Null strebt, also nach dem Liouvilleschen atze identisch verschwindet, so daß (25) für alle λ existiert und identisch leich der Nullmatrix $\|0\|$ ist — was jedoch einen Widerspruch enthält. Denn st λ derart, daß (25) existiert, so muß diese Matrix, die ja mit $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ ultipliziert nicht die Nullmatrix, sondern die Einheitsmatrix ergeben soll, on der Nullmatrix gewiß verschieden sein. Nun gibt es aber, da das pektrum (sofern es überhaupt existiert) ganz im Endlichen, nämlich in $(\mathfrak{A})$ liegen muß, stets Werte λ, für welche (25) existiert. Damit ist die xistenz des Spektrums bewiesen.

Ist λ_0 derart, daß $(\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ existiert, so gibt es wegen (27) ein reisgebiet $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ um λ_0, in welchem $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ vorhanden ist. as Spektrum einer beschränkten Matrix ist also eine abgeschlossene, und, ie wir wissen, beschränkte Punktmenge in der komplexen λ-Ebene. Mehr ißt sich nicht behaupten. Betrachten wir nämlich eine (nicht notwendig eelle) Diagonalmatrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, so daß $a_{pq} = \lambda_p \delta_{pq}$ $(\|\delta_{pq}\| = \mathfrak{E})$ gesetzt erden kann. Sie ist dann und nur dann beschränkt, wenn λ_p absolut nterhalb einer von p unabhängigen Schranke bleibt. Das Spektrum beteht aus den Punkten λ, für welche (25) nicht existiert, d. h. [vgl. S. 239] ei welchen die zu der Matrix $\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ gehörigen Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{\infty} (\lambda \delta_{pq} - a_{pq}) x_q = c_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

icht bei jedem der Bedingung $\sum |c_p|^2 < +\infty$ genügenden Wertsystem $\{c_p\}$ enau eine der Bedingung $\sum |x_p|^2 < +\infty$ genügende Lösung haben [für pätere Zwecke bemerken wir, daß, wenn λ außerhalb des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ egt, die quadratisch konvergente Lösung $\{x_p\}$ von (28) wegen der auf . 239 gemachten Bemerkung und mit Rücksicht auf (25) in der Gestalt

$$x_p = \sum_{q=1}^{\infty} R_{pq}(\lambda) c_q \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{29}$$

eschrieben werden kann]. Nun geht (28) in dem diagonalen Falle $_{pq} = \lambda_p \delta_{pq}$ einfach in

$$(\lambda - \lambda_p) x_p = c_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{28'}$$

ber. Diese Gleichungen haben bei einer willkürlichen quadratisch konergenten Folge $\{c_p\}$ nur dann eine Lösung, wenn $\lambda \neq \lambda_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ ilt, so daß die λ_p gewiß dem Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ angehören. Da $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ abeschlossen ist, so gilt dies auch von den Häufungsstellen der λ_p (dem ntspricht es, daß, wenn λ von allen λ_p verschieden, jedoch eine Häufungselle der λ_p ist, die Lösung $\{x_p\}$ wegen (28)' nicht bei allen quadratisch

konvergenten Folgen $\{c_p\}$ der Bedingung $\sum |x_p|^2 < +\infty$ genügen kann). Ist umgekehrt λ von den λ_p und von ihren Häufungsstellen verschieden, gibt es also ein $\varepsilon > 0$ mit $|\lambda - \lambda_p| > \varepsilon$ $(p = 1, 2, \ldots)$, so folgt aus (28)'

$$x_p = \frac{c_p}{\lambda - \lambda_p}, \qquad \sum_p |x_p|^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum |c_p|^2 < +\infty,$$

so daß λ außerhalb $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegt. Das Spektrum einer beschränkten Diagonalmatrix besteht also aus ihren Diagonalelementen und aus deren Häufungsstellen. Folglich kann jede beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der komplexen Ebene das Spektrum einer beschränkten Matrix sein, w. z. b. w. — Das Spektrum der Nullmatrix, die ja eine Diagonalmatrix ist, besteht aus dem Punkte $\lambda = 0$; doch ist dies für die Nullmatrix ebensowenig charakteristisch, wie in dem Bereiche der endlichen Matrizen. Denn ist $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ beschränkt und $a_{pq} = 0$ für $p \geqq q$, genügen endlich die a_{pq} etwa der zusätzlichen (etwas mehr als die Vollstetigkeit enthaltenden) Bedingung $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2 < +\infty$, so besteht auch das Spektrum dieser Matrix aus dem einzigen Punkte $\lambda = 0$ (man erkennt dies durch eine leichte Modifikation der für den Diagonalfall durchgeführten Schlußweise); eine zusätzliche Bedingung ist dabei, wie in § 3 das Beispiel (18) zeigen wird, sehr wesentlich.

Herr Toeplitz[7]) hat gezeigt, daß die n Eigenwerte einer endlichen Matrix $\mathfrak{A}_{[n]}$ (von n^2 Elementen) stets in dem Bereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]})$ der komplexen $\Phi_{[n]}$-Ebene liegen, auf welche die komplexe Einheitskugel $\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1$ mittels der Kopplungsform $\Phi_{[n]} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q$ abgebildet wird. Bezeichnet $\mathfrak{A}_{[n]}$ den n-ten Abschnitt der unendlichen (beschränkten) Matrix $\mathfrak{A}$, so liegt offenbar

(30) $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]})$ in $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n+1]})$ und es gilt $\lim_{n=\infty} \mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$

[die Grenzgleichung, worin man von den Randpunkten von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ evtl. abzusehen hat, folgt unmittelbar aus (2)]. Betrachtet man nun die Neumann-Hilbschen Reihen, die zu dem Abschnitt $\mathfrak{A}_{[n]}$ gehören, und nimmt sodann den Grenzübergang $n \to \infty$ auf eine vorsichtige Weise vor, so gewinnt man den Eindruck, daß das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ der unendlichen Matrix stets in ihrem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt. So wird man nämlich zu der Vermutung geführt, daß eine Zahl nur dann dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ angehören kann, wenn sie Häufungsstelle der Eigenwerte der Abschnitte $\mathfrak{A}_{[1]}, \mathfrak{A}_{[2]}, \ldots$ ist, wobei die Zahlen, die in der unendlichen Folge der Abschnittseigenwerte mehrfach eintreten, mit der entsprechenden Vielfachheit $(\leqq +\infty)$ zu zählen wären. Doch ist dieser Satz [ebenso wie seine Umkehrung; vgl. (34) weiter

nten] geradezu falsch: die Matrix (18) liefert ein Gegenbeispiel. Aus (32) der aus dem Anhang wird nämlich hervorgehen, daß alle Abschnittseigenverte von (18) gleich Null sind, während das Spektrum von (18) auch veitere Punkte, ja ein zweidimensionales Kontinuum enthält (dies folgt ibrigens, wie wir wissen, bereits daraus, daß für (18) der pathologische Fall vorliegt). — Ich gehe also über den erwähnten Toeplitzschen Satz über endliche Matrizen wesentlich hinaus, wenn ich jetzt auf eine direkte Weise zeige, daß der Satz — trotz der Unbrauchbarkeit des Abschnittsprinzips — auch im Bereiche der beschränkten Matrizen richtig ist: das Spektrum liegt stets in dem Wertevorrat.

Setzt man in (16) den Vektor $\mathfrak{y}$ gleich $\bar{\mathfrak{x}}$, schreibt man ferner $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$, so folgt wegen (4)

$$|\Phi(\mathfrak{B};\mathfrak{x})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*;\mathfrak{x}), \quad |\Phi(\mathfrak{B};\mathfrak{x})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B};\mathfrak{x}) \text{ für } |\mathfrak{x}| = 1,$$

also auch

$$(\mathfrak{n}(\mathfrak{B}))^2 \leqq \mathfrak{n}(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*), \quad (\mathfrak{n}(\mathfrak{B}))^2 \leqq \mathfrak{n}(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}), \tag{31}$$

da $\mathfrak{n}(\mathfrak{C})$ nach Definition die untere Grenze von $|\Phi(\mathfrak{C};\mathfrak{x})|$ auf der komplexen Hilbertschen Kugel $|\mathfrak{x}| = 1$ bezeichnet. Es sei nun $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix, und λ eine Zahl aus dem Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$. Dann ist, wie wir wissen, mindestens eine der beiden Zahlen (20) gleich Null. Wegen (31) wobei $\mathfrak{B} = \lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ zu setzen ist, folgt daraus $\mathfrak{n}(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = 0$. Dies besagt, daß die untere Grenze des Betrages von

$$\Phi(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \lambda\Phi(\mathfrak{E};\mathfrak{x}) - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \lambda - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) \qquad (|\mathfrak{x}| = 1)$$

unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ verschwindet, so daß also $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ unter dieser Nebenbedingung der Zahl λ beliebig nahe kommen kann und daher λ in dem abgeschlossenen Wertbereiche $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ gewiß enthalten ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ liegt. — Daraus folgt, daß der kleinste konvexe Bereich $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$, welcher alle Punkte des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ enthält, ebenfalls in $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ liegt. Denn $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ ist konvex (§ 1). Bei der Matrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, in welcher außer a_{21} jedes a_{pq} verschwindet, hat $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ auch solche Punkte, die nicht in $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ liegen[7]). Wir werden aber in § 5 beweisen, daß bei den normaloiden Matrizen $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ ist.

§ 3.

Die Funktionentheorie der Resolventenmatrix.

Ist die Zahl λ_0 außerhalb des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ gelegen, so gibt es nach § 2 ein von p und q unabhängiges $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ jedes Element $R_{pq}(\lambda)$ der Resolventenmatrix regulär ist. Andererseits ist bei den endlichen Matrizen jede Wurzel der charak-

teristischen Gleichung ein Pol für mindestens ein Element der Resolventenmatrix. Dadurch wird die folgende Vermutung nahegelegt: gehört λ_0 dem Spektrum einer beschränkten Matrix an, so gibt es kein $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ alle $R_{pq}(\lambda)$ regulär sind. Doch ist dieser Satz nicht allgemein richtig (hinreichende Kriterien findet man in § 7). Die beschränkte Matrix (18) liefert nämlich ein einfaches Gegenbeispiel. Um dies zu zeigen, beachte man zunächst, daß die Gleichungen (28) für die Matrix (18) in

$$\lambda x_1 = c_1, \quad \lambda x_2 - x_1 = c_2, \quad \lambda x_3 - x_2 = c_3, \quad \ldots$$

übergehen, woraus

$$x_p = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{\lambda^{p-q+1}}, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

also nach Vergleich mit (29)

$$(32) \qquad R_{pq}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{p-q+1}} \text{ für } q \leqq p; \qquad R_{pq}(\lambda) \equiv 0 \text{ für } q > p$$

ersichtlich ist, da die c_p nur an die Bedingung $\sum |c_p|^2 < +\infty$ gebunden sind. Nun ist dafür, daß eine Matrix $\|b_{pq}\|$ beschränkt ist, bekanntlich notwendig, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pq}|^2 < \Omega, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} |b_{pq}|^2 < \Omega$$

gilt, und hinreichend, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pq}| < \Omega, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} |b_{pq}| < \Omega$$

ausfällt, wobei Ω eine von p und q unabhängige, sonst beliebige Schranke bezeichnet[26]). Folglich ist die durch (32) für alle $\lambda \neq 0$ erklärte Matrix $\|R_{pq}(\lambda)\|$ dann und nur dann beschränkt, wenn $|\lambda| > 1$ gewählt wird. Mit Rücksicht auf (25) besagt dies, daß das Spektrum der Matrix (18) identisch ist mit der Kreisscheibe $|\lambda| \leqq 1$. Und trotzdem ist nach (32) jedes $R_{pq}(\lambda)$ für $|\lambda| > 0$ durchweg regulär. Analoge Verhältnisse liegen vor bei allen (zu „Summengleichungen" gehörigen) Matrizen, bei welchen die Resolvente der transponierten Matrix, also auch die Resolvente selbst, ebenfalls rekursiv berechnet werden kann. Vgl. auch den Anhang.

Da demnach für die Neumann-Hilbschen Reihen eine Art Überkonvergenz stattfinden kann, so muß man den Begriff des Konvergenzradius ϱ einer Matrizenpotenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathfrak{A}_n$, wobei die $\mathfrak{A}_n$ beschränkte Matrizen sein mögen, wie folgt festlegen: ϱ ist die obere Grenze der Radien

[26]) I. Schur, Journ. f. Math. **140** (1910), S. 6–7 ff. — Wählt man hingegen den Exponenten zwischen 1 und 2, so erhält man eine Bedingung, die für die Beschränktheit weder notwendig noch hinreichend ist.

$\varrho'\,(\geqq 0)$ derjenigen Kreise $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho'$, in welchen die Reihe nicht nur konvergiert, sondern außerdem eine *beschränkte* Matrix darstellt. *Dann und nur dann* kann man nämlich den Komplex der Cauchy-Weierstraßschen Potenzreihensätze auf die Neumann-Hilbschen Reihen sinngemäß übertragen: am Rande des Konvergenzkreises liegt stets mindestens eine matrizentheoretisch singuläre Stelle (d. h. ein Punkt des Spektrums), über welche hindurch keine unmittelbare analytische Fortsetzung der Matrix möglich ist; innerhalb des Konvergenzkreises darf man die Potenzreihe umordnen, usw. — Die am Rande des Konvergenzkreises gelegene Matrizensingularität braucht nicht bereits durch die *einzelnen* $R_{pq}(\lambda)$ in Evidenz zu treten. Sie kann ferner, wie die Jacobische Matrix des Gaußschen assoziierten Kettenbruches für die erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome belegt, auch den Charakter einer Verzweigungsstelle haben (vgl. übrigens die Habilitationsschrift von Herrn Hellinger), trotzdem eigentlich nur eine einzige Bestimmung in Betracht kommt, da ja $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ höchstens eine Reziproke hat. Eine bei jedem $\mathfrak{A}$ gültige matrizentheoretische Deutung der übrigen Zweige ist mir nicht gelungen, und so will ich auf diese Matrizenfunktionentheorie nicht näher eingehen. — Es können übrigens für eine rein matrizentheoretische Deutung der Verhältnisse auch dann gewisse Schwierigkeiten vorliegen, wenn es keine Verzweigungsstelle gibt. So braucht z. B. das Gebiet der matrizentheoretisch regulären (d. h. außerhalb des Spektrums gelegenen) Stellen nicht zusammenhängend zu sein [trotzdem es sich um eine und dieselbe Matrix $\mathfrak{A}$ handelt]. Es kann ferner, wie wir wissen, jede beschränkte abgeschlossene Punktmenge das Spektrum einer beschränkten Matrix bilden. — Diese Fragen, deren Behandlung (bei normalen Matrizen) u. a. eine restlose Übertragung der Stieltjes-Helly-Grommerschen Integrationstheorie auf zweifache Integrale erfordern würde, scheinen im Falle normaler Matrizen von zweidimensionalem Spektrum mit gewissen schwierigen Fortsetzungsproblemen der Theorie des logarithmischen Potentials zusammenzuhängen, und sie erfordern eine zu den vorliegenden Zwecken angepaßte explizite Ausgestaltung der groß angelegten Untersuchungen von Herrn Radon[10]).

In § 1 ist die Existenz von beschränkten normaloiden Matrizen behauptet worden, die nicht normal sind. Es soll jetzt der Beweis hierfür nachgeholt werden. — Die Matrix (18) ist nicht normal, da für sie mit Rücksicht auf (18)′ der pathologische Fall 3. des § 1 vorliegt, was bei normalen Matrizen, wie erwähnt, von vornherein ausgeschlossen ist. Um zu zeigen, daß die Matrix (18) dennoch normaloid ist, beachte man zunächst, daß ihr Spektrum aus der Kreisscheibe $|\lambda| \leqq 1$ besteht, also Zahlen von dem Betrage Eins enthält. Da das Spektrum stets in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, so enthält auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ Zahlen, die absolut $\geqq 1$ sind. Ferner ist $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ nach Definition der Maximalbetrag der in der abgeschlossenen

Zahlenmenge $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenen Zahlen. Folglich gilt $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) \geqq 1$. Da andererseits die zu (18) gehörige Bilinearform

$$x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + \ldots \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 = 1, \quad \sum_{q=1}^{\infty} |y_p|^2 = 1$$

nach der Schwarzschen Ungleichung absolut $\leqq 1$ ist, d. h. $\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 1$ ausfällt, so gilt $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) \geqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ erst recht. In Verbindung mit (6) folgt daraus (8), w. z. b. w. Vgl. übrigens den Anhang.

Was die (matrizentheoretischen) Konvergenzverhältnisse der Neumann-Hilbschen Reihen bei einer beliebigen beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ anlangt, so läßt sich folgendes behaupten. Bezeichnet $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ den matrizentheoretischen Konvergenzradius von (26), d. h. die obere Grenze derjenigen Zahlen ϱ', welche die Eigenschaft haben, daß die Reihe (26) für $|\lambda^{-1}| \leqq \varrho'$ konvergiert und eine beschränkte Matrix darstellt, so gilt $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, also wegen (6)

$$\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}), \tag{33}$$

während aus § 2 nur $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ folgt. Die schärfere Ungleichung $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist aus den folgenden drei Bemerkungen unmittelbar ersichtlich:

I.) Die Reihe (26) konvergiert matrizentheoretisch so lange, bis λ von dem Nullpunkt ferner liegt als ein beliebiger Punkt des Spektrums $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, so daß also $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ der Radius des kleinsten, das Spektrum enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises ist.

II.) Die Zahl $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist nach Definition der Radius des kleinsten, den Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises.

III.) Nach § 2 liegt $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ gewiß in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. —

Ist $\mathfrak{A}$ normaloid, so kann noch mehr als (33) behauptet werden. Denn bei normaloiden Matrizen ist, nach der am Schluß von § 2 erwähnten, in § 5 zu beweisenden Konvexitätsregel, die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Mit Rücksicht auf I.) und II.) ergibt dies offenbar, daß für jede normaloide Matrix $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ gilt. Anders ausgedrückt:

$$\text{aus} \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A}) \quad \text{folgt} \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{p}(\mathfrak{A}). \tag{33'}$$

Bei nicht normaloiden $\mathfrak{A}$ kann in (33) beidemal das Zeichen $<$ gelten, so z. B. bei der mehrfach erwähnten Matrix $\mathfrak{A} = \| a_{pq} \|$, in welcher außer a_{21} jedes a_{pq} verschwindet; hier ist nämlich

$$\mathbf{p}(\mathfrak{A}) = 0, \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \frac{|a_{21}|}{2}, \quad \mathbf{r}(\mathfrak{A}) = |a_{21}|. \tag{33''}$$

Aus diesem Beispiel geht sogar hervor, daß $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ nicht limitiert werden kann [wohl aber $\mathbf{r}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$, da, wie erwähnt, $\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 2\,\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist].

§ 4. Die Abschnittsspektra.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix und $\lambda_1^{[n]}, \lambda_2^{[n]}, \ldots, \lambda_n^{[n]}$ das Spektrum ires n-ten Abschnittes $\mathfrak{A}_{[n]}$. Die Gesamtheit aller $\lambda_\nu^{[n]}$ $(1 \leqq \nu \leqq n = 1, 2, \ldots)$ eiße $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$, und es bezeichne $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ die Gesamtheit der Häufungsstellen ler $\lambda_\nu^{[n]}$, wobei mehrfach eintretende Zahlen mit der entsprechenden Vielachheit gezählt werden mögen, so daß also $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ nie leer ist, indem z. B. $_0'(\mathfrak{E})$ aus dem Punkte $\lambda = 1$ besteht. Es ist in § 2 erwähnt worden, daß das Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ nicht notwendig in $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ liegt. Ebenso kann $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ Punkte haben, die außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ liegen [so daß die Existenz des Spekrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ weitaus nicht trivial ist, trotzdem die Matrix nur dann beschränkt sein kann, wenn die Abschnittseigenwerte ganz im Endlichen liegen (vgl. den nächsten Absatz, S. 250)]. Dies gilt, wie das Toeplitzsche Beispiel[21])

(34)
$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{Vmatrix}$$

(das durch Verschiebung von $\mathfrak{A}_{[2]}$ längs der Diagonale dadurch entsteht, daß man die fehlenden Elemente gleich Null setzt) belegt, bereits dann, wenn die beschränkte Matrix Hermitesch ist. Für (34) gilt nämlich $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{A}^{-1} (= \mathfrak{A})$ vorhanden ist und daher $\lambda = 0$ wegen $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}_{\lambda=0} = -\mathfrak{A}^{-1}$ außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ liegt. Und trotzdem liegt $\lambda = 0$ in $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$. Zu diesem Ende braucht man nur $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ zu bestimmen, was ohne weiteres möglich ist. Zunächst folgt nämlich durch binäre Drehung der irreduziblen Quadrate, daß unter den $2n$ Zahlen $\lambda_\nu^{[2n]}$ je n gleich ± 1 sind. Ferner gilt, wenn man die λ gemäß $\lambda_\nu^{[n]} \leqq \lambda_{\nu+1}^{[n]}$ numeriert, auch $\lambda_\nu^{[2n+1]} = \pm 1$, je nachdem $\nu <$ oder $> n+1$ ist. Endlich enthält die letzte Kolonne in $\mathfrak{A}_{[2n+1]}$ nur Nullen, so daß $\det \mathfrak{A}_{[2n+1]} = 0$ ist und daher ein $\lambda_\nu^{[2n+1]}$ verschwinden muß (was bereits aus der Hauptachsendarstellung hervorgeht). Man hat daher $\lambda_{n+1}^{[2n+1]} = 0$ bei jedem n, womit alles bewiesen ist. — Die beiden anderen Punkte von $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$, nämlich $\lambda = \pm 1$, gehören aber, wie man leicht ausrechnet, auch dem Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ an. Es handelt sich dabei, wie wir auf S. 250 sehen werden, um einen allgemeinen Satz.

Die Punktmengen $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ sind auch dann erklärt, wenn $\mathfrak{A}$ nicht beschränkt ist. Für solche Matrizen möge man den (abgeschlossenen) Bereich $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ einfach mittels (30) definieren. Dann liegen $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ mit Rücksicht auf bei (30) Gesagte stets in $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$, und die

Matrix $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Punktmenge $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ganz im Endlichen liegt. Hingegen kann man [etwa auf Grund der bei (33)″ benutzten Matrix] ohne weiteres nichtbeschränkte Matrizen herstellen, bei welchen $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ ganz im Endlichen liegen. Erst recht ist es also nicht möglich, $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auf Grund des Abschnittseigenwertesystems $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$ der (beschränkten oder nicht beschränkten) Matrix $\mathfrak{A}$ zu bestimmen.

[Man erkennt aber leicht, daß bei jeder beschränkten normaloiden Matrix $\mathfrak{A}$ der Bereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, der bei beliebigen beschränkten $\mathfrak{A}$ das System der Abschnittseigenwerte ganz in seinem Innern enthalten kann, durch $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$, also erst recht durch $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$, vollständig bestimmt wird, wenn das Spektrum — nicht wie bei (18) — in dem abgeschlossenen Abschnittsspektrum liegt (diese Voraussetzung ließe sich, wie aus dem Beweise hervorgeht, auf verschiedene Weisen verschärfen). Um dies zu zeigen, stützen wir uns auf die später zu beweisende Konvexitätsregel, wonach die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch ist mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ (die Beschränktheit der normaloiden Matrix $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt). Offenbar ist also jeder Randpunkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, der nicht in dem Innern eines eventuellen geradlinigen Begrenzungsstückes von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, d. h. jeder sogenannter extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten. Daraus folgt aber, da $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ in $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ die konvexe Hülle von $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ darstellt, woraus die Behauptung folgt.]

Wir betrachten nun die Hermiteschen Matrizen. Da jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ gilt, so ist der beschränkte Bereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ wegen (14) ein auf der reellen Achse gelegenes Intervall (von dem trivialen Fall $\mathfrak{A} = c\,\mathfrak{E}$, $c \gtrless 0$, wo es auf einen Punkt zusammenschrumpft, wollen wir absehen). Ebenso ist $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]})$ bekanntlich das Intervall $\lambda_1^{[n]} \leqq \lambda \leqq \lambda_n^{[n]}$, wenn $\lambda_1^{[n]}$ wieder den kleinsten, $\lambda_n^{[n]}$ den größten (stets reellen) Eigenwert von $\mathfrak{A}_{[n]}$ bedeutet. Aus (30) folgt also zunächst, daß

$$\lambda_1^{[n+1]} \leqq \lambda_1^{[n]}, \quad \lambda_n^{[n]} \leqq \lambda_{n+1}^{[n+1]} \qquad (\lambda_1^{[n]} \leqq \lambda_2^{[n]} \leqq \ldots \leqq \lambda_n^{[n]})$$

gilt, und sodann, daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ aus dem Intervalle $\lim \lambda_1^{[n]} \leqq \lambda \leqq \lim \lambda_n^{[n]}$ besteht, also durch die beiden extremen Häufungsstellen der Abschnittseigenwerte begrenzt wird. Es ist also trivial, daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ identisch ist mit der konvexen Hülle der Abschnittseigenwerte. Nun ist aber $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch mit $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$, d. h. mit der konvexen Hülle des eigentlichen Spektrums $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch. Wir erhalten also den gewiß bekannten Satz [vgl. loc. cit. [4]), S. 363], daß die beiden extremen Häufungspunkte $\lambda = \lim \lambda_1^{[n]}$, $\lambda = \lim \lambda_n^{[n]}$ stets in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegen. Wie wenig selbstverständlich dies ist, haben wir bei (34) gesehen. — Der Satz kann auf nicht beschränkte Hermitesche Matrizen über-

tragen werden[27]), wobei der Einfachheit halber die Konvergenz einer jeden Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$; $p = 1, 2, \ldots$ ein für allemal angenommen sein möge.

Es handelt sich dabei um folgendes. Nach dem Vorangehenden ist die Hermitesche Matrix $\mathfrak{A}$ dann und nur dann beschränkt, wenn die $\lambda_\nu^{[n]}$ in einem endlichen Intervall liegen. Dementsprechend möge $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt genannt werden, wenn $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ mittels einer Halbgeraden überdeckt werden kann. Es möge ferner — aus Gründen, die ich in meinem Aufsatz[27b]) näher ausgeführt habe — eine Hermitesche Matrix $\mathfrak{A}$ als statistisch sinnvoll bezeichnet werden, wenn das Hilbertsche Auswahlverfahren[28]) überflüssig ist (also z. B. wenn $\mathfrak{A}$ beschränkt ist). Zu jeder Hermiteschen Matrix kann man mittels des Auswahlverfahrens Spektra $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ zuordnen, so daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ eindeutig bestimmt ist, wenn das Auswahlverfahren überflüssig ist; im Spezialfall der beschränkten Matrizen geht dieses $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ in die in § 2 erklärte Punktmenge über. Es gelten nun die folgenden Sätze:

I. Die halbbeschränkten Matrizen sind statistisch sinnvoll[27a]).

II. Liegen alle $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ auf einer Halbgerade, so ist $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt[27c]). — Die Umkehrung von Satz II, der bis zum Übereinstimmen der extremen Punkte verschärft werden kann, ist trivial.

Es seien hier die folgenden Anwendungen dieser Sätze zusammengestellt.

A. Nehmen wir an, daß die Hermitesche Matrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ eine sogenannte Jacobische Matrix ist[29]):

$$a_{pq} = 0 \quad \text{für} \quad |p - q| > 1; \qquad a_{p\,p-1} = \bar{a}_{p-1\,p} \neq 0; \qquad a_{pp} \gtrless 0.$$

In diesem Spezialfall kann II. aus der Kettenbruchtheorie entnommen werden (Heine), während I. in ein gut brauchbares Konvergenzkriterium für assoziierte Kettenbrüche übergeht[30]).

B. In dem Toeplitzschen Spezialfall folgt, wie man sich leicht überzeugt, der folgende bekannte Satz[31]): Sind für alle Abschnitte der formal gebildeten Potenzreihe $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ die Toeplitzschen Determinantenkriterien des Carathéodoryschen Problems erfüllt, so ist $f(z)$ für $|z| < 1$ konvergent und von positivem Realteil.

---

[27]) Vgl. A. Wintner: a) Sächs. Sitzber. 1927, S. 145 ff.; b) Zeitschr. f. Phys. **49** (1928) S. 684 ff.; c) Einführung in den mathematischen Apparat der Quantenmechanik, Leipzig, S. Hirzel, 1929.

[28]) Gött. Nachr. 1906, S. 164 ff. In meiner Note [27a]) habe ich gezeigt, daß das Auswahlverfahren bei allen von Hilbert (loc. cit.) betrachteten (auch nicht beschränkten) Matrizen überflüssig ist. Doch gibt es auch weitere Hermitesche Matrizen; vgl. z. B. [27b]).

[29]) E. Hellinger und O. Toeplitz, J. f. Math. **144** (1914), S. 219—238, 318, ferner O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1910, S. 489 ff.

[30]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 285–289.

[31]) Vgl. insb. C. Carathéodory, Rend. Palermo **32** (1911), S. 213–217; G. Herglotz, Sächs. Sitzber. 1911, S. 501—511.

C. Die Spektra der quantenmechanischen Matrizen (gemeint sind die Energiematrizen) liegen bekanntlich nicht im Endlichen, jedoch meistens — z. B. bei dem Wasserstoff — auf einer Halbgerade[32]). Diese Matrizen sind also nicht beschränkt, jedoch wegen II. gewiß halbbeschränkt. Mit Rücksicht auf I. sind also die wasserstoffähnlichen Energiematrizen statistisch sinnvoll.

D. Vor einiger Zeit habe ich das Differentialsystem der kleinen freien Schwingen eines (nicht notwendig stabilen) Oszillators unter gewissen Voraussetzungen (z. B. unter der Voraussetzung der Beschränktheit der nicht notwendig Hermiteschen Matrix) mittels Fourierscher Integrale auf Grund der „Spektralmatrix" integriert[33]). Herr Murray[34]) hat diese Formeln unter der Stabilitätsannahme, daß $-\lambda_\nu^{[n]} > \text{Konst.} > 0$ ist, auf die Klasse derjenigen Hermiteschen Matrizen übertragen, bei welchen jede Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ konvergiert. Herr Murray bedient sich dabei des Auswahlverfahrens, und die Eindeutigkeit der Zerlegung des Fourierschen Wellenpakets in Elementarwellen (Hellingersche Differentiallösungen) blieb dabei unerledigt. Aus I. folgt nun, daß dies behoben werden kann[35]): nach der Stabilitätsannahme ist die Matrix halbbeschränkt, also statistisch sinnvoll, das Auswahlverfahren ist daher überflüssig, da sich bei dem Grenzübergang $\mathfrak{A}_{[n]} \to \mathfrak{A}$ nur *eine* Spektralmatrix ergibt. — Der Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung selbst ließe sich (unter der Voraussetzung, daß nur für alle t gleichmäßig beschränkte Linearformen zugelassen werden) nach der bekannten C. Jordanschen Schlußweise erbringen.

§ 5.

Die Konvexitätsregel.

Es sei wieder $\mathfrak{A}$, wie im folgenden stets, eine beschränkte Matrix. Wie wir wissen, ist $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein beschränkter konvexer Bereich, der das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ und daher auch die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ des Spektrums enthält. Es gilt $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$ offenbar dann und nur dann, wenn jeder extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten ist. Unter einem extremen Punkt ist dabei, wie erwähnt, ein Punkt einer abgeschlossenen konvexen Menge zu verstehen, der am Rande, aber nicht im Innern eines

---

[32]) Vgl. W. Heisenberg, loc. cit. [9]), S. 702—703.

[33]) Vgl. meine unter [45]) zitierten Noten sowie Ann. d. Phys. 82 (1927), S. 346—354.

[34]) F. H. Murray, Annals of Math. 29 (1928), S. 133—139.

[35]) Es ist jedoch, mit Rücksicht auf die Theorie von Herrn Carleman[21]), wesentlich, daß wir uns auf Zerlegungen beschränken, die sich mittels des speziellen Grenzüberganges $\mathfrak{A}_{[n]} \to \mathfrak{A}_{[n]}$ ergeben. Vgl. [27b]).

eventuellen geradlinigen Begrenzungsstückes liegt. Wir wollen beweisen, daß bei jedem normaloiden $\mathfrak{A}$ die extremen Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten sind. Anders ausgedrückt: aus $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ folgt $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$.

Der Übersicht halber führen wir diese Konvexitätsregel auf einen scheinbar weniger besagenden Spezialfall zurück. — Mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ gibt es keinen Punkt in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ außerhalb des Kreises $|\lambda| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, während dieser auf seinem Rande mindestens einen Punkt des abgeschlossenen Bildbereiches $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthält. Ist $\mathfrak{A}$ derart, daß es nur einen einzigen Punkt in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ gibt, der auf der Kreislinie $|\lambda| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ liegt, so wollen wir diesen Punkt als den Hauptpunkt von $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Dieser ist offenbar ein extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Wir beweisen nun die Konvexitätsregel zunächst in der folgenden speziellen Fassung:

Hat die Matrix einen Hauptpunkt, und ist sie normaloid, so liegt der Hauptpunkt in dem Spektrum.

Beweis. Die obere Grenze des absoluten Betrages der Zahlen $\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})$, derer die Kopplungsform unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ fähig ist, ist nach Definition gleich $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$, und $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ besteht aus diesen Zahlen und aus ihren Häufungspunkten. Es gilt also $|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, und es gibt eine Folge $\{\mathfrak{x}_n\}$ derart, daß $|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n)|$ für $n \to \infty$ gegen $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ strebt; hierbei und auch später ist $|\mathfrak{x}| = 1$, $|\mathfrak{x}_n| = 1$. Da nun $\mathfrak{A}$ einen Hauptpunkt haben soll, so gibt es in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ einen und nur einen Punkt $\lambda = \lambda_0$ derart, daß $|\lambda_0| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ausfällt. Offenbar gilt also die Ungleichheit

$$|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})| \leqq |\lambda_0| = \mathbf{m}(\mathfrak{A}) \tag{35}$$

für alle $\mathfrak{x}$ und die Grenzgleichung

$$\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n) \to \lambda_0 \tag{36}$$

für passende $\mathfrak{x}_n$, und es gibt nur eine Zahl λ_0 von dieser Beschaffenheit, so daß mit Rücksicht auf (14) auch

$$\Phi(\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to \bar{\lambda}_0 \tag{37}$$

gilt. Aus (4), (16), (35), (36) folgt ferner

$$\liminf_{n=\infty} \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \geqq (\mathbf{m}(\mathfrak{A}))^2 = |\lambda_0|^2. \tag{38}$$

Andererseits ist $\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ nach Definition die obere Grenze des Betrages[36]) von $\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$, und $\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ ist nach (10) immer $= (\mathbf{r}(\mathfrak{A}))^2$, mithin

$$\limsup_{n=\infty} |\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n)| \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}) \tag{39}$$

---

[36]) Übrigens ist $\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x})$ wegen (16) stets $\geqq 0$.

Da nun $\mathfrak{A}$ nach Voraussetzung normaloid ist, d. h. $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ gilt, so können wir mit Rücksicht auf (39) an Stelle von (38) einfach

$$\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \xi_n) \to |\lambda_0|^2 \tag{40}$$

schreiben. Endlich ist

$$\Phi(\mathfrak{E}; \xi_n) \to 1 \tag{41}$$

wegen $|\xi_n| = 1$ trivial. Aus (41), (36), (37), (38) folgt nun

$$|\lambda_0|^2 \Phi(\mathfrak{E}; \xi_n) - \bar{\lambda}_0 \Phi(\mathfrak{A}; \xi_n) - \lambda_0 \Phi(\mathfrak{A}^*; \xi_n) + \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \xi_n) \to 0,$$

oder wegen $\Phi(\alpha\mathfrak{M} + \beta\mathfrak{N}; \xi) = \alpha\Phi(\mathfrak{M}; \xi) + \beta\Phi(\mathfrak{N}; \xi)$

$$\Phi(|\lambda_0|^2\mathfrak{E} - \bar{\lambda}_0\mathfrak{A} - \lambda_0\mathfrak{A}^* + \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \xi_n) \to 0,$$

also mit Rücksicht $(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^* = \bar{\lambda}_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^*$

$$\Phi((\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*; \xi_n) \to 0; \quad |\xi_n| = 1,$$

so daß die unter (20) stehende erste Zahl[37]) in dem Hauptpunkt $\lambda = \lambda_0$ mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{n}(\mathfrak{C})$ verschwindet und daher $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ in dem Hauptpunkt $\lambda = \lambda_0$ nicht existiert. Damit ist die Konvexitätsregel für den Spezialfall eines Hauptpunktes bewiesen.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ irgendeine normaloide Matrix. Ersetzt man $\mathfrak{A}$ durch $\eta\mathfrak{A}$, so bleibt der normaloide Charakter $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ erhalten, da

$$\mathbf{m}(\eta\mathfrak{A}) = |\eta|\,\mathbf{m}(\mathfrak{A}), \quad \mathbf{r}(\eta\mathfrak{A}) = |\eta|\,\mathbf{r}(\mathfrak{A})$$

gilt, und zwar entsteht $\mathbf{W}(\eta\mathfrak{A})$ aus $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch eine Drehung um den Punkt $\lambda = 0$, wenn $|\eta| = 1$ ist. — Von der translatorischen Transformation läßt sich ebenso behaupten, daß $\mathfrak{A} + l\mathfrak{E}$ normaloid ist, wenn $\mathfrak{A}$ es ist und $|l|$ hinreichend groß gewählt wird; $\mathbf{W}(\mathfrak{A} + l\mathfrak{E})$ entsteht aus $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch eine Verschiebung um den Betrag $|l|$ in der durch $\arg l$ festgelegten Richtung. Die beiden Transformationen

$$\mathfrak{A} \rightrightarrows \eta\mathfrak{A}, \quad |\eta| = 1; \qquad \mathfrak{A} \rightrightarrows \mathfrak{A} + l\mathfrak{E}, \quad |l| > \text{konst.},$$

welchen gegenüber die Eigenschaft (8) invariant ist, mögen als die zulässigen Bewegungen von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden. Bei diesen bleiben die Punktmengen $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ starr verbunden. Offenbar kann man nun zu jedem extremen Punkte P des (stets konvexen) Bereiches $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ eine zulässige Bewegung angeben, welche den Bereich in eine Lage überführt, in welcher dieser einen Hauptpunkt hat, der in die neue Lage von P hineinfällt (die Drehungen sind für die vorliegenden Zwecke entbehrlich). Würde es also eine normaloide Matrix $\mathfrak{A}$ geben, bei welcher nicht alle extremen Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ in dem Spektrum liegen, so würde es auch eine nor-

[37]) Und übrigens, wie aus dem Beweise hervorgeht, auch die zweite.

maloide Matrix geben, der einen außerhalb ihres Spektrums gelegenen Hauptpunkt hat. Folglich gibt es keine normaloide Matrix $\mathfrak{A}$, bei welcher nicht jeder extreme Punkt von $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ in dem Spektrum liegt. Damit ist die Konvexitätsregel bewiesen.

§ 6.

Die unitären Matrizen.

Die Matrix $\mathfrak{U}$ heißt unitär, wenn[38])

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^* = \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}^*\mathfrak{U} = \mathfrak{E} \tag{42}$$

gilt. Es gibt keine unitäre Matrix, die nicht beschränkt ist, aber auch keine, die vollstetig wäre[39]). $\mathfrak{U}$ ist wegen (42) dann und nur dann unitär, wenn $\mathfrak{U}^{-1}$ vorhanden und $= \mathfrak{U}^*$ ist. Mit Rücksicht auf (22), (23) folgt daraus

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{U}) = \frac{1}{\mathfrak{s}(\mathfrak{U}^*)} = \overline{\mathfrak{s}(\mathfrak{U}^*)},$$

so daß $\mathfrak{s}(\mathfrak{U})$ auf dem Rande des Einheitskreises liegt. Man kann dies auch wie folgt einsehen. Da wegen (42) und mit Rücksicht auf die Definition (12) jede unitäre Matrix normal ist, so können wir das Kriterium (21) anwenden. Dieses besagt jetzt, da ja $\mathfrak{n}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*) = \mathfrak{n}(\mathfrak{E}) = 1$ ist, daß λ gewiß außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{U}$ liegt, wenn $|\lambda|^2 + 1 - 2|\lambda|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{U}) > 0$ ausfällt. Nun ist aber wegen (6), (10), (42)

$$(0 \leqq)\ \mathfrak{m}(\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{r}(\mathfrak{U}) = \sqrt{\mathfrak{m}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)} = \sqrt{\mathfrak{m}(\mathfrak{E})} = 1, \tag{43}$$

so daß λ erst recht außerhalb des Spektrums liegt, wenn $|\lambda|^2 + 1 - 2|\lambda| > 0$ gilt. Damit also λ in dem Spektrum liegt, muß $(1 - |\lambda|)^2 \leqq 0$ und daher

---

[38]) Wie das bekannte Beispiel (18) zeigt, sind die beiden Bedingungen (42) voneinander unabhängig.

[39]) Denn der Punkt $\lambda = 0$ liegt in dem Spektrum einer jeden vollstetigen Matrix, so daß sie keine beschränkte Reziproke haben kann (das Produkt einer vollstetigen Matrix in eine beschränkte ist nämlich, wie bekannt, stets vollstetig und kann daher nicht die Einheitsmatrix sein). — Da jede normale vollstetige Matrix unitär auf die Diagonalform gebracht werden kann[16]), so enthält daher das Spektrum jeder *normalen*, von der Nullmatrix verschiedenen vollstetigen Matrix mindestens zwei Punkte, nämlich mindestens einen von dem Nullpunkt verschiedenen Punkt. Ist $\mathfrak{C}$ vollstetig, so gilt für $\mathfrak{E} + \mathfrak{C}$ der Alternativsatz auch dann, wenn $\mathfrak{C}$ nicht normal ist (Hilbert). Mit $\mathfrak{C} = -\lambda^{-1}\mathfrak{A}$ folgt daraus, daß die Alternative bei jedem vollstetigen $\mathfrak{A}$ für $\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ gewiß richtig ist, wenn $\lambda \neq 0$ gewählt wird. Für $\lambda = 0$ ist sie aber im allgemeinen (z. B. in dem normalen Falle bei den „abgeschlossenen“ $\mathfrak{A}$) unrichtig, und zwar bereits dann, wenn man sich auf (nicht normale) „Volterrasche“ vollstetige Matrizen $\mathfrak{A}$ beschränkt, deren Spektrum *nur* den trivialen Punkt $\lambda = 0$ enthält. Vgl. übrigens die Einleitung.

$|\lambda| = 1$ gelten, w. z. b. w. — Da das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ stets in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ liegt (§ 2), der jetzt mindestens eine Zahl von dem Betrag Eins enthält, und da nach der Definition von $\mathbf{m}(\mathfrak{U})$ in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ mindestens eine Zahl von dem Betrag $\mathbf{m}(\mathfrak{U})$ liegt (§ 1), so gilt offenbar $\mathbf{m}(\mathfrak{U}) \geqq 1$, und daher wegen (43) einfach $\mathbf{m}(\mathfrak{U}) = \mathbf{r}(\mathfrak{U}) = 1$, so daß die unitären Matrizen laut Definition (8) normaloid sind. Wir können daher die Konvexitätsregel anwenden. So folgt, da das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$, das stets vorhanden ist, auf dem Rande des Einheitskreises liegt, daß nur die folgenden drei Fälle möglich sind. Entweder besteht $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ aus einem einzigen Punkt, der sodann mit $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ identisch ist; übrigens ist in diesem Falle $\mathfrak{U} = c\mathfrak{E}$, $|c| = 1$. Oder $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ besteht aus zwei Punkten, und $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ ist die diese verbindende Sehne. Drittens ist es möglich, daß $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ mindestens drei Punkte enthält; dann ist $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ derjenige Jordansche Bereich, der begrenzt wird durch die kürzeste[40]) unter den [doppelpunktfreien[41])] Kurven, die durch jeden Punkt des Spektrums hindurchgehen, so daß also der Rand des Wertbereiches von endlich oder abzählbar unendlich vielen Sehnen oder Bögen oder Sehnen *und* Bögen der Einheitskreislinie (eventuell von dieser selbst) gebildet wird. — Da eine Diagonalmatrix unitär ist, wenn alle ihre Diagonalelemente vom Betrage Eins sind, und da das Spektrum einer Diagonalmatrix aus den in der Diagonale liegenden Zahlen und ihren Häufungsstellen besteht, so kann jede auf dem Rande des Einheitskreises gelegene abgeschlossene Punktmenge das Spektrum einer unitären Matrix sein; es wird sich übrigens herausstellen, daß es — im Gegensatz zu den endlichen unitären Matrizen — unitäre Matrizen gibt, die durch keine unitäre Transformation auf die Diagonalform gebracht werden können (Streckenspektrum). — Das Spektrum einer reellen unitären Matrix (das ist eine sogenannte vollständig orthogonale Matrix) ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse; dies [und wesentlich mehr; vgl. übrigens die Schlußbemerkungen von § 8] wird aus der spektralen Zerlegung der Resolvente hervorgehen. Vgl. übrigens (22), (23).

Die beiden Matrizen $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, $\mathfrak{B} = \|b_{pq}\|$ mögen als *voneinander getrennt* bezeichnet werden, wenn ihre Kopplungsformen nur von verschiedenen Variablen x_p abhängen, d. h. wenn folgendes gilt: Ist das Zeigerpaar (p_0, q_0) derart, daß es in der p_0-ten Zeile oder in der q_0-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ mindestens ein Element verschwindet, so verschwinden alle Elemente sowohl in der p_0-ten Zeile als auch in der q_0-ten Spalte von $\mathfrak{B}$; und ist umgekehrt mindestens eine der 2∞ Zahlen $b_{p_0 q}$, $b_{p q_0}$ von Null verschieden, so verschwinden alle 2∞ Zahlen $a_{p_0 q}$, $a_{p q_0}$. Aus dem bei (44a), (44b)

---

[40]) Die Bogenlänge des Randes ist $\leqq 2\pi$.

[41]) Vgl. jedoch F. Levi, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 148ff.

Gesagten einerseits, aus der zu (45) gemachten Bemerkung andererseits wird hervorgehen, daß man jede unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ mittels einer unitären Matrix $\mathfrak{V}$ in eine andere transformieren kann, die in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens drei von Null verschiedene Elemente enthält. Eine Matrix $\mathfrak{A}$ mit der unitären Matrix $\mathfrak{V}$ zu transformieren, bedeutet dabei den Ersatz von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{V}^* = \mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{V}^{-1}$. Da die unitären Matrizen offenbar eine Gruppe bilden, so ist der unitäre Charakter unitären Transformationen gegenüber invariant.

Durch Vergleich der Ergebnisse der Dissertation von Herrn Hellinger mit denjenigen, die wir in § 8 erhalten werden, ergibt sich nun folgendes: Zu jeder unitären Matrix $\mathfrak{U}$ gibt es eine unitäre Matrix $\mathfrak{V}$ derart, daß

$$\mathfrak{V}\mathfrak{U}\mathfrak{V}^{-1} = \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W} \tag{44a}$$

gilt, wobei $\mathfrak{W}_0$ entweder die Nullmatrix oder eine unitäre Diagonalmatrix $(= \| e^{i\lambda_p}\delta_{pq} \|,\ 0 \leqq \lambda_p < 2\pi)$, und $\mathfrak{W}$ entweder die Nullmatrix oder eine von $\mathfrak{W}_0$ getrennte unitäre Matrix ist, die in dem letzteren Falle kein Punktspektrum hat[42]) und eine Zerlegung

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_2 + \dots \tag{44b}$$

in die Summe von höchstens abzählbar vielen, voneinander paarweise getrennten unitären Matrizen gestattet, die kein Punktspektrum und ein (in einem der Dissertation von Herrn Hellinger entsprechenden Sinne) *einfaches* Streckenspektrum haben; diese Zerlegung ist nicht eindeutig bestimmt, doch kann man das Hellinger-Hahnsche Äquivalenzkriterium[43]) auf die unitären Matrizen ohne Schwierigkeit ebenso übertragen, wie die Theorie der Jacobischen Matrizen[29]), welchen jetzt die unter (45) stehenden entsprechen.

Es handelt sich dabei um folgendes. Bezeichnet $\varrho(\mu)$ eine für $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$ erklärte, reellwertige, monoton nicht abnehmende, von links stetige Funktion, die keine Treppenfunktion ist, d. h. mindestens abzählbar unendlich viele Nichtkonstanzstellen hat, so kann man nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsprozeß auf genau eine Weise zu jedem $n \geqq 1$ ein trigonometrisches „ganzes" Polynom

$$\chi_n(\mu) = \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m^{(n)} e^{im\mu}; \qquad \gamma_{n-1}^{(n)} > 0,$$

---

[42]) D. h. es ist nicht möglich, aus der Matrix auch nur irgendein „Kreuz" $p = p_0$, $q = q_0$ „abzutrennen" (vgl. oben), also erst recht ist es nicht möglich, sie unitär in eine Diagonalmatrix zu transformieren.

[43]) E. Hellinger, Diss. Göttingen 1907; H. Hahn, Monatshefte f. Math. 23 (1912), S. 161—224.

wobei also $m \geqq 0$ ist, derart bestimmen, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_p(\mu)\,\bar{\chi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu) = \delta_{pq}, \qquad p, q = 1, 2, \ldots,$$

also für ein beliebiges trigonometrisches ganzes Polynom

$$\theta_k(\mu) = \sum_{m=0}^{k-1} C_m e^{im\mu}; \qquad C_{k-1} \neq 0$$

offenbar

$$\int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\chi_n(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\bar{\chi}_n(\mu)\,d\varrho(\mu) = 0, \qquad k \neq n;$$

$$\int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\chi_k(\mu)\,d\varrho(\mu) \neq 0, \qquad \int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\bar{\chi}_k(\mu)\,d\varrho(\mu) \neq 0,$$

und daher insbesondere in der Matrix

$$(45) \qquad \mathfrak{Z} = \|z_{pq}\|, \qquad z_{pq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\mu}\,\chi_p(\mu)\,\bar{\chi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu)$$

ersichtlich

$$z_{pq} = 0, \quad |p-q| > 1; \qquad z_{pq} \neq 0, \quad |p-q| = 1; \qquad z_{pp} = \text{ oder } \neq 0$$

gilt. Diese Matrix ist unitär (§ 7) und kann außer einem Punktspektrum nur ein einfaches Streckenspektrum haben; umgekehrt läßt sich jede unitäre Matrix, deren Spektrum etwa ein einfaches Streckenspektrum ist, mittels einer unitären Transformation in eine Matrix $\mathfrak{Z}$ überführen, wobei $\varrho(\mu)$ stetig, jedoch nicht eindeutig bestimmt ist[44]). —

Es sei $\mathfrak{A}$ irgendeine beschränkte Matrix. Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(\mathfrak{A}^n; \mathfrak{x})}{n!}$$

mit Rücksicht auf die aus (3) folgende Ungleichung $\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^n) \leqq (\mathfrak{r}(\mathfrak{A}))^n$ für alle normierten $\mathfrak{x}$ sogar absolut und gleichmäßig konvergiert, so können wir eindeutig eine Matrix

$$(46) \qquad e^{\mathfrak{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^n}{n!}$$

einführen, die wegen $\mathfrak{r}(e^{\mathfrak{A}}) \leqq e^{\mathfrak{r}(\mathfrak{A})} < +\infty$ beschränkt ist. Man schließt

[44]) Wir werden in § 8 jeder unitären Matrix $\mathfrak{U}$ mittels (72) eine Spektralmatrix zuordnen. — Berechnet man auf bekannte Weise (unter Benutzung der Parsevalschen Vollständigkeitsrelation) die Potenzen der unter (45) stehenden „unitären Jacobischen Matrix", so folgt aus (72), daß die Spektralmatrix von (45) sich aus $d\tau_{pq} = \chi_p \bar{\chi}_q\, d\varrho$ berechnet. — Über die Beziehungen der obigen zu den polynomischen Untersuchungen von Herrn Szegö vgl. S. 281 weiter unten.

aus (46), ebenso wie bei der gewöhnlichen Exponentialreihe, daß

$$e^{\mathfrak{A}+2\pi i m\mathfrak{E}} = e^{\mathfrak{A}} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

ferner $e^{\pi i\mathfrak{E}} = -\mathfrak{E}$ und offenbar $e^{\mathfrak{O}} = \mathfrak{E}$ gilt, wenn $\mathfrak{O}$ die Nullmatrix $\|0\|$ bezeichnet. Da die Binomialregel

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \mathfrak{A}^{n-m}\mathfrak{B}^m$$

bereits für $n = 2$ nur dann richtig ist, wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist, so kann

$$e^{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{A}}e^{\mathfrak{B}}, \tag{47}$$

wobei rechterhand Matrizenmultiplikation gemeint ist, mittels (46) nur dann — und dann offenbar — verifiziert werden, wenn die beiden beschränkten Matrizen der Bedingung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ genügen. Ohne diese Annahme kann (47) unrichtig sein (denn es gibt nicht vertauschbare Paare unitärer Matrizen, und jede unitäre Matrix kann, wie wir sehen werden, in der Gestalt $e^{\mathfrak{A}}$ dargestellt werden). — Aus $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$ folgt, wie man sich leicht überzeugt, daß für die Matrix $\mathfrak{A} = i\mathfrak{H}$ bei jedem $n \geqq 0$ die Beziehung $(-\mathfrak{A})^n = (\mathfrak{A}^*)^n$ gilt, und daher $e^{-\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{A}^*}$ wird. Nun ist $\mathfrak{A}$ wegen $\mathfrak{A} = i\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}^* = -i\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{A}^*$ gewiß vertauschbar, so daß aus (47) wegen $e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{O}} = \mathfrak{E}$ offenbar $e^{\mathfrak{A}}e^{\mathfrak{A}^*} = e^{\mathfrak{A}^*}e^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$ folgt. Wegen $e^{\mathfrak{A}^*} = (e^{\mathfrak{A}})^*$ können wir dies auch so ausdrücken: ist die beschränkte Matrix $\mathfrak{H}$ Hermitesch, so ist $e^{i\mathfrak{H}}$ unitär. Daß auch die Umkehrung gilt (§ 8), daß nämlich jede unitäre Matrix mittels einer passenden beschränkten Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ in der Gestalt $e^{i\mathfrak{H}}$ dargestellt werden kann, erweist sich bei endlichen Matrizen nach einer unitären Transformation auf die Diagonale als eine Trivialität, bei den unendlichen Matrizen aber, wo diese Schlußweise mit Rücksicht auf die Streckenspektra (und da die Abschnitte nicht unitär zu sein brauchen) wesentlich versagt, scheint sehr tief zu liegen und erfordert einen unvergleichbar feineren Apparat, als unser bisheriger war.

In § 7 werden wir bei jeder beschränkten Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ zu jeder, etwa stetigen, für alle $\mu\,(\gtrless 0)$ erklärten, nicht notwendig reellwertigen Funktion $F(\mu)$ eindeutig eine beschränkte Matrix $F(\mathfrak{H})$ derart zuordnen, daß die Zuordnung die folgenden Eigenschaften hat: 1. sie ordnet dem Produkte $F_1(\mu)\,F_2(\mu)$ zweier Funktionen das Matrizenprodukt $F_1(\mathfrak{H})\,F_2(\mathfrak{H})$ zu, so daß $F_1(\mathfrak{H})$ mit $F_2(\mathfrak{H})$ offenbar vertauschbar ist; 2. sie ordnet der zu $F(\mu)$ konjugierten Funktion die begleitende Matrix von $F(\mathfrak{H})$ zu, so daß $F(\mathfrak{H})$ mit Rücksicht auf 1. normal ist; 3. die Funktion $F(\mu) \equiv 1$ läßt der Matrix $\mathfrak{H}$ die Einheitsmatrix entsprechen; 4. das Spektrum von

$F(\mathfrak{H})$ besteht aus derjenigen Punktmenge in der komplexen F-Ebene, auf welche das auf der reellen μ-Gerade gelegene Spektrum von $\mathfrak{H}$ vermöge der Beziehung $F = F(\mu)$ abgebildet wird; 5. die Werte, welche $F(\mu)$ außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{H}$ annimmt, sind für die Zuordnung im wesentlichen belanglos. — Damit also $F(\mathfrak{H})$ unitär ist, muß, da das Spektrum von $F(\mathfrak{H})$ nur auf dem Rande des Einheitskreises liegen kann, $|F(\mu)| \equiv 1$ sein. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so gilt $\overline{F}(\mu)\, F(\mu) \equiv 1$, wofür mit Rücksicht auf 1., 2., 3. auch

$$(F(\mathfrak{H}))^* (F(\mathfrak{H})) = (F(\mathfrak{H}))\,(F(\mathfrak{H}))^* = \mathfrak{E}$$

geschrieben werden kann, so daß $F(\mathfrak{H})$ unitär ist. Es ergibt sich aber so nicht einmal, daß jede unitäre Matrix in der Gestalt $F(\mathfrak{H})$ geschrieben werden kann, wenn man über $\mathfrak{H}\,(= \mathfrak{H}^*)$ und $F(\mu)$ unter Berücksichtigung der notwendigen Bedingung $|F(\mu)| \equiv 1$ passend verfügt. — Nun werden wir zeigen, daß man einfach mit der Funktion $F(\mu) = e^{i\mu}$ stets auskommt, und wir werden sogar eine *ein*eindeutige Korrespondenz herstellen.

Der Übergang von den unitären Matrizen zu den Hermiteschen (oder von dem trigonometrischen Momentenproblem zu dem gewöhnlichen) beruht dabei auf einer Laplaceschen Transformation[45]), während andererseits der Zusammenhang der unitären Matrizen mit dem trigonometrischen Momentenproblem durch einen Vergleich des komplex geschriebenen Poissonschen Integrals[46]) mit der (noch nicht alle unitären Matrizen umfassenden) Cayley-Hermiteschen Formel[47]) nahegelegt ist. Die Durchführung dieses Ansatzes erfolgt in § 8. Das Schlußergebnis könnte auf eine geläufige Weise[48]) im Rahmen der Lieschen Theorie veranschaulicht werden.

Es handelt sich dabei um folgendes[33]). Es sei $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ eine beschränkte Hermitesche Matrix und $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ ihre Spektralmatrix (vgl. § 7). Dann ist die allgemeine Lösung des Differentialsystems $\dot{\mathfrak{y}}_t = \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_t$, d. h. von

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, y_q(t); \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

---

[45]) A. Wintner, Annalen d. Phys. **81** (1926), S. 577ff., S. 854; vgl. G. Doetsch, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. **36** (1927), S. 24. Hierher gehört auch eine interessante Bemerkung von Herrn Hardy über den Zusammenhang der Fourierschen Umkehrformel mit den unter (48) stehenden Resolventenintegralen, Messenger of Math. **54** (1924), S. 22.

[46]) G. Herglotz, loc. cit. [31]), Formel (60). — Vgl. E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Geometrie. Zweites Heft, herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke, Teubner 1913, S. 94ff. — Siehe auch I. Schur, l. c. [56]), insb. § 8 [zu § 1 vgl. [29])].

[47]) Siehe insb. G. Frobenius, Journ. f. Math. **84** (1878), S. 37–38.

[48]) Vgl. G. Kowalewski, Wiener Sitzungsberichte **120** (1911), S. 103ff.; H. Weyl, Zeitschr. f. Phys. **46** (1927), S. 21ff.

gegeben durch $\mathfrak{y}_t = e^{\mathfrak{A}t}\mathfrak{y}_0$ oder

$$y_p(t) = \sum_{q=1}^{\infty} y_q(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu t} d\sigma_{pq}(\mu); \quad p = 1, 2, \ldots,$$

wobei nur $|\mathfrak{y}_0|^2 = \sum_{q=1}^{\infty} |y_q(0)|^2 < +\infty$ vorausgesetzt ist. Für t sind beliebige, auch komplexe Werte zulässig, und es gilt $|\mathfrak{y}_t|^2 < +\infty$ bei jedem t. Um aus

$$e^{\mathfrak{A}t} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu t} d\sigma_{pq}(\mu) \right\|$$

die unitären Matrizen zu erhalten, haben wir t auf der imaginären Achse zu wählen. — Ebenso ist die allgemeine Lösung auch des unendlichen Differentialsystems $\ddot{\mathfrak{x}}_t = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_t$, d. h. von $\ddot{x}_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q$, durch Fourierintegrale darstellbar:

$$(*) \quad x_p(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(x_p(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) + \dot{x}_q(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-\mu} \sin \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) \right),$$

wobei $|\mathfrak{x}_0| < +\infty$, $|\dot{\mathfrak{x}}_0| < +\infty$ vorausgesetzt ist. Aus (*) ist es ersichtlich, daß das schwingende System nur solche „ebenen Wellen“

$$\left\| \cos \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) \right\|, \quad \left\| \sqrt{-\mu} \sin \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) \right\|$$

emittieren kann, deren μ in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ liegt (vgl. § 7). Diese Wellen, aus welchen sich die allgemeine Lösung, nämlich (*), gemäß dem Superpositionsprinzip aufbaut, liefern ebenfalls Lösungen von (*): sie entstehen aus den Hellingerschen Differentiallösungen. Die Wellenlösungen, die aus den Hellingerschen Differentiallösungen durch Umkehrung einer Laplaceschen Transformation entstehen, sind freilich nicht quadratisch konvergent. Sie sind für das Anfangsproblem erst nach ihrer („richtig normierten“) Superponierung vom Belang.

§ 7.

Das allgemeine Abbildungsprinzip.

Es soll zunächst an die Grundtatsachen der Hilbertschen Theorie der beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{H} = \|h_{pq}\|$ erinnert werden[49]). Bezeichnet $\|R_{pq}(\lambda)\|$ die Resolvente $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{H})^{-1}$ von $\mathfrak{H}$, so gibt es eine Matrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ von für $-\infty < \mu < +\infty$ erklärten Funktionen von

[49]) Vgl. loc. cit. [3]), S. 1575 ff., oder mein unter [27]) zitiertes Buch.

beschränkter Schwankung derart, daß (außerhalb des Spektrums)

$$R_{pq}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\mu - \lambda} \tag{48}$$

gilt, und zwar ist mit Rücksicht auf eine von Stieltjes herrührende Umkehrformel die Funktion $\sigma_{pq}(\mu)$ durch $R_{pq}(\lambda)$, also $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ durch $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt, wenn man die normierenden Nebenbedingungen

$$\sigma_{pq}(\mu) = \sigma_{pq}(\mu - 0), \qquad \sigma_{pq}(-\infty) = 0 \tag{49}$$

vorschreibt; $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ heißt Spektralmatrix von $\mathfrak{H}$; sie ist beschränkt. Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta f(\mu) = f(\mu + \Delta\mu) - f(\mu), \qquad \Delta\mu > 0,$$

ferner

$$\Phi(\mu; \mathfrak{x}) = \Phi(\|\sigma_{pq}(\mu)\|; \mathfrak{x}) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sigma_{pq}(\mu)\, x_p \bar{x}_q, \tag{50}$$

so gilt

$$\Delta\Phi(\mu; \mathfrak{x}) \geqq 0, \tag{51}$$

also z. B.

$$|\Delta\sigma_{pq}|^2 \leqq (\Delta\sigma_{pp})(\Delta\sigma_{qq}), \qquad \Delta\sigma_{pp} \geqq 0, \tag{52}$$

da $\|\Delta\sigma_{pq}(\mu)\|$ wegen (51) eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix ist. Mit Rücksicht auf (49) gilt dies auch von $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$, so daß

$$\sigma_{pq}(\mu) = \bar{\sigma}_{qp}(\mu) \tag{53}$$

wird. Man hat

$$\lim_{\mu=-\infty} \Phi(\mu; \mathfrak{x}) \equiv 0, \qquad \lim_{\mu=+\infty} \Phi(\mu; \mathfrak{x}) \equiv |\mathfrak{x}|^2. \tag{54}$$

Das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$ besteht aus denjenigen Zahlen μ_0, zu welchen es kein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß in dem Intervall $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ die Funktion $\Phi(\mu; \mathfrak{x})$ bei jedem $\mathfrak{x}$, oder, was — wie sich leicht zeigen läßt — auf dasselbe hinausläuft, die Funktion $\sigma_{pq}(\mu)$ bei jedem p und q konstant ist [das sogenannte Punktspektrum besteht aus denjenigen (eventuellen) Punkten des Spektrums, an welchen mindestens ein σ einen Sprung erleidet; die Zahl μ liegt dann und nur dann in dem Punktspektrum, wenn die zu $\mu\mathfrak{E} - \mathfrak{H}$ gehörigen homogenen Gleichungen eine Lösung mit der absoluten Quadratsumme 1 zulassen]. Man hat daher wegen (54)

$$\sigma_{pq}(\mu) \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{pq}(\mu) \equiv \delta_{pq}, \tag{55}$$

je nachdem μ ganz links oder ganz rechts von $\mathbf{T}(\mathfrak{H}) = \mathbf{W}(\mathfrak{H})$ liegt. Mit

Rücksicht auf (25), (26), (48) folgt daraus nach Entwicklung in (48)

$$\mathfrak{H}^n = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^n d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{56}$$

also, da

$$F_1(\mathfrak{H})\, F_2(\mathfrak{H}) = F_3(\mathfrak{H}); \qquad F_3(\mu) = F_1(\mu)\, F_2(\mu) \tag{57}$$

für Polynome $F_\nu(\mu) = \sum_{j=0}^{k} c_j^{(\nu)} \mu^j$ trivial ist, auch

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \cdot \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mu)\, F_2(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\|,$$

wenn die F Polynome sind. Ist nun $F(\mu)$ eine etwa für alle μ erklärte und der Einfachheit halber stetige Funktion, so können wir, da die Nichtkonstanzstellen der σ_{pq} ganz im Endlichen, nämlich in $\mathsf{T}(\mathfrak{H}) = \mathsf{W}(\mathfrak{H})$ liegen, in Verallgemeinerung von (56) per definitionem eine Matrix

$$F(\mathfrak{H}) = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \tag{59}$$

einführen. Ihre Kopplungsform kann mit Rücksicht auf den Hellyschen Satz über gliedweise Integration unter Beachtung von (2), (50), (51), (54) in der Gestalt

$$\Phi(F(\mathfrak{H}); \mathfrak{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, d\Phi(\mu; \mathfrak{x}) \tag{60}$$

geschrieben werden, woraus wegen (51), (54) folgt, daß $\mathsf{m}(F(\mathfrak{H})) \leqq$ ist als das Maximum von $|F(\mu)|$ [auf der Punktmenge $\mathsf{W}(\mathfrak{H})$ oder auf $\mathsf{S}(\mathfrak{H})$]. Mithin ist $F(\mathfrak{H})$ beschränkt. Sind nun $F_1(\mu)$ und $F_2(\mu)$ stetige Funktionen, so kann man zunächst F_1 und sodann F_2 nach dem Weierstraßschen Satz mittels Polynome derart approximieren, daß sich die Richtigkeit von (58) für alle stetige F ergibt; denn die Nichtkonstanzstellen der σ_{pq} liegen ganz im Endlichen. Folglich gilt (57) allgemein, und wegen (48), (59) ersichtlich auch

$$F(\mathfrak{E}) = F(1)\,\mathfrak{E}, \qquad F(c\,\mathfrak{H}) = c\,F(\mathfrak{H}); \tag{61}$$

$$F_1(\mathfrak{H}) + F_2(\mathfrak{H}) = F_3(\mathfrak{H}), \qquad F_3(\mu) = F_1(\mu) + F_2(\mu).$$

Die konjugierte Matrix $\overline{F(\mathfrak{H})}$ ist offenbar gleich $\overline{F}(\overline{\mathfrak{H}})$. Wegen $\mathfrak{A}^* = \overline{\mathfrak{A}}'$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$ folgt daraus, daß die begleitende Matrix

$$(F(\mathfrak{H}))^* = \overline{F}(\mathfrak{H}) \tag{62}$$

ist, wobei $\overline{F}(\mathfrak{H})$ die zu der Funktion $\overline{F}(\mu)$ gehörige „Bildmatrix" von $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Aus (62) ist ersichtlich, daß reellwertige Abbildungsfunktionen F jede Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ in eine ebensolche überführen. Es ist nun für

uns der springende Punkt, daß wir bei der Definition (59) offenbar auch nicht reellwertige Abbildungsfunktionen heranziehen und dadurch den Bereich der Hermiteschen Matrizen verlassen können.

Es bezeichne $\Omega(F(\mu))$ die Klasse der Matrizen, die in der Gestalt $F(\mathfrak{H})$ geschrieben werden können, wobei $\mathfrak{H}$ eine passend wählbare Hermitesche Matrix bedeutet. Wegen (53), (56) ist eine Matrix dann und nur dann Hermitesch, wenn sie der Klasse $\Omega(\mu)$ angehört, so daß also $\Omega(F(\mu))$ das durch die Funktion F entworfene Bild von $\Omega(\mu)$ ist. Wir werden sehen, daß eine Matrix dann und nur dann unitär ist, wenn sie in $\Omega(e^{i\mu})$ liegt (der erste Teil des Satzes ist, wie wir wissen, trivial). $\Omega(e^{\mu})$ ist die Klasse der positiven, $\Omega(\mu^2)$ die Klasse der nichtnegativ definiten Hermiteschen Matrizen (vgl. weiter unten). Die Beantwortung der Frage, wann eine Matrix in mindestens einem $\Omega(F(\mu))$ liegt, führt zu dem am Schluß der Einleitung formulierten Momentenproblem. So viel ist, wie erwähnt, gewiß, daß die $\Omega(F(\mu))$ nur normale Matrizen enthalten. Die durch ein F entworfene Abbildung von $\Omega(\mu)$ braucht nicht schlicht zu sein, vgl. § 8. Auch kann eine und dieselbe Matrix zwei verschiedenen $\Omega(F(\mu))$ angehören, da z. B. (34) Hermitesch und zugleich unitär ist. Die Klasse $\Omega(1)$ enthält nur die Matrix $\mathfrak{E}$.

Bezeichnet $\mathsf{t}(F)$ die konvexe Hülle derjenigen Punktmenge $\mathsf{s}(F)$ der komplexen Ebene, auf welche das auf der μ-Gerade gelegene Spektrum $\mathsf{S}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ vermöge der Beziehung $F = F(\mu)$ abgebildet wird, so liegt der Wertbereich $\mathsf{W}(F(\mathfrak{H}))$ der Matrix $F(\mathfrak{H})$ mit Rücksicht auf (51), (54), (60) und nach einem bekannten Schwerpunktsatz gewiß in $\mathsf{t}(F)$. Wir werden nun sehen, daß das Bild $\mathsf{s}(F)$ des Spektrums von $\mathfrak{H}$ identisch ist mit dem Spektrum $\mathsf{S}(F(\mathfrak{H}))$ des Bildes $F(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$. Folglich gilt auch $\mathsf{t}(F) = \mathsf{T}(F(\mathfrak{H}))$, so daß $\mathsf{W}(F(\mathfrak{H}))$ in $\mathsf{T}(F(\mathfrak{H}))$ liegt. Da aber die konvexe Hülle des Spektrums bei jeder Matrix in dem Wertbereiche liegt, so muß $\mathsf{W}(F(\mathfrak{H})) = \mathsf{T}(F(\mathfrak{H}))$ sein. Die Konvexitätsregel gilt also für jede in der Gestalt $F(\mathfrak{H})$ darstellbare Matrix (jedoch, wie das Beispiel (18) gezeigt hat, auch für weitere Matrizen; vgl. auch den Anhang).

Ist $F(\mu) \geqq 0$, so ist $\Phi(F(\mathfrak{H}); \mathfrak{x})$ wegen (51), (60) eine nichtnegativ definite Hermitesche Form. Aus (60) kann man leicht entnehmen, daß die untere Grenze von $\Phi(F(\mathfrak{H}); \mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ gleich ist dem Minimum $\mathsf{N}(F)$ von $F(\mu)$ auf der Punktmenge $\mathsf{S}(\mathfrak{H})$ der μ-Gerade:

$$\mathsf{n}(F(\mathfrak{H})) = \mathsf{N}(F), \quad \text{wenn} \quad F \geqq 0.$$

Auf den Beweis, der entweder mittels der Spektralmatrix, oder auf Grund der Resolvente geführt werden kann, will ich hier nicht im einzelnen eingehen, da ich in einer mit der vorliegenden gleichzeitig erscheinenden Arbeit über fastperiodische Matrizen auch sonst eine wesentlich feinere derartige Betrachtung durchführen muß. Für den erwähnten unitären Fall gibt § 8

eine explizite Begründung. — Es sei nun $F(\mu)$ beliebig, also nicht notwendig reellwertig, und es sei λ irgendeine Zahl. Die Funktion $|\lambda - F(\mu)|^2$ ist $\geqq 0$, also gilt

$$\mathfrak{n}(|\lambda - F|^2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{N}(|\lambda - F|^2),$$

unter $|\lambda - F|^2(\mathfrak{H})$ das durch die Funktion

$$|\lambda - F(\mu)|^2 = (\lambda - F(\mu))\,\overline{(\lambda - F(\mu))}$$

entworfene Bild von $\mathfrak{H}$ verstanden. Dieses Bild ist aber wegen (57), (61), (62) offenbar die Matrix

$$(\lambda\mathfrak{E} - F(\mathfrak{H}))\,(\lambda\mathfrak{E} - F(\mathfrak{H}))^*,$$

mithin gilt

$$\mathfrak{n}((\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\,(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*) = \mathfrak{N}(|\lambda - F|^2),$$

wobei $\mathfrak{A} = F(\mathfrak{H})$ normal ist, also die beiden unter (20) stehenden Zahlen gleich sind. Wir wissen aber, daß das Verschwinden mindestens einer der beiden Zahlen (20) notwendig und hinreichend ist dafür, daß λ dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ angehört. Folglich liegt λ dann und nur dann in $\mathfrak{S}(F(\mathfrak{H}))$, wenn $\mathfrak{N}(|\lambda - F|^2)$ verschwindet, d. h. wenn es einen Punkt μ auf $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ gibt, für welchen $|\lambda - F(\mu)|^2 = 0$ ist, m. a. W., wenn λ in $\mathfrak{s}(F)$ liegt. Mithin ist $\mathfrak{s}(F) = \mathfrak{S}(F(\mathfrak{H}))$, w. z. b. w.

Übrigens gilt, wie aus (57), (61), (62), (59) unmittelbar folgt,

$$(48)' \qquad (\lambda\mathfrak{E} - F(\mathfrak{H}))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\lambda - F(\mu)} \right\|,$$

woraus ersichtlich ist, daß bei Bildmatrizen die in § 3 erwähnte Überkonvergenz der Neumann-Hilbschen Reihen ausgeschlossen ist.

Die einfachste Zuordnung (59) erhält man bekanntlich dadurch, daß man in (59)

$$(45)' \qquad d\sigma_{pq}(\mu) = \psi_p(\mu)\,\overline{\psi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu), \quad d\varrho(\mu) \geqq 0$$

setzt, wo $\{\psi_n(\mu)\}$ ein gemäß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(\mu)\,\overline{\psi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu) = \delta_{pq}$$

normiertes und in dem Sinne vollständiges Orthogonalsystem bezeichnet, daß die Parsevalsche Relation für jede stetige Funktion gilt[17]).

* * *

Wesentlich einfacher als die unitäre Abbildung $F(\mathfrak{H}) = e^{i\mathfrak{H}}$ ist die zu $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{H}\mathfrak{x}$ für $t \gtrless 0$ gehörige: $F(\mathfrak{H}) = e^{\mathfrak{H}}$, die der Behandlung des unitären Falles vorausgeschickt werden möge. Man wird so zu dem „Hauptzweig des Logarithmus“ der beschränkten positiv definiten Matrizen geführt, der

unmittelbar gestattet, das sich auf „zyklische“ Matrizen beziehende Born-Kármánsche Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen (Toeplitzsches Trägheitsgesetz) sinngemäß auf beliebige Matrizen zu übertragen. Durch $\mathfrak{H}$ soll, wie früher, eine beliebige beschränkte Hermitesche Matrix bezeichnet werden. Ist $\mathfrak{H}$ nichtnegativ definit und derart, daß $\mathfrak{H}^{-1}$ existiert, d. h. der Nullpunkt außerhalb des Spektrums, oder, was dasselbe ist, das Spektrum oder der Wertevorrat der Kopplungsform ($|\xi|=1$) ganz im Innern der positiven Halbachse liegt, so heißt $\mathfrak{H}$ positiv definit und soll auch durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden. — Wird eine beschränkte Matrix $\mathfrak{R}$ rekursiv genannt, wenn $\mathfrak{R}^{-1}$ existiert und $\mathfrak{R}$ derart ist, daß alle oberhalb der Diagonale gelegenen Elemente verschwinden („Dreiecksmatrix“), so kann ein Jacobi-Toeplitzsches Ergebnis[22]) wie folgt ausgesprochen werden: Jede positiv definite Matrix $\mathfrak{P}$ läßt sich mittels einer passend zu wählenden rekursiven Matrix $\mathfrak{R}$ in der Gestalt $\mathfrak{P}=\mathfrak{R}\mathfrak{R}^*$ darstellen. Ist umgekehrt $\mathfrak{C}$ irgendeine beschränkte Matrix, für welche $\mathfrak{C}^{-1}$ existiert, so ist die Matrix $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ wegen (16) nichtnegativ definit, also Hermitesch, sie läßt ferner nach den Formalsätzen eine Reziproke ($=\mathfrak{C}^{-1*}\mathfrak{C}^{-1}$) zu, ist also positiv definit. Die Jacobi-Toeplitzsche Produktzerlegung kann daher als eine Parameterdarstellung der Mannigfaltigkeit der Matrizen $\mathfrak{P}$ gedeutet werden [ein „Phasenfaktor“ bleibt dabei ebenso unbestimmt, wie bei dem äquivalenten E. Schmidtschen Prozeß: die Abbildung der $\mathfrak{R}$ auf die $\mathfrak{P}$ ist eindeutig, aber nicht eineindeutig]. Im nachstehenden wird es sich um eine andere Parameterdarstellung derselben Mannigfaltigkeit handeln.

I. Es sei zunächst irgendeine beschränkte Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ mit der Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ gegeben. Wegen (59) und mit Rücksicht auf $(e^{\mathfrak{H}})^n=e^{n\mathfrak{H}}$ gilt offenbar

$$(E(\mathfrak{H}))^n=\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{n\mu}\,d\sigma_{pq}(\mu)\right\| \qquad (n=0,1,\ldots),$$

wenn $E(\mathfrak{H})=e^{\mathfrak{H}}$ gesetzt wird. Für die Resolvente der beschränkten Hermiteschen Matrix $E(\mathfrak{H})$ folgt aus (48)′, S. 265 die Integraldarstellung

$$(\lambda\mathfrak{E}-E(\mathfrak{H}))^{-1}=\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\lambda-e^{\mu}}\right\|=\left\|\int_{0}^{+\infty}\frac{d\sigma_{pq}(\log\mu)}{\lambda-\mu}\right\|,$$

so daß sich die Spektralmatrix $\|\pi_{pq}(\mu)\|$ von $E(\mathfrak{H})$ mit Rücksicht auf den bei (48), S. 262 erwähnten Stieltjesschen Eindeutigkeitssatz aus

$$\pi_{pq}(\mu)=\int_{0}^{\mu}d\sigma_{pq}(\log\nu),\quad \mu\geqq 0;\qquad \pi_{pq}(\mu)\equiv 0,\quad \mu\leqq 0$$

bestimmt und daher, da die Sprungstellen der $\pi_{pq}(\mu)$ auf der nichtnegativen Halbachse liegen und $(E(\mathfrak{H}))^{-1}=E(-\mathfrak{H})$ existiert, $E(\mathfrak{H})$ positiv definit sein muß.

II. Es sei jetzt umgekehrt eine positiv definite Hermitesche Matrix $\mathfrak{P}$ mit der Spektralmatrix $\|\pi_{pq}(\mu)\|$ gegeben. Da das Spektrum im Innern der positiven Halbachse liegt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\pi_{pq}(\mu) \equiv 0$ ist für $-\infty < \mu \leqq \varepsilon$. Da die (reelle) Funktion $F(\mu) = \log \mu$ für $\mu \geqq \varepsilon$ stetig ist, so können wir also mit Rücksicht auf das bei (59) Gesagte eine beschränkte Hermitesche Matrix

$$\log \mathfrak{P} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \log \mu \, d\pi_{pq}(\mu) \right\| \qquad (\log \mu \lesseqgtr 0, \ \mu \gtreqless \varepsilon)$$

definieren, deren Resolvente sich mit Rücksicht auf (48)′, S. 265 zu

$$(\lambda \mathfrak{E} - \log \mathfrak{P})^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\pi_{pq}(\mu)}{\lambda - \log \mu} \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\pi_{pq}(e^{\mu})}{\lambda - \mu} \right\|,$$

und daher die Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ von $\log \mathfrak{P}$ zu

$$\sigma_{pq}(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} d\pi_{pq}(e^{\nu})$$

berechnet (von den Sprungstellen können wir in diesem Paragraph absehen).

Der Vergleich von I. mit II. ergibt nun unter zweimal wiederholter Beachtung von (59) (vgl. eine analoge Schlußweise in § 8), daß die Mannigfaltigkeit aller positiv definiten beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{P}$ auf die Mannigfaltigkeit aller beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{H}$ durch die Abbildung $\mathfrak{P} = E(\mathfrak{H})$ *eineindeutig* bezogen wird; und zwar ist dabei $\mathfrak{H} = \log \mathfrak{P}$ die inverse Abbildung. —

Analog erkennt man, daß die Spektralmatrix $\|\varrho_{pq}(\mu)\|$ von $\mathfrak{P}^{-1}$ aus der Spektralmatrix $\|\pi_{pq}(\mu)\|$ von $\mathfrak{P}$ in den auf der Halbachse $\mu > 0$ gelegenen Stetigkeitsstellen μ sich aus

$$\varrho_{pq}(\mu) = \int_{\frac{1}{\mu}} \frac{d\pi_{pq}(\nu)}{\nu^2}$$

bestimmt [so daß

$$\varrho_{pq}\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\int^{\mu} \frac{d\pi_{pq}(\nu)}{\nu^2}$$

ist], während für $-\infty < \mu < \frac{1}{\varepsilon}$ (> 0)

$$\varrho_{pq}(\mu) \equiv 0$$

sein muß. Um dies einzusehen, braucht man nur die vorangehende elementare Überlegung mit der Abbildungsfunktion $F(\mu) = \mu^{\delta}$ vorzunehmen ($\delta \gtreqless 0$, hier $\delta = -1$).

§ 8.

Spektraltheorie der unitären Matrizen.

Zur Illustration der vorstehenden Skizze soll nun der interessanteste Spezialfall $F(\mu) = e^{i\mu}$ des näheren durchgerechnet werden. Das Korrespondenzprinzip liefert so die restlose Übertragung der Hilbert-Hellingerschen Theorie der Hermiteschen Formen auf unitäre Matrizen. Bei der Begründung hat das Carathéodory-Toeplitzsche Problem dieselbe Rolle, wie bekanntlich (vgl. loc. cit. [3]), Fußnote [546])) die Kettenbruchtheorie in dem Hermiteschen Fall. Z. B. die Elemente der Resolvente haben jetzt nicht die Gestalt (48) der erzeugenden Funktion eines assoziierten Kettenbruches, sondern ihr Kern ist einer der beiden Partialbrüche des Poissonschen Kernes. — Schlägt man bei den unitären Matrizen den von Hilbert in dem Hermiteschen Fall gefolgten Weg der Abschnitte ein, so stößt man sofort auf die Schwierigkeit, daß es unitäre Matrizen gibt, deren kein Abschnitt unitär ist. So ist die direkte Stellung eines Momentenproblems für unsere Zwecke viel wesentlicher als in dem Hermiteschen Fall.

Es handelt sich dabei um das trigonometrische Momentenproblem[50])

$$(63) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(n\varphi)\,d\varrho(\varphi) = \alpha_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad d\varrho(\varphi) \geqq 0,$$

wobei zur Abkürzung $e(x) = e^{ix}$ gesetzt ist; die α sind gegeben, und es wird eine reellwertige, monoton nicht abnehmende Funktion $\varrho(\varphi)$ gesucht, die diese Gleichungen befriedigt. Setzt man

$$(64) \qquad \alpha_n = \bar{\alpha}_{-n}; \qquad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

so ist (63) wegen $e(x) = \bar{e}(-x)$ auch für $n < 0$ erfüllt, wenn es für $n \geqq 0$ erfüllt ist. Damit es eine Lösung $\varrho(\varphi)$ gibt, ist notwendig und hinreichend, daß die Hermiteschen, nach Herrn Toeplitz benannten Formen

$$(65) \qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \alpha_{j-l}\,\xi_j\,\bar{\xi}_l,$$

wobei man (64) als die Definition von $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ aufzufassen hat, bei jedem m nichtnegativ definit sind. Gibt es eine Lösung, so können wir, da es sich um Stieltjessche Integrationen handelt, annehmen, daß $\varrho(\varphi - 0) = \varrho(\varphi)$ in jedem *inneren* Punkte des Intervalles $[0, 2\pi]$ gilt. Der Periodizität zufolge können wir ferner annehmen, daß auch $\varrho(2\pi - 0) = \varrho(2\pi)$ gilt, da ja der Sprung $\varrho(+0) - \varrho(0)$ zur Verfügung steht. Endlich können

---

[50]) Vgl. G. Herglotz, loc. cit. [30]), wo auch die weitere Literatur [insb. [10])] angegeben ist, ferner F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 240 ff.

wir die für die Stieltjessche Integration belanglose additive Konstante durch $\varrho(0) = 0$ festlegen. Damit ist die Lösung eindeutig bestimmt, d. h. es gibt entweder gar keine Lösung, oder es gibt genau eine derart normierte Lösung. Der Eindeutigkeitssatz folgt aus (63) nach einer partiellen Integration auf bekannte Weise[51]) nach dem Vorgang von M. Lerch aus dem Weierstraßschen Approximationssatz, oder auch aus dem Eindeutigkeitssatz der gewöhnlichen Fourierreihen. Die Totalschwankung von $\varrho(\varphi)$ ist gleich α_0, man setze nämlich in (63) den Exponenten $n = 0$.

Wir stellen nun das zu den Zahlen

$$\alpha_n = \Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x}); \quad n = 0, 1, \ldots \tag{66}$$

gehörige Momentenproblem, wobei $\mathfrak{U}$ eine unitäre Matrix und $\mathfrak{x}$ irgendeinen festgewählten Vektor ($|\mathfrak{x}| < +\infty$) bezeichnet, so daß die Lösung $\varrho(\varphi)$ auch von $\mathfrak{x}$ abhängt, und behaupten, daß dann die Formen (65) nichtnegativ definit sind, daß also das Momentenproblem eine Lösung $\varrho = \varrho(\varphi; x_1, x_2, \ldots)$ hat. Auf den höchst einfachen Beweis kommen wir sogleich zurück. Die Lösung muß bei jedem $\mathfrak{x}$ die Totalschwankung $|\mathfrak{x}|^2$ haben, und nicht abnehmend, also insbesondere reellwertig sein. Ist sie also eine ganze homogene Funktion der x_p und $\bar{x}_p$ von dem Grade zwei, so muß sie wegen $\varrho(0) = 0$ und $\varrho(2\pi) = \alpha_0 = \Phi(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2$ eine beschränkte und nichtnegativ definite Hermitesche Form

$$\varrho = \varrho(\varphi; \mathfrak{x}) = \varrho(\varphi; x_1, x_2, \ldots) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \tau_{pq}(\varphi)\, x_p \bar{x}_q; \quad \tau_{pq} = \bar{\tau}_{qp} \tag{67}$$

sein, die den Bedingungen

$$\Delta\varrho \geqq 0; \quad \varrho(\varphi - 0) = \varrho(\varphi), \; 0 < \varphi \leqq 2\pi; \quad \varrho(0) = 0, \; \varrho(2\pi) = |\mathfrak{x}|^2 \tag{68}$$

genügt und dadurch eindeutig bestimmt ist. Nun muß aber die Lösung, wenn sie überhaupt existiert, die erwähnte Homogenitätseigenschaft haben. Dies folgt mit Rücksicht auf (14), (64), (66) nach einer geläufigen, in dem Hermiteschen Fall auch von Herrn F. Riesz[11]) benutzten Schlußweise einfach aus der Unität der Lösung (das Erfülltsein der normierenden Nebenbedingungen $\varrho(0) = 0$; $\varrho(\varphi - 0) = \varrho(\varphi)$, $0 < \varphi \leqq 2\pi$ vorausgesetzt).

Die Zahlen $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ sind mittels (64) zu definieren. Wir haben also wegen (14)

$$\alpha_{-n} = \overline{\Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x})} = \Phi(\mathfrak{U}^{n*}; \mathfrak{x}); \quad n = 1, 2, \ldots$$

zu setzen. Nun ist aber $\mathfrak{U}$, also auch $\mathfrak{U}^n$ unitär, also ist $\mathfrak{U}^{n*} = (\mathfrak{U}^n)^{-1} = \mathfrak{U}^{-n}$, mithin $\alpha_{-n} = \Phi(\mathfrak{U}^{-n}; \mathfrak{x})$, so daß (66) auch für $n < 0$ gilt. Wir wissen ferner, daß die Gleichungen (63) auch für $n < 0$ erfüllt sind, wenn sie für

---

[51]) Vgl. F. Hausdorff, loc. cit. [50]).

$n \geqq 0$ richtig sind. Wir haben es also mit dem Momentenproblem

$$(69) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\varrho(\varphi; \mathfrak{x}) = \Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x}); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2; \quad d\varrho \geqq 0$$

zu tun, wobei $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ der Bedingung $\sum |x_p|^2 < +\infty$ genügt und sonst willkürlich ist.

Nun zum Existenzbeweis. Das Momentenproblem (69) ist mit Rücksicht auf das bei (65) Gesagte dann und nur dann lösbar, wenn

$$(70) \qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \alpha_{j-l}\xi_j\bar{\xi}_l \geqq 0 \quad \text{gilt für} \quad \alpha_n = \Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x}); \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

wenn nur $\mathfrak{U}$ unitär ist; $m, \mathfrak{x}$ und die ξ sind dabei willkürlich. Wir haben also folgendes zu beweisen: Sind $m, \mathfrak{x}$ und die ξ beliebig festgehalten, und bezeichnet T die unter (70) stehende endliche Summe, so gilt $T \geqq 0$, wenn $\mathfrak{U}$ unitär ist. Diese Ungleichung ist aber leicht zu verifizieren. Zunächst ist

$$T = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \Phi(\mathfrak{U}^{j-l}; \mathfrak{x})\, \xi_j\bar{\xi}_l,$$

also wegen $\Phi(\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}; \mathfrak{x}) = \alpha\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}) + \beta\Phi(\mathfrak{B}; \mathfrak{x})$

$$T = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \Phi(\mathfrak{T}; \mathfrak{x}),$$

wenn

$$(71) \qquad \mathfrak{T} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \xi_j\bar{\xi}_l\mathfrak{U}^{j-l}$$

gesetzt wird. Die Behauptung $T \geqq 0$ läuft also darauf hinaus, daß die (offenbar beschränkte) Matrix $\mathfrak{T}$ eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix ist. Ist nun $\mathfrak{C}$ irgendeine beschränkte Matrix, so ist das Produkt $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ gewiß Hermitesch und wegen (16) nichtnegativ definit. Mithin genügt es zu zeigen, daß es eine beschränkte Matrix $\mathfrak{C}$ gibt, mit deren Hilfe die unter (71) stehende Matrix $\mathfrak{T}$ in der Gestalt $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ dargestellt werden kann. Setzt man nun

$$\mathfrak{C} = \sum_{j=0}^{m} \xi_j\mathfrak{U}^j,$$

so gilt

$$\mathfrak{C}^* = \overline{\mathfrak{C}}' = \sum_{j=0}^{m} \bar{\xi}_j\overline{(\mathfrak{U}^j)}' = \sum_{j=0}^{m} \bar{\xi}_j(\overline{\mathfrak{U}}')^j,$$

also, da $\mathfrak{U}$ unitär, d. h. $\overline{\mathfrak{U}}' = \mathfrak{U}^* = \mathfrak{U}^{-1}$ ist,

$$\mathfrak{C}^* = \sum_{l=1}^{m} \bar{\xi}_l\mathfrak{U}^{-l},$$

mithin

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}^* = \Big(\sum_{j=0}^{m} \xi_j \mathfrak{U}^j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{m} \bar{\xi}_l \mathfrak{U}^{-l}\Big) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \xi_j \bar{\xi}_l \mathfrak{U}^{j-l} = \mathfrak{T}.$$

Damit ist alles bewiesen. —

Setzt man (67) in (69) ein, so folgt

$$\mathfrak{U}^n = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\|; \qquad n = 0, \pm 1, \ldots. \tag{72}$$

Mit Rücksicht auf (67), (68), (69) gibt es also zu jeder unitären Matrix $\mathfrak{U}$ eine und nur eine[52]) Funktionenmatrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ von der folgenden Beschaffenheit: Die τ sind für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ erklärt, sie bilden bei jedem φ eine beschränkte Hermitesche Matrix, deren Kopplungsform

$$\varphi(\varphi; \mathfrak{x}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \tau_{pq}(\varphi)\, x_p \bar{x}_q$$

den Bedingungen

$$\Delta\varphi \geqq 0, \tag{73}$$

$$\varphi(0, \mathfrak{x}) = 0, \qquad \frac{1}{2\pi}\varphi(2\pi; \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2 \tag{74}$$

genügt, es gilt (72), und endlich

$$\tau_{pq}(\varphi - 0) = \tau_{pq}(\varphi), \qquad 0 < \varphi \leqq 2\pi. \tag{75}$$

Aus (74) und (73) folgt übrigens

$$\tau_{pq}(0) = 0, \qquad \tau_{pq}(2\pi) = 2\pi\delta_{pq} \tag{76}$$

und

$$|\Delta\tau_{pq}|^2 \leqq (\Delta\tau_{pp})(\Delta\tau_{qq}); \qquad \Delta\tau_{pp} \geqq 0. \tag{77}$$

Die Matrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ möge die Spektralmatrix der unitären Matrix $\mathfrak{U}$ genannt werden.

In Verallgemeinerung von (72) können wir zu jeder, für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ erklärten, der Bedingung $G(0) = G(2\pi)$ nicht notwendig genügenden Funktion $G(\varphi)$ die Matrix

$$G(\mathfrak{U}) = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi)\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\| \tag{78}$$

zuordnen; sie ist, aus denselben Gründen wie (59), offenbar beschränkt. Sie ist ferner für reellwertige $G(\varphi)$ wegen $\tau_{pq} = \bar{\tau}_{qp}$ gewiß Hermitesch. Insbesondere ist also

$$\varphi(\mathfrak{U}) = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\| \tag{79}$$

---

[52]) Dieser Eindeutigkeitssatz wird für uns wertvoll sein.

eine beschränkte Hermitesche Matrix. Ich behaupte nun, daß die Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(p)\|$ von $\varphi(\mathfrak{U})$ für

$$\mu \leqq 0, \quad 0 \leqq \mu \leqq 2\pi, \quad \mu \geqq 2\pi \quad \text{bzw. gleich} \quad \|0\|, \quad \left\|\frac{1}{2\pi}\tau_{pq}(\mu)\right\|, \quad \|\delta_{pq}\|$$

ist, so daß das Spektrum von $\varphi(\mathfrak{U})$ gewiß auf $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$ und dabei $\mu = 2\pi$ außerhalb des (eventuellen) Punktspektrums liegt (d. h. eine Stetigkeitsstelle aller σ_{pq} ist).

Sind $G_1(\varphi)$, $G_2(\varphi)$ trigonometrische Polynome, so ist

$$G_1(\mathfrak{U})\,G_2(\mathfrak{U}) = G_3(\mathfrak{U}); \qquad G_3(\varphi) = G_1(\varphi)\,G_2(\varphi) \tag{80}$$

wegen (72) trivial, d. h. man hat dann

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_1(\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\|\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_2(\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_1(\varphi)\,G_2(\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\|. \tag{81}$$

Dies überträgt sich mittels des Weierstraßschen Approximationssatzes [vgl. dieselbe Schlußweise bei (57)] auf den Fall, wo die $G(\varphi)$ stetig sind und der Bedingung $G(0) = G(2\pi)$ genügen, die sich jedoch nachträglich als überflüssig erweist[53]). Folglich gilt (80), (81), wenn $G_1(\varphi)$, $G_2(\varphi)$ irgendwelche stetige Funktionen bezeichnen. Es sei nun λ nicht reell und man setze

$$G_1(\varphi) = \lambda - \varphi, \qquad G_2(\varphi) = \frac{1}{\lambda - \varphi},$$

was wegen $\varphi \geqq 0$ gestattet ist. Aus (78), (80) folgt dann

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda-\varphi}\right\|\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lambda-\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau_{pq}(\varphi)\right\|,$$

wobei linkerhand wegen (80) vertauschbare Matrizen stehen. Da hierbei die rechte Seite nach (72) gleich der Einheitsmatrix, und linkerhand der zweite Faktor wegen (72) und (79) gleich

$$\left\|\lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau_{pq}(\varphi)\right\| - \varphi(\mathfrak{U}) = \lambda\mathfrak{E} - \varphi(\mathfrak{U})$$

ist, so gilt

$$(\lambda\mathfrak{E} - \varphi(\mathfrak{U}))^{-1} = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda-\varphi}\right\|. \tag{82}$$

Bezeichnet also $\|R_{pq}(\lambda)\|$ die Resolvente der Hermiteschen Matrix (79), und setzt man

$$\begin{aligned}\sigma_{pq}(\mu) &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \leqq 0,\\ &= \frac{1}{2\pi}\tau_{pq}(\mu) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu \leqq 2\pi,\\ &= \delta_{pq} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2\pi,\end{aligned}$$

[53]) Vgl. eine analoge Schlußweise z. B. bei E. Hellinger, loc. cit. [43]), S. 15–16.

o daß die σ_{pq} im Punkte $\mu = 2\pi$ auch von rechts stetig sind, so folgt us (82) und (76)

$$R_{pq}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\lambda - \mu},$$

o daß $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Darstellung (48) zw. auf die dort erwähnte Stieltjessche Umkehrformel die Spektralmatrix von $\varphi(\mathfrak{U})$ sein muß, w. z. b. w.

Es sei jetzt umgekehrt eine beschränkte Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ *gegeben.* Und zwar soll das Spektrum von $\mathfrak{H}$ auf dem Intervalle $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$ liegen, o daß in der Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ von $\mathfrak{H}$ das Element $\sigma_{pq}(\mu)$ für $\mu \leqq 0$ verschwindet und für $\mu \geqq 2\pi$ gleich δ_{pq} ist; und außerdem soll die Spektralform (50) in dem Punkte $\mu = 2\pi$ bei keinem ξ einen Sprung aufweisen, d. h. dieser Punkt möge außerhalb des (eventuellen) Punktspektrums von $\mathfrak{H}$ liegen. Die Matrix $e(\mathfrak{H})$ ist, wie wir aus § 6 wissen, edenfalls unitär, und es gilt wegen (78), (80)

$$[e(\mathfrak{H})]^n = e(\mathfrak{H}^n) = \Big\| \int_{-\infty}^{+\infty} e(n\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \Big\| \tag{83}$$

ür $n = 0, 1, 2, \ldots$. Denn es ist ja $e(x+y) = e(x)\,e(y)$. Nun ist $e(\mathfrak{H})$ nitär, d. h. $[e(\mathfrak{H})]^{-1} = (e(\mathfrak{H}))^*$, und daher $[e(\mathfrak{H})]^{-n} = [e(\mathfrak{H})^n]^*$, also wegen (83)

$$[e(\mathfrak{H})]^{-n} = \Big\| \int_{-\infty}^{+\infty} e(n\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \Big\|^*, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

nd daher wegen (62) und mit Rücksicht auf $\bar{e}(x) = e(-x)$

$$[e(\mathfrak{H})]^{-n} = \Big\| \int_{-\infty}^{+\infty} e(-n\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \Big\|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

o daß also (83) auch für $n < 0$ gilt. Nun sind aber die $\sigma_{pq}(\mu)$ außerhalb des Intervalles $[0, 2\pi]$ konstant, ferner sind sie von links stetig, und m Punkte $\mu = 2\pi$ nach Voraussetzung auch von rechts stetig, so daß, wenn

$$\tau_{pq}(\varphi) = 2\pi\, \sigma_{pq}(\varphi), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \tag{84}$$

esetzt wird, für (83) auch

$$(e(\mathfrak{H}))^n = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\|, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

eschrieben werden kann. Offenbar hat also die durch (84) erklärte Matrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ alle charakteristischen Eigenschaften der Spektralmatrix der unitären Matrix $e(\mathfrak{H})$, sie muß also, wie bei [52]) betont wurde, die Spektralmatrix von $e(\mathfrak{H})$ sein.

Fassen wir nun unsere Resultate zusammen: Ist $\mathfrak{U}$ eine unitäre Matrix mit der Spektralmatrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$, und führt man eine Matrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ mittels der Definition

$$\begin{aligned}\sigma_{pq}(\mu) &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \leqq 0,\\ &= \frac{1}{2\pi}\tau_{pq}(\mu) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu \leqq 2\pi,\\ &= \delta_{pq} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2\pi\end{aligned}$$

ein, so ist

$$\mathfrak{H} = \varphi(\mathfrak{U}) = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, d\sigma_{pq}(\mu) \right\|$$

eine beschränkte Hermitesche Matrix, deren Spektralmatrix gleich $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ ist, so daß also das Spektrum von $\mathfrak{H}$ zwischen den beiden Punkten $\mu = 0$, $\mu = 2\pi$ und letzterer nicht im Punktspektrum liegt; ist umgekehrt $\mathfrak{H}$ eine beschränkte Hermitesche Matrix, deren Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ für $\mu \leqq 0$ und für $\mu \geqq 2\pi$ konstant ist, d. h. ist $\mathfrak{H}$ derart, daß das Spektrum zwischen den beiden Punkten $\mu = 0$, $\mu = 2\pi$ liegt (die Grenzen nach wie vor miterlaubt), und ist außerdem der Punkt $\mu = 2\pi$ außerhalb des Punktspektrums gelegen, so ist, wenn die Matrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ mittels der Definition

$$\tau_{pq}(\varphi) = 2\pi\sigma_{pq}(\varphi), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

eingeführt wird, die Matrix

$$\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H}) = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(\varphi) \, d\tau_{pq}(\varphi) \right\|$$

eine unitäre Matrix mit der Spektralmatrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$. —

Da nun jede (unitäre oder Hermitesche) Matrix eine und nur eine Spektralmatrix hat, und da die Matrix durch ihre Spektralmatrix wegen (56) und (72), wobei man beidemal $n = 1$ zu setzen hat, vollständig bestimmt ist, so folgt offenbar, daß wir die Mannigfaltigkeit derjenigen beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{H}$, deren Spektrum eine auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gelegene Punktmenge ist und bei welchen $\mu = 2\pi$ nicht in dem Punktspektrum liegt, auf die Mannigfaltigkeit aller unitären Matrizen $\mathfrak{U}$ *eineindeutig* abbilden, wenn wir $\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H})$ setzen. —

An Stelle von $\mu = 2\pi$ können wir freilich auch den Punkt $\mu = 0$ aus dem (eventuellen) Punktspektrum ausschließen. Bekanntlich liegt die Zahl μ dann und nur dann in dem Punktspektrum von $\mathfrak{H}$, wenn die zu $\mu\mathfrak{E} - \mathfrak{H}$ gehörigen homogenen Gleichungen eine normierte Lösung zulassen. Die Matrix $\mathfrak{H}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mu = 0$ nicht in dem Punktspektrum liegt, d. h. wenn die zu $\mathfrak{H}$ gehörigen homogenen Gleichungen keine nicht triviale quadratisch konvergente Lösung haben. Bezeichnet man also die

Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ als *reduziert*, wenn sie abgeschlossen, nichtnegativ definit und derart ist, daß ihre Kopplungsform auf der komplexen Einheitskugel durchweg $\leqq 2\pi$ ausfällt, so können wir die vorangehenden mit Rücksicht auf S. 250 auch wie folgt formulieren: Durch die Abbildung $\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H})$ wird die Mannigfaltigkeit der reduzierten Hermiteschen Matrizen auf die Mannigfaltigkeit der unitären Matrizen eineindeutig bezogen. — Die Notwendigkeit der „Reduktion" für das Schlichtsein der Abbildung wird nicht nur durch die Periodizitätseigenschaft $e(\mathfrak{H} + 2\pi i\,\mathfrak{E}) = e(\mathfrak{H})$ bedingt. Denn es gibt beschränkte Hermitesche Matrizen, deren Spektrum eine beliebig große Breite hat, während die Spektra der beiden Matrizen $e(\mathfrak{H} + c\,\mathfrak{E})$, $e(\mathfrak{H})$ offenbar kongruente Punktmengen sind.

Die Formeln (72) können wir auf die folgende Weise in eine erzeugende Relation zusammenfassen. Es bezeichne $\| Q_{pq}(\lambda) \|$ die Resolvente $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1}$ von $\mathfrak{U}$. Da nach § 6

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{U}^n) = 1, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

gilt, so folgt aus (27) bzw. (26)

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathfrak{U}^{-n-1} \quad \text{für} \quad |\lambda| < 1,$$

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \mathfrak{U}^n \quad \text{für} \quad |\lambda| > 1.$$

Setzt man hierin (72) ein, so folgt beidemal

$$\| Q_{pq}(\lambda) \| \equiv (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda - e(\varphi)} \right\| \qquad \text{(vgl. (82))}, \tag{85}$$

da wegen $\mathfrak{r}(\mathfrak{U}^m) = 1$ die gliedweise Integration gestattet ist. Man beachte, daß daraus, daß die Formel (85) für $|\lambda| < 1$ gilt, noch nicht folgen müßte, daß sie auch für $|\lambda| > 1$ richtig ist, so daß wir beide Reihen in Betracht ziehen mußten. Denn $|\lambda| = 1$ kann eine natürliche Grenze sein.

Nehmen wir nun an, daß eine Zahl $\lambda_0 = e(\varphi_0)$ vorhanden ist derart, daß in einem Intervalle $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ alle $\tau_{pq}(\varphi)$ konstant sind. Dann ist die unter (85) stehende Integralmatrix für $\lambda = \lambda_0$ gewiß eine beschränkte Matrix, und zwar gilt (85) auch für $\lambda = \lambda_0$. Der erste Teil der Behauptung ist aus der Monotonieeigenschaft der Spektralmatrix ersichtlich, der zweite Teil folgt aber aus

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda - e(\varphi)} \right\| (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U}) = \mathfrak{E}, \qquad |\lambda| \neq 1, \tag{86}$$

wenn man hierbei den Grenzübergang $\lambda \to \lambda_0$ unter Beachtung des Hellyschen Satzes über gliedweise Integration vornimmt. Folglich liegt λ_0 außer-

halb des Spektrums. — Gibt es aber kein ε von der erwähnten Beschaffenheit, so liegt λ_0 in dem Spektrum, das also aus den Nichtkonstanzstellen der $\tau_{pq}(\varphi)$ und ihren Häufungsstellen besteht und das durch die Abbildung $e(\varphi)$ entworfene Bild von $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ darstellt. Denn wie wir aus § 2 wissen, gibt es zu jedem außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{U})$ gelegenen λ_0 ein $\eta > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ jedes $Q_{pq}(\lambda)$ regulär ist. Es genügt also zu beweisen, daß es kein $\eta > 0$ gibt, wenn es kein $\varepsilon > 0$ gibt. Die Voraussetzung, daß es kein $\varepsilon > 0$ gibt, besagt dabei wegen (77) folgendes: es gibt kein $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Intervalle $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ jedes $\tau_{pp}(\varphi)$ konstant ist [das Spektrum verrät sich also bereits aus den diagonalen τ_{pq}; dies gilt wegen (52) auch in dem Hermiteschen Fall]. Nun sind aber die $\tau_{pp}(\varphi)$ nach (77) reellwertig und monoton. Es genügt also folgendes zu zeigen: Ist $\tau(\varphi)$ eine für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ erklärte, reellwertige, monoton nicht abnehmende Funktion, und ist $\varphi = \varphi_0$ eine Nichtkonstanzstelle von $\tau(\varphi)$, so ist die durch das Integral

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau(\varphi)}{\lambda - e(\varphi)} \tag{87}$$

dargestellte Funktion für $\lambda = \lambda_0 = e(\varphi_0)$ nicht regulär [NB. wir müssen von der Funktion sprechen, die durch das Integral unmittelbar dargestellt wird; es wäre z. B. möglich, daß $Q(\lambda)$ für $|\lambda| \geqq 1$ eine unmittelbare analytische Fortsetzung zuläßt, während das Integral für $|\lambda| \geqq 1$ eine andere Funktion darstellt].

Nehmen wir nun zwecks Zurückführung ad absurdum die Unrichtigkeit der Behauptung an. Da das Integral für $|\lambda| \neq 1$ gewiß regulär ist, so gilt dann

$$Q(\lambda) - Q\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \to 0, \qquad |\lambda| \to 1, \tag{88}$$

gleichmäßig auf einem φ_0 enthaltenden Bogen des Einheitskreises. Nun gilt aber wegen (87), wenn

$$\lambda = |\lambda| e(\theta) \quad \text{und} \quad \zeta(\varphi) = -\int e(\varphi)\, d\tau(\varphi) \tag{89}$$

gesetzt wird,

$$Q(\lambda) - Q\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - 2|\lambda| \cos(\varphi - \theta) + |\lambda|^2}\, d\zeta(\varphi). \tag{90}$$

Da (90) für $|\lambda| \to 1$ auf dem Bogen gleichmäßig nach Null gehen soll, so folgt nach bekannten Sätzen[46]), [54]), daß auf dem Bogen die Funktion $\zeta(\varphi)$, also wegen (89) offenbar auch $\tau(\varphi)$, konstant sein muß, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

---

[54]) Vgl. z. B. G. C. Evans, The logarithmical potential, New York 1927 (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., Vol. VI.).

Der Satz, daß sich jede unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ und jede nur einmal ergibt, wenn in $\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H})$ das Argument die Mannigfaltigkeit der reduzierten Hermiteschen Matrizen durchläuft, kann wohl als sinngemäßes Analogon (ja sogar einfach als eine Verallgemeinerung) der Euler-Hurwitzschen Parameterdarstellung aufgefaßt werden, die hier — nicht erst in Anbetracht der Streckenspektra — grundsätzlich versagt. Es wäre in diesem Gedankenkreis vor allem wünschenswert, die Gruppe der linearen Transformationen der reellen Hilbertschen Kugel in sich zu beschreiben, d. h. die Mannigfaltigkeit derjenigen reduzierten $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, deren unitäres Bild reell ist. Die Frage hat nämlich außer dem gruppentheoretischen auch ein topologisches Interesse. Die Durchführung dieser Realitätsdiskussion und ähnlicher Rechnungen dürfte stets unter Zugrundelegung der Herglotzschen Fourierentwicklung[31]) für die Lösung des trigonometrischen Momentenproblems gelingen.

Anhang.

Anwendung des Spektrumbegriffes auf die Matrizentheorie der regulären Potenzreihen.

In Verallgemeinerung der Matrix (18), welche der identischen konformen Abbildung $w = z$ entspricht, will ich hier die Brauchbarkeit und Natürlichkeit des oben (§ 2) eingeführten Spektrumbegriffes an der Hand der Matrizentheorie der Potenzreihen[55]) illustrieren (ohne auf Anwendungen auf die Wachstumstheorie der Potenzreihen[55]) einzugehen). Man hat sich dabei — im Gegensatz zu den aus mehreren Gründen prinzipiell harmloseren (normalen) Laurentmatrizen[4]) — meines Wissens stets auf die Untersuchung des Wertbereiches der Kopplungsform beschränkt. Dementsprechend ist wohl eine matrizentheoretische Charakterisierung für die konvexe Hülle des Wertevorrates der Potenzreihe, aber nicht eine entsprechende Kennzeichnung dieses Wertevorrates selbst bekannt. — Da die fraglichen Matrizen normaloid sind, so gehe ich über diese Untersuchungen mit Rücksicht auf § 5 erheblich hinaus, wenn ich das Spektrum bestimme. Daß man sich bisher auf den Wertbereich der Kopplungsform beschränkt hat, ist wohl dadurch bedingt, daß man das Spektrum einer beliebigen beschränkten Matrix nicht oder wenigstens nicht *so* definiert hat, wie es der Natur der Sache entspricht (nämlich so, wie dies in § 2 geschehen ist).

---

[55]) Vgl. I. Schur, Journ. für Math. **147** (1917), S. 205 ff., ferner O. Toeplitz, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 193 ff., wo auch die Literatur angegeben ist. Die formal entsprechenden (nichtsingulären) Integralgleichungen der Elektronentheorie sind zuerst von G. Herglotz [Math. Annalen **67** (1908), S. 87 ff.] untersucht worden.

Dies um so mehr, da der Sinn unserer Definition eben bei diesen Potenzreihenmatrizen beim ersten Anblick zu unerwünschten Folgerungen zu führen scheint, deren Natürlichkeit und Notwendigkeit erst in der Funktionentheorie der Resolventenmatrix zutage tritt; die ausführlich besprochene pathologische Matrix (18) ist ja die einfachste unter diesen Matrizen (sofern sie nicht Diagonalmatrizen und damit von der Gestalt $c\,\mathfrak{E}$ sind). Ich schreibe diese, explizit wohl von Herrn Schur eingeführten Matrizen, wie üblich, nicht so:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \vdots & & & \end{matrix} \right\|,$$

sondern gehe durch Transposition zu der „Volterraschen“ Matrix

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(f) = \left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \\ \vdots & & & \end{matrix} \right\|; \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

über, wodurch — wider Erwarten — das Spektrum nicht alteriert wird (§ 2). Diese Schreibweise hat gegenüber der ersten für uns u. a. den Vorteil, daß sie einen Vergleich mit der bekannten, sich auf Summengleichungen und dergleichen beziehenden Theorie der Herren Hilb und Perron[56]) ermöglicht (es liegen freilich diesen Untersuchungen nicht von vornherein die allgemeinen Hilbertschen Bedingungen zugrunde).

Bekanntlich ist die Matrix $\mathfrak{S}(f)$ dann und nur dann beschränkt, wenn die Potenzreihe $f(z)$ für $|z| < 1$ konvergent und beschränkt ist, und zwar ist die obere Grenze des Betrages der Kopplungsform von $\mathfrak{S}(f)$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ identisch mit der oberen Grenze von $|f(z)|$ für $|z| < 1$.[55]) Die Matrizen $\mathfrak{S}(f)$, deren Beschränktheit vorausgesetzt werden möge, sind, wie bereits das Beispiel $f(z) = z$ [vgl. (18)] zeigt, (mit ersichtlichen Ausnahmen) nicht normal, jedoch stets normaloid[55]).

Es bezeichne Γ die Gesamtheit der Werte, welche die Potenzreihe $f(z)$ im Innern des Einheitskreises annimmt, und es sei Γ' der durch das offene Gebiet Γ bestimmte abgeschlossene Bereich (Γ kann auch ein Punkt sein, wenn nämlich $f(z) \equiv \alpha_0$ ist). — Es gilt dann der folgende

[56]) Vgl. z. B. E. Hilb, Math. Annalen 82 (1921), S. 1 ff.; O. Perron, Math. Annalen 84 (1921). S. 1 ff. Einer dritten Art von Konvergenzbedingungen begegnet man sich in der Theorie der divergenten Reihen; vgl. insb. I. Schur, Journ. f. Math. 151 (1921), S. 95—100; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 74 ff.

Satz. *Das Spektrum von* $\mathfrak{S}(f)$ *ist identisch mit dem Bereiche* Γ', *auf dessen Innere* $(=\Gamma)$ *das Kreisgebiet* $|z|<1$ *durch die* (*nicht notwendig schlichte*) *Funktion* $w=f(z)$ *abgebildet wird.*

Der Satz kann freilich nur unter Zugrundelegung der von mir benutzten Spektrumdefinition richtig sein (man denke nur wieder an den Fall $w=z$). — Alle Abschnittseigenwerte von $\mathfrak{S}(f)$ sind gleich $\alpha_0=f(0)$, und die Elemente $R_{pq}(\lambda)$ der Resolventenmatrix $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{S}(f))^{-1}$ sind rationale Funktionen, deren Pole nur in demselben Punkte $\lambda=\alpha_0$ liegen können. Man erkennt dies, wenn man vorher die Resolvente der transponierten Matrix, die auf eine rekursive Weise behandelt werden kann, berechnet, und sodann die Transposition rückgängig macht. —

Da die Zuordnung

$$f(z)\rightleftarrows\mathfrak{S}(f)$$

offenbar derart ist, daß

(I) $\quad\mathfrak{S}(cf)=c\,\mathfrak{S}(f),\quad \mathfrak{S}(f_1+f_2)=\mathfrak{S}(f_1)+\mathfrak{S}(f_2),\quad \mathfrak{S}(1)=\mathfrak{E}$

gilt, so hat man

(II) $$\mathfrak{S}(\lambda-f)=\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{S}(f).$$

Bildet man ferner einerseits die zu dem Cauchyschen Produkt $f_1(z)\,f_2(z)$ zweier Potenzreihen gehörige Matrix $\mathfrak{S}(f_1f_2)$, und andererseits das Matrizenprodukt $\mathfrak{S}(f_1)\,\mathfrak{S}(f_2)$, so erkennt man leicht, daß

(III) $\quad\mathfrak{S}(f_1f_2)=\mathfrak{S}(f_1)\,\mathfrak{S}(f_2)$, also insbesondere $\mathfrak{S}(f_1)\,\mathfrak{S}(f_2)=\mathfrak{S}(f_2)\,\mathfrak{S}(f_1)$

ist.

Man beachte nun, daß, wenn $f(z)$ im Kreise $|z|<1$ eine Nullstelle Z hat, die zu $\mathfrak{S}(f)$ gehörigen homogenen Gleichungen

$$\sum_{q=0}^{\infty}\alpha_q x_{p+q}=0,\qquad p=0,1,2,\ldots$$

wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n Z^n=f(Z)=0,\qquad |Z|<1$$

außer der trivialen Lösung $x_0=0, x_1=0,\ldots$ die quadratisch konvergente Eigenlösung

$$x_n=Z^n,\qquad n=0,1,2,\ldots\qquad\qquad (0^0=1\neq 0)$$

zulassen[57]), so daß $\mathfrak{S}(f)$ keine beschränkte Reziproke hat (vgl. § 2). Da

---

[57]) Zu dieser Schlußweise vgl. H. v. Koch, Proc. of the 5th International Congress, Cambridge 1913, Bd. I, S. 375. — Koch hat etwas andere Konvergenzbedingungen als ich. Auch nimmt er an, daß die fragliche Nullstelle nicht in den Nullpunkt $z=0$ hineinfällt. — Ist $0=f(0)=\alpha_0$, so ist

$$x_0=1,\quad x_1=0,\quad x_2=0,\ldots,$$

wie bereits oben angegeben, offenbar eine normierte Eigenlösung.

demnach der Punkt $\lambda = 0$ gewiß in dem Spektrum von $\mathfrak{S}(f)$ liegt, wenn $f(z)$ im Innern des Einheitskreises verschwinden kann, und da andererseits das Spektrum von $w\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ aus demjenigen von $\mathfrak{A}$ stets durch die um die komplexe Konstante w bestimmte Translation entsteht, so folgt aus (II), daß das ganze Wertgebiet Γ von $f(z)$ in dem Spektrum von $\mathfrak{S}(f)$ liegen muß. Da aber das Spektrum stets abgeschlossen ist, so ist auch Γ' eine Teilmenge des Spektrums.

Um auch die zweite Hälfte des Satzes zu beweisen, wähle man eine Zahl λ außerhalb Γ'. Dann ist $\frac{1}{\lambda - f(z)}$ für $|z| < 1$ regulär und beschränkt, also ist $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)$ eine beschränkte Matrix. Setzt man ferner in der Schurschen Beziehung (III)

$$f_1 = \lambda - f, \quad f_2 = \frac{1}{\lambda - f},$$

so folgt aus (II) mit Rücksicht die letzte der unter (I) stehenden drei Relationen offenbar

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{S}(f))\,\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right) = \mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{S}(f)) = \mathfrak{E}.$$

Mithin ist $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{S}(f))^{-1}$ vorhanden, es ist nämlich gleich $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)$. Die außerhalb Γ' gelegenen Zahlen liegen also außerhalb des Spektrums, d. h. das Spektrum ist eine Teilmenge von Γ', w. z. b. w.

Wie sehr diese Charakterisierung des Spektrums von $\mathfrak{S}(f)$ über die Bestimmung des Wertevorrates der Kopplungsform hinausgeht, erkennt man am besten, wenn man $\mathfrak{S}(f)$ mit der (offenbar ebenfalls beschränkten und bekanntlich normaloiden) Matrix vergleicht, die aus $\mathfrak{S}(f)$ dadurch entsteht, daß man die diagonalparallelen Strahlen auch nach oben unbegrenzt fortsetzt — d. i. die Laurentmatrix der Fatouschen Randfunktion von $f(z)$. Ist nun diese Randfunktion stetig, so ist das Spektrum der Laurentmatrix bekanntlich diejenige (nicht notwendig Jordansche) stetige geschlossene Kurve C, auf welche der *Rand* des Einheitskreises abgebildet wird, so daß die Wertevorräte der beiden Kopplungsformen gewiß übereinstimmen (da ja Γ' und C offenbar dieselbe konvexe Hülle haben), während dies von den Spektren im allgemeinen nicht behauptet werden kann, da $\Gamma' \neq C$ in dem Spezialfall einer Jordanschen Schlichtabbildung wegen $\Gamma' = \Gamma + C$ selbstverständlich ist.

Auch die nach Herrn Toeplitz benannten Matrizen des Carathéodoryschen Problems[58]) sind von den Schurschen Matrizen wohl zu unterscheiden. Sie entstehen nämlich aus den Schurschen durch künstliches Hermitesieren, und haben, sobald die Randfunktion etwa stetig ist, den Wertbereich der reellen Komponente der Randfunktion zum Spektrum; die zu (III) analoge

[58]) O. Toeplitz, Rend. Palermo 32 (1911), S. 191–192; vgl. ferner [50]).

multiplikative Eigenschaft kommt aber ihnen nicht zu, und eine [in dem Laurentschen Falle der Toeplitz-Hellingerschen Spektralregel[4]), im Jacobischen Fall[17]) der Regel (45)′ entsprechende] Beherrschung der Spektralmatrix steht noch aus. Die Schwierigkeit rührt ausschließlich davon her, daß das orthogonale Funktionensystem

$$e(n\varphi), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

nicht vollständig ist[17]). Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hankelschen Formen, deren Analogie mit den Toeplitzschen von Herrn Fischer[59]) erkannt worden ist. — Eine Spektraltheorie dieser beiden Matrizenklassen ließe sich wohl dadurch erreichen, daß man die wesentlich anders gerichteten Untersuchungen von Herrn Szegö[60]) in die allgemeine Spektraltheorie einordnet. Es sei hier noch erwähnt, daß das Abbildungsprinzip des § 7 auf unitäre Argumente leicht übertragen werden kann.

Leipzig, den 13. Januar 1929.

(Eingegangen am 13. Januar 1929.)

Zusatz (1. Mai 1929).
Radonsche Integrale und normale Spektraltheorie.

Nach Beendigung der Drucklegung habe ich bemerkt, daß auf die Hermitesche und auf die unitäre Spektraltheorie eine solche aller normalen Matrizen gegründet werden kann.

Zunächst kann man nämlich zu jeder beschränkten normalen Matrix $\mathfrak{A}$, für welche $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert, auf genau eine Weise eine positiv definite Matrix $\mathfrak{P}$ und eine unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ derart angeben, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{P}$ wird (während umgekehrt jede Matrix $\mathfrak{A}$, die auf diese Weise zerlegbar ist, normal ist und eine Reziproke hat). Aus leicht ersichtlichen Gründen soll $\mathfrak{P}$ als der Absolutbetrag, $\mathfrak{U}$ als das Azimut von $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ die fastperiodische Matrix der fastperiodischen Funktion $f(t)$, die der Null nicht beliebig nahe kommen kann, so daß $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert, so ist die fastperiodische Matrix von $|f(t)|$ der Absolutbetrag, diejenige von $f(t)\,|f(t)|^{-1}$ das Azimut von $\mathfrak{A}$; vgl. die Schlußbemerkung meines auf S. 264 erwähnten Aufsatzes, woselbst (§ 9) nicht diese, sondern eine kompliziertere, „kartesische“ Zerlegung angedeutet wird (siehe weiter unten).

Es sei nun $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ die Spektralmatrix des Absolutbetrages, $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ diejenige des Azimuts der normalen Matrix $\mathfrak{A}$. Da die beiden Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ vertauschbar sind, so sind es auch ihre Resolventen, und daher, wie die sinngemäße

---

[59]) E. Fischer, Rend. Palermo 32 (1911), S. 240 ff.

[60]) G. Szegö, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 167 ff.; Math. Annalen 82 (1921), S. 188 ff., usw.

Wiederholung einer Hilbertschen Schlußweise zeigt, auch ihre Spektralmatrizen $\|\sigma_{pq}\|$, $\|\tau_{pq}\|$, und zwar bei jedem Wertepaare (μ, φ). Da diese beiden Spektralmatrizen Hermitesch sind, so ist es mithin auch ihr Produkt

$$\|\zeta_{pq}(\mu,\varphi)\| = \|\sigma_{pq}(\mu)\| \cdot \|\tau_{pq}(\varphi)\|; \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Die Matrix $\|\zeta_{pq}\|$ ist nun als die Spektralmatrix der normalen Matrix $\mathfrak{A}$ anzusprechen. Es zeigt sich nämlich, daß für hinreichend große $|\lambda|$

$$(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\zeta_{pq}(\mu,\varphi)}{\lambda - \mu e^{i\varphi}} \right\|$$

gilt, wobei das Integral, wie bereits aus der Schreibweise hervorgeht, *nicht als wiederholtes Stieltjessches Integral*, sondern als Radonsches Doppelintegral zu verstehen ist [die Radonsche Monotonieeigenschaft der Kopplungsform von $\|\zeta_{pq}(\mu,\varphi)\|$ kann aus bekannten Eigenschaften der klassischen Spektralmatrix leicht geschlossen werden]. Da $\mathfrak{P}$ beschränkt ist, so gilt für hinreichend große $|\mu|$, wie wir wissen, $d\sigma_{pq}(\mu) \equiv 0$, und daher *in dem Radonschen Sinne* $d\zeta_{pq}(\mu,\varphi) \equiv 0$, so daß der Integrationsbereich ganz im Endlichen liegt. Da ferner $\mathfrak{P}$ positiv definit ist, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $d\sigma_{pq}(\mu) \equiv d\zeta_{pq}(\mu,\varphi) \equiv 0$ wird für $-\infty < \mu < \varepsilon$. Wir können daher, wenn wir noch den Buchstaben μ auf ϱ vertauschen, einfach

$$(*) \qquad (\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \left\| \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\zeta_{pq}(\varrho,\varphi)}{\lambda - \varrho e^{i\varphi}} \right\|; \qquad \zeta_{pq}(\varrho,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{pj}(\varrho)\, \tau_{jq}(\varphi)$$

setzen. Es handelt sich also bei der Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{U}$ tatsächlich um die „Polarkoordinaten" von $\mathfrak{A}$. Bei der „kartesischen" Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$ in Hermitesche Komponenten baut sich die Spektralmatrix von $\mathfrak{A}$ aus denjenigen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ auf eine viel kompliziertere Weise auf (was davon herrührt, daß die kartesische Zerlegung additiv und nicht multiplikativ ist). Die Existenz einer solchen kartesischen Integraldarstellung der Resolvente *aller* normalen Matrizen haben von Neumann und ich in während der zweiten Hälfte vom Januar d. J. stattgefundenen Gesprächen mit Bestimmtheit vermutet. Die Existenz dieser Formel kann jetzt auf Grund von (*) sichergestellt werden, doch ist (*) viel bequemer, so daß ich nunmehr auch bei den fastperiodischen Matrizen die Darstellung (*) bevorzugen werde.

Es war bisher vorausgesetzt, daß $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert. Ist dies nicht der Fall, so wähle man eine reelle Zahl ν derart, daß die (offenbar normale) Matrix $\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{E}$ eine Reziproke hat, und bezeichne durch $\|\zeta^{(\nu)}_{pq}(\varrho,\varphi)\|$ die Spektralmatrix von $\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{E}$. Dann hängt die Matrix $\|\zeta^{(\nu)}_{pq}(\varrho - \nu, \varphi)\|$ von ν gar nicht ab, und bezeichnet man sie durch $\|\zeta_{pq}(\varrho,\varphi)\|$, so bleibt die Integraldarstellung (*) bestehen.

Das Spektrum von $\mathfrak{A}$ besteht jetzt nicht mehr aus allen, sondern nur aus den „zweidimensionalen" Nichtkonstanzstellen der ζ_{pq} und aus deren Häufungsstellen, das Punktspektrum entsprechend nicht aus allen, sondern nur aus denjenigen Unstetigkeitsstellen, in welchen „$d\zeta_{pq}(\varrho,\varphi) \neq 0$" gilt bei mindestens einem Wertepaare (p, q). — Nach Herrn Radon sind sogar alle Unstetigkeitsstellen auf einer Halbstrahlenfolge $\varphi = \varphi_m$; $m = 1, 2, \ldots$ und auf einer Kreislinienfolge $\varrho = \varrho_n$; $n = 1, 2, \ldots$ gelegen.

Bemerkung über die Eigenwellen der Kármánschen Wirbelstraßen.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Herr Lichtenstein machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß die Schlußbemerkungen von § 6 in meinem unmittelbar vorangehenden Aufsatz[1]) auch in der Kármánschen Theorie der Wirbelwellen[2]) eine Anwendung finden [gemeint ist die eigentliche Kármánsche Theorie, wo die Wirbelfäden unendlich dünn sind, und wo die „kleinen", d. h. unendlich kleinen, mithin durch lineare Differentialsysteme bestimmten Schwingungen der Wirbelstraßen betrachtet werden[3])].

Aus den Bemerkungen von § 6 ergibt sich insbesondere die Bestätigung für eine physikalisch einleuchtende Vermutung von Herrn v. Kármán[4]), wonach die allgemeine Lösung des [linearen] Anfangsproblems stets eine Superposition derjenigen Elementarwellen (Differentiallösungen) ist, welche von der Wirbelstraße emittiert werden können. Denn die allgemeine Lösung erscheint bei mir von vornherein in der Gestalt eines aus Elementarlösungen aufgebauten Fourierschen Wellenpakets. Bei der üblichen Behandlung gilt umgekehrt die Elementarwelle als primär; das Normierungsproblem der Differentiallösungen wird dabei nicht behandelt, und dies bedingt es eben, daß die Beantwortung der Frage nach der Vollständigkeit des Eigenwellensystems sich dieser Behandlung entzieht.

Die loc. cit. [1]) gemachte Annahme, daß nur solche Lösungen des Anfangsproblems betrachtet werden, bei welchen die Quadratsumme der für

---

[1]) Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 228–282.

[2]) Vgl. H. Lamb, Hydrodynamics. Fifth edition. Cambridge, University Press, 1924, S. 209–212.

[3]) Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 62ff.; A. Wintner, Math. Annalen **96** (1926), S. 284ff.

[4]) Th. v. Kármán, Gött. Nachr. 1912, S. 549 (unten).

$t = 0$ vorgeschriebenen Anfangswerte konvergiert, hat einen guten physikalischen Sinn: sie läuft darauf hinaus, daß die Wirbelstraße zur Zeit $t = 0$ im räumlichen Unendlichen nach der Art der Fourier-Wirtingerschen unendlichen Saite „eingespannt“ ist. Die Lösung ist dann notwendigerweise derart, daß die Quadratsumme auch für $t \neq 0$ konvergiert, so daß das System im räumlichen Unendlichen dauernd in Ruhe bleibt. — Übrigens sind die Matrizen der Kármánschen Differentialsysteme derart, daß außer der Bedingung der Beschränktheit auch eine weitere erfüllt ist, die ich in früheren Arbeiten[5]) zugrunde gelegt habe, so daß die loc. cit. [1]) angegebenen Formeln auch dann gelten, wenn die Beträge der für $t = 0$ vorgeschriebenen Werte lediglich unterhalb einer festen Schranke liegen.

Leipzig, den 7. März 1929.

---

[5]) Vgl. z. B. Math. Annalen **95** (1926), S. 553; Astr. Nachr. **228** (1924), S. 99.

(Eingegangen am 7. März 1929.)

Ein qualitatives Kriterium für die Konvergenz der assoziierten Kettenbrüche.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Im nachstehenden soll eine Lage der Nullstellen der Näherungsnenner eines assoziierten Kettenbruches angegeben werden, welche hinreichend ist dafür, daß der assoziierte Kettenbruch gleichmäßig konvergiert (d. h. gleichmäßig konvergiert in jedem Kreisbereiche, welcher mit der reellen Achse keinen Punkt gemein hat).

Es bezeichne $S = \| \alpha_{ik} \|$; $i, k = 1, 2, \ldots$ eine reell-symmetrische unendliche Matrix, $S_{[n]}$ ihren n-ten Abschnitt, E die unendliche Einheitsmatrix, μ eine nichtreelle Zahl, endlich $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^{(n)}(\mu)\, x_i y_k$ diejenige (symmetrische) Bilinearform, deren Matrix die Reziproke der Differenzenmatrix $\mu E_{[n]} - S_{[n]}$ ist. Die Matrix S soll grenzresolventenhaft genannt werden, wenn $A_{ik}^{(n)}(\mu)$ bei beliebiger Festhaltung von i, k und μ mit unbegrenzt wachsendem n einer Grenze zustrebt. Dies ist bekanntlich gewiß der Fall, wenn S im Hilbertschen Sinne beschränkt ist, d. h. wenn das Spektrum von S ganz im Endlichen liegt, wobei unter Spektrum etwa die Gesamtheit der Wurzeln der Säkulargleichungen $\det(\lambda E_{[n]} - S_{[n]}) = 0$; $n = 1, 2, \ldots$ gemeint ist. Kürzlich habe ich darüber hinaus bewiesen[1]), daß S gewiß grenzresolventenhaft ist, wenn das Spektrum mit einer beliebigen Halbgeraden abgedeckt werden kann. — Die Matrix S ist eine Jacobische Matrix J, wenn sie zu einer quadratischen Form $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i x_i^2 - 2 b_i x_i x_{i+1})$ mit $b_i \gtrless 0$ [d. h. $b_i \neq 0$] gehört. Ist J eine Jacobische Matrix, so heißt

$$K(\lambda) = \frac{c_0}{|a_1 + \lambda} - \frac{b_1^2}{|a_2 + \lambda} - \frac{b_2^2}{|a_3 + \lambda} - \ldots \qquad (c_0 > 0)$$

[1]) A. Wintner, Sitzungsber. d. sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, 1927, S. 145–157.

ein assoziierter Kettenbruch. Der n-te Näherungsnenner von $K(\lambda)$ unterscheidet sich vom n-ten Säkularpolynom $\det(\lambda E_{[n]} - J_{[n]})$ höchstens um einen konstanten Faktor ($\neq 0$).

Es sei $c_0, c_1, \ldots$ eine reelle Zahlenfolge derart, daß die Hankelsche Form $\sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} c_{i+k} x_i x_k$ bei beliebig großem n positiv definit ist. Dies ist nach Herrn Hamburger[2]) notwendig und hinreichend dafür, daß mindestens eine, nicht aus endlich vielen konstanten Stücken bestehende Funktion $\varrho(t)$ mit

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\varrho(t) = c_n, \quad n = 0, 1, \ldots; \quad d\varrho(t) \geqq 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

vorhanden ist. Dieselbe Bedingung ist auch dafür notwendig und hinreichend, daß die Potenzreihe

$$P\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \ldots,$$

welche evtl. bei beliebig großem $|\lambda|$ divergiert, formal in einen (und dann nur einen) assoziierten Kettenbruch $K(\lambda)$ umgerechnet werden kann; umgekehrt kann jeder assoziierte Kettenbruch aus genau einer Potenzreihe auf diese Weise erzeugt werden[3]). — Das zur vorgelegten Folge $\{c_n\}$ gehörige Momentenproblem (1) heißt bestimmt, wenn es dabei nur eine nicht abnehmende Belegungsfunktion $\varrho(t)$ gibt; hierbei sind zwei Belegungsfunktionen ϱ_1, ϱ_2 als voneinander nicht verschieden zu betrachten, wenn die Differenz $\varrho_1(t+0) - \varrho_2(t+0)$ unabhängig von t ist. Das Momentenproblem (1) ist nach Herrn Hamburger dann und nur dann bestimmt, wenn der assoziierte Kettenbruch „vollständig" konvergent ist (dieser Konvergenzbegriff verlangt mehr als gleichmäßige Konvergenz).

Das zur Folge $\{c_n\}$ gehörige Momentenproblem (1) soll beschränkt genannt werden, wenn es mindestens eine Lösung $\varrho(t)$ hat derart, daß $\varrho(t)$ außerhalb eines hinreichend großen Intervalls $|t| <$ konst. keine Wachstumstelle besitzt. Mit diesem Falle haben sich A. Markoff[4]), Herr Grommer[5]) und die Herren Hellinger und Toeplitz[6]) beschäftigt. Bekanntlich ist das Momentenproblem (1) gewiß bestimmt, wenn es be-

---

[2]) H. Hamburger, Math. Annalen **81** (1920), S. 289.

[3]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 322–326 und die unten zitierte Dissertation von Herrn Grommer.

[4]) A. Markoff, Acta Math. **19** (1895), S. 93–104, ferner Differenzenrechnung, Leipzig 1896, S. 89–91.

[5]) J. Grommer, Journ. f. Math. **144** (1914), S. 129–134.

[6]) E. Hellinger u. O. Toeplitz, Journ. f. Math. **144** (1914), S. 212–238, 318.

schränkt ist[7]). Dieses hinreichende Kriterium der Bestimmtheit kann verschiedentlich gedeutet werden. Erstens ist seine Prämisse dann und nur dann erfüllt, wenn $P(\lambda^{-1})$ bei hinreichend großem $|\lambda|$ konvergiert, d. h. wenn $\sqrt[n]{c_n} = O(1)$ ist. Ferner ist das Momentenproblem (1) dann und nur dann beschränkt, wenn die zu $K(\lambda)$ gehörige Jacobische Matrix im Hilbertschen Sinne beschränkt ist. Zweitens ist also das Momentenproblem (1) dann und nur dann beschränkt, wenn $|a_n| + |b_n| = O(1)$ ist, und drittens ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die Nullstellen der Näherungsnenner von $K(\lambda)$ mit einer endlichen Strecke abgedeckt werden können.

Von diesen (äquivalenten) hinreichenden Kriterien der Bestimmtheit wurde das erste von vielen Forschern weiterentwickelt. Am weitesten trägt in dieser Richtung ein [im wesentlichen nicht weiter verschärfbarer[8])] Satz von Herrn Carleman[9]), nach welchem bereits die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt[2n]{c_{2n}}|^{-1}$ hinreicht, um die Bestimmtheit des Momentenproblems (1) sicherzustellen. Ein Analogon der zweiten Deutung besagt[10]), daß das Momentenproblem (1) gewiß bestimmt ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{-1}$ divergiert. Aus meinem zitierten Satz ergibt sich endlich als Verallgemeinerung des dritten Beschränktheitskriteriums der unten angegebene qualitative Konvergenzsatz.

Den heranzuziehenden Satz habe ich loc. cit. anläßlich einer quantenmechanischen Fragestellung bewiesen, und es war mit Rücksicht auf die Hellingersche schwingungsmäßige Deutung des Kettenbruchproblems[11]) vorauszusehen, daß derselbe Satz auch für diese Zwecke herangezogen werden kann.

[Zusatz bei der Korrektur (10. 5. 1928). Wie ich inzwischen bemerkt habe, besteht zwischen Quantenmechanik und Kettenbruchlehre ein für die erstere wichtiger *sachlicher* Zusammenhang. Vgl. eine demnächst in der Zeitschr. f. Phys. erscheinende Arbeit.]

---

[7]) Dieser Satz ist nicht zu verwechseln mit dem (im wesentlichen von M. Lerch herrührenden) Satz [s. F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 222–223], daß zu einem *fest vorgelegten* endlichen Intervall gehöriges Momentenproblem notwendigerweise bestimmt (wenn nicht unlösbar) ist; vgl. unten den Stieltjeschen Fall.

[8]) Vgl. Th. J. Stieltjes, Œuvres complètes II, Groningen 1918, S. 520; H. Hamburger, Math. Zeitschr. **4** (1919), S. 191, 209–211.

[9]) T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique, Uppsala 1923, S. 189ff.

[10]) S. die vorige Fußnote.

[11]) E. Hellinger, Math. Annalen **86** (1922), S. 18–29.

Konvergenzsatz. *Es sei $\sigma(t)$ eine für $t \geqq a$ $(> -\infty)$ erklärte nicht abnehmende Funktion mit unendlich vielen Wachstumstellen. Sie sei derart, daß sämtliche Integrale $c_n = \int_a^{+\infty} t^n \, d\sigma(t)$ konvergieren. Über das Wachstum der Folge $\{c_n\}$ wird gar nichts vorausgesetzt. Liegt nicht der Fall der Beschränktheit vor, so ist die Funktion*

$$F(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{\lambda - t} \qquad \Re(\lambda) + 0$$

bei $\lambda = \infty$ nicht regulär und ihre formale Entwicklung $P(\lambda^{-1})$ bei beliebig großem $|\lambda|$ divergent. Hingegen ist der assoziierte Kettenbruch $K(\lambda)$ von $P(\lambda^{-1})$ gleichmäßig konvergent (und zwar stellt er, mit Rücksicht auf die Theorie der Herren Grommer und Hamburger, notwendigerweise die Funktion $F(\lambda)$ dar).

Dieser Konvergenzsatz wurde von A. Markoff loc. cit. in sehr engen Spezialfällen bewiesen. Den ersten Schritt in einer allgemeinen Richtung verdankt man einer Annalen-Arbeit von Herrn Perron[12]), der den Satz unter der Voraussetzung $\liminf \left| \sqrt[n]{\frac{c_n}{n!}} \right| < +\infty$ bewiesen hat (sofern man die Grommerschen Untersuchungen heranzieht). Unser qualitatives Kriterium erlaubt, diese Einschränkung fallen zu lassen. Es ist also für die Konvergenz von $K(\lambda)$ im Falle $a > -\infty$ *jede* Einschränkung der Größenordnung der Momente überflüssig, was — z. B. in Anbetracht der Ergebnisse der Theorie der quasianalytischen Funktionen — zunächst merkwürdig zu sein scheint. Es ist jedoch zu beachten, daß wir über die Bestimmtheit des Momentenproblems, d. h. über die Hamburgersche Vollständigkeit der Konvergenz gar nichts aussagen. Dies liegt in der Natur der Sache und wird bekanntlich bereits durch die Stieltjessche Theorie $(a \geqq 0)$ gefordert[13]). — Z. B. die Perronsche Einschränkung der Größenordnung ist auch für die Bestimmtheit des Momentenproblems hinreichend. Der springende Punkt für uns besteht also darin, daß wir die Frage der gleichmäßigen Konvergenz von dem Momentenproblem losgelöst betrachten.

Der Beweis des Konvergenzsatzes ist sehr einfach. Zunächst sind, wegen $a > -\infty$, die Nullstellen der Näherungsnenner, d. h. der Säkularpolynome, auf einer Halbgeraden gelegen[14]). Also sind nach meinem

---

[12]) Vgl. O. Perron, Math. Annalen 74 (1914), S. 533. Man beachte, daß im Falle $a < 0$ kein korrespondierender Kettenbruch zu existieren braucht. Vgl. übrigens die Schlußbemerkung des Absatzes.

[13]) Vgl. H. Hamburger, loc. cit. [8]).

[14]) Vgl. z. B. S. 368—369 des zitierten Buches von Herrn Perron, ferner E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen I, Berlin 1878, S. 286ff., insb. S. 291, unten, oder Berliner Monatsberichte 1866, S. 443—444.

zitierten Satz die Grenzwerte $\lim_{n=+\infty} A_{ik}^{(n)}(\lambda)$ für komplexe λ gewiß vorhanden. Damit ist die Behauptung bereits bewiesen, da $A_{11}^{(n)}(\lambda)$, von einem festen Vorzeichen abgesehen, bekanntlich[6]) den n-ten Näherungsbruch von $K(\lambda)$ darstellt. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz braucht man mit Rücksicht auf den Vitalischen Satz nicht besonders nachzuweisen, da die Folge der Näherungsbrüche eines beliebigen assoziierten Kettenbruches in jedem Kreisbereich, der an die (reellen) Nullstellen der Näherungsnenner nicht beliebig nahekommt, nach Stieltjes gewiß regulär und gleichmäßig beschränkt ist. — Insbesondere ist also $K(\lambda)$ auch für $\lambda < a$ konvergent.

(Eingegangen am 17. November 1927.)

Diophantische Approximationen und Hermitesche Matrizen.

Erste Mitteilung.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Inhalt.

Seite

§ 1. Die matrizentheoretischen Grundlagen 292
§ 2. Die komplexe Bildkurve $f = f(t)$ 294
§ 3. Der Endlichkeitssatz der Frequenzmoduln 296
§ 4. Die fastperiodischen Matrizen 300
§ 5. Das Spektrum 303
§ 6. Der Carathéodory-Toeplitzsche Gedankenkreis bei fastperiodischen Funktionen 307
§ 7. Übergang zu dem transzendenten Problem: Spektralanalyse . . 310
§ 8. Umkehrung $t = t(f)$ im Großen: die durchschnittliche Maßfunktion 312
§ 9. Die diophantischen Zusammenhänge 316

In dieser ersten Mitteilung soll — unter Ausschaltung von näheren Anwendungen auf Verteilungsprobleme und auf die Theorie der Dirichletschen Reihen — eine Übertragung der Toeplitzschen Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen[1]) auf fastperiodische Funktionen skizziert werden, zu der ich durch eine anregende Bemerkung von Herrn Lichtenstein[2]) und andererseits durch die Heisenbergsche quantenmechanische Kinematik[3]) geführt

---

[1]) O. Toeplitz, Math. Annalen **70** (1910), S. 351—376.

[2]) Vor einiger Zeit habe ich die Laurentschen Differentialsysteme mittels der erzeugenden Funktion der Matrix integriert (Ann. d. Phys. **81** (1926), S. 850), und Herr Lichtenstein hatte den Eindruck, daß dieselbe Methode, bei einer passend zu treffenden Matrizenzuordnung, auch für Differentialsysteme mit fastperiodischen erzeugenden Funktionen valent sein dürfte.

[3]) W. Heisenberg, Math. Annalen **95** (1926), S. 685—688.

worden bin[4]), welche die Theorie der klassischen Schwingungen in die Sprache der unendlichen Matrizen übersetzt. Die Methoden der Toeplitzschen Theorie der Laurentformen scheinen hier eben in dem wesentlichen Punkte zu versagen, die Schlußresultate sind aber — bei sinngemäß gestellter Fragestellung, worauf es hier vor allem ankommt — derart, daß sie in dem periodischen Spezialfall in die Toeplitzsche Theorie übergehen.

Die „fastperiodischen" Matrizen sind qualitativ weniger übersichtlich als die spezielleren Laurentmatrizen. Wohl baut sich die Matrix (gemeint ist eine Matrix der Leerstellen) auch in dem fastperiodischen Fall aus „Wellen" der Fourierkoeffizienten c_n [wobei

$$f(t) \sim \sum c_n e^{i\lambda_n t}$$

ist] auf und enthält nur die c_n (mit Einschluß der parasitären Nullen, $c_k = 0$, die zu Zuständen k von der Amplitude Null gehören). Doch erleidet jetzt die Matrizenwelle, da die λ_n keine arithmetrische Progression mehr bilden, an gewissen, durch das System der λ_n bestimmten Resonanzstellen der Matrix eine sich *fast* periodisch wiederholende Streuung, so daß die Welle nicht mehr periodisch ist, sondern zum Schluß einen ebenso krausen Gang hat, wie die fastperiodische Kurve selbst. Dem entspricht es, daß die Abelschen Gruppen, welche durch die fastperiodischen Matrizen im Sinne von Frobenius dargestellt werden, nicht mehr zyklisch sind, sondern eine diophantisch intrikate Struktur haben.

Aus der Literatur sei außer den Bohrschen Untersuchungen über den Zusammenhang der Theorie der Dirichletschen Reihen und der diophantischen Approximationen mit derjenigen der unendlich vielen Variablen[5]) ein Hinweis von Herrn Toeplitz erwähnt, wonach seine Wachstumtheorie der regulären Potenzreihen sinngemäß auf gewöhnliche Dirichletsche Reihen übertragen werden kann[6]).

Zum Verständnis des Nachstehenden sind Vorkenntnisse aus der Theorie der unendlichen Matrizen mit Rücksicht auf § 1 nicht erforderlich. Sonst benötige ich nur die erste Acta-Arbeit von Herrn Bohr, sowie seinen „Bernoulli-Graeffeschen" Grenzwertsatz[7]).

---

[4]) Vgl. die vorläufige Mitteilung in der Zeitschr. f. Phys. **48** (1928), S. 149ff.

[5]) Vgl. Acta Math. **46** (1925), S. 214.

[6]) O. Toeplitz, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 195.

[7]) H. Bohr, London Math. Soc. Journ. **1** (1926), S. 110. — Vgl. auch H. Bohr, London Math. Soc. Proc. **21** (1923), S. 310; H. Bohr und E. Landau, Gött. Nachr. 1924, S. 170 und H. Bohr, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 40—42.

§ 1.

Die matrizentheoretischen Grundlagen.

Zur Bequemlichkeit des Lesers sollen zunächst einige bekannte Sätze zusammengestellt werden[8]).

Es bezeichne

$$\mathfrak{A} = \|a_{n\,m}\|; \qquad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

eine unendliche Matrix und

$$\mathfrak{A}^{[r]} = \|a_{n\,m}\|^{[r]}; \qquad n, m = 0, \pm 1, \ldots, \pm r$$

ihren r-ten Abschnitt mit $(2r+1)^2$ Elementen, entsprechend

$$\mathfrak{x} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$$

einen Vektor mit den unendlich vielen, nicht notwendig reellen Komponenten x_n $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ und

$$\mathfrak{x}^{[r]} = (x_{-r}, x_{-r+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_r)$$

seinen r-ten Abschnitt mit $2r+1$ Komponenten. Es sei $\mathfrak{A}' = \|a_{m\,n}\|$ die transponierte, $\overline{\mathfrak{A}} = \|\bar{a}_{n\,m}\|$ die konjugierte, $\mathfrak{A}^* = \|\bar{a}_{m\,n}\|$ $(= \overline{\mathfrak{A}'} = \overline{\mathfrak{A}}')$ die „begleitende" Matrix von $\mathfrak{A} = \|a_{n\,m}\|$. Der Vektor $\mathfrak{x}$ heißt normiert, wenn sein Betrag $|\mathfrak{x}| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2}$ $(\leqq +\infty)$ gleich Eins ist. Man setze

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}^{[r]} = \sum_{n=-r}^{+r} \sum_{m=-r}^{+r} a_{n\,m}\, x_n\, \bar{x}_m .$$

Die Matrix $\mathfrak{A}$ heißt beschränkt, wenn es eine nur von $\mathfrak{A}$ abhängige Schranke $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$ gibt derart, daß

$$|\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}^{[r]}| \leqq \mathfrak{m}(\mathfrak{A})\, |\mathfrak{x}^{[r]}|^2$$

gilt für alle $\mathfrak{x}$ und alle r. Unter einer unendlichen Matrix verstehen wir im folgenden nur eine beschränkte unendliche Matrix. Offenbar ist auch $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}^*$ beschränkt. Die Matrizenmultiplikation ist in dem Bereiche der beschränkten Matrizen eindeutig erklärt und führt — ebenso wie die Addition oder die Multiplikation mit Konstanten — aus diesem Bereiche nicht hinaus (erster Hilbertscher Faltungssatz), ist ferner assoziativ (zweiter Hilbertscher Faltungssatz), im allgemeinen freilich nicht kommutativ:

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}), \qquad \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}.$$

---

[8]) Vgl. E. Hellinger und O. Toeplitz, Math. Annalen **69** (1910), S. 288 ff.; O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1907, S. 101—109; O. Toeplitz, Math. Zeitschr. **2** (1918), S. 187—197; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 313—315; A. Wintner, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 228—282.

Es braucht nicht einmal $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ zu gelten. — Ist $\mathfrak{A}^*$ mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar, so heißt $\mathfrak{A}$ normal (eine endliche normale Matrix kann nur lineare Elementarteiler haben).

Die Matrix $\mathfrak{B}$ heißt reziprok zu der beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ und wird mit $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnet, wenn die folgenden (bekanntlich unabhängigen) drei Bedingungen erfüllt sind: $\mathfrak{B}$ ist beschränkt, und es gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und außerdem $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{E} = \|\delta_{n\,m}\|$ die (offenbar beschränkte) Einheitsmatrix bedeutet. — Es gibt höchstens eine Reziproke. Ist $\mathsf{n}(\mathfrak{A})$ die größte, $\mathsf{m}(\mathfrak{A})$ die kleinste Zahl derart, daß für alle r und alle $\mathfrak{x}$

$$\mathsf{n}(\mathfrak{A})\,|\mathfrak{x}|^2 \leqq |\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}^{[r]}| \leqq \mathsf{m}(\mathfrak{A})\,|\mathfrak{x}|^2; \qquad 0 \leqq \mathsf{n}(\mathfrak{A}) \leqq \mathsf{m}(\mathfrak{A}) < +\infty$$

gilt, so ist

$$\mathsf{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) > 0, \qquad \mathsf{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) > 0 \tag{1}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $\mathfrak{A}^{-1}$. Diese Sätze rühren von Herrn Toeplitz her. Wir werden uns auf die Zahl $\mathsf{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ beschränken können, da unsere Matrizen der Normalitätsbedingung $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ genügen werden.

Die komplexe Kugel $|\mathfrak{x}^{[r]}| = 1$ wird durch die Beziehung $\lambda = \mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}^{[r]}$ auf eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ der komplexen λ-Ebene abgebildet. Nach Herrn Hausdorff ist $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ ein konvexer Bereich. Offenbar liegt $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ in $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r+1]})$ und in dem von r unabhängigen Kreise $|\lambda| \leqq \mathsf{m}(\mathfrak{A})$, wobei für $r \to \infty$ mindestens ein Punkt von $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ gegen einen Randpunkt dieses Kreises konvergiert [dies ist ja die Definition von $\mathsf{m}(\mathfrak{A})$]. Die abgeschlossene Hülle der Vereinigung aller $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ ist also ein beschränkter konvexer Bereich $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$. Denn $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ ist der kleinste konvexe Bereich (konvexe Hülle) derjenigen Punkte, die in mindestens einem (also auch in unendlich vielen) $\mathsf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ liegen. Es bezeichne $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ die Menge derjenigen Zahlen λ, bei welchen $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ nicht existiert. $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ heißt Spektrum von $\mathfrak{A}$. Es liegt stets in $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$, ist abgeschlossen, nie leer und sonst (bei passendem $\mathfrak{A}$) eine willkürliche ebene Punktmenge, die also nicht zusammenhängend zu sein braucht. Da $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ konvex ist, so liegt auch die konvexe Hülle $\mathsf{T}(\mathfrak{A})$ von $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ in $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$, braucht jedoch nicht mit $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ identisch zu sein. Bei unseren Matrizen wird aber $\mathsf{T}(\mathfrak{A}) = \mathsf{W}(\mathfrak{A})$ gelten.

Das Spektrum von

$$\mathfrak{A} + c\,\mathfrak{E} \tag{2}$$

entsteht aus dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ durch eine um die komplexe Zahl c bestimmte Translation, bei welcher W mit S starr verbunden ist.

Ist λ_0 außerhalb $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ gelegen, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß die Matrix $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} \equiv \|R_{n\,m}(\lambda)\|$, die, als Funktion von λ aufgefaßt, Resol-

vente von $\mathfrak{A}$ heißt, in dem ganzen Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ existiert, d. h. dieser Kreis liegt ebenfalls außerhalb $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$. Denn $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ ist abgeschlossen. — In einer Umgebung jeder außerhalb $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ gelegenen Stelle λ_0 verhalten sich alle Funktionen $R_{nm}(\lambda)$ regulär; doch kann dieser Satz nicht umgekehrt werden.

Ist $\mathfrak{A}$ beschränkt und $\mathfrak{x}$ normiert, so konvergiert die Reihe

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} x_n \bar{x}_m$$

im Sinne der Theorie der Doppelreihen (jedoch nicht notwendig absolut). Insbesondere gilt also $\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}^{[r]} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}$ für $r \to +\infty$. Der „Wertbereich" $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ besteht daher offenbar aus den Werten, derer die „Kopplungsform" $\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}$ auf der komplexen Hilbertschen Kugelfläche $|\mathfrak{x}| = 1$ fähig ist, und aus den Häufungsstellen dieser Werte.

Die Matrix $\mathfrak{U}$ heißt unitär, wenn $\mathfrak{U}^{-1}$ vorhanden und $= \mathfrak{U}^*$ ist; $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ liegt auf dem Rande des Einheitskreises, und es gilt $\mathbf{T}(\mathfrak{U}) = \mathbf{W}(\mathfrak{U})$. Die Matrix $\mathfrak{H}$ heißt Hermitesch, wenn sie $= \mathfrak{H}^*$ ist; $\mathbf{W}(\mathfrak{H})$, also auch $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$, liegt auf der reellen Achse, und es gilt $\mathbf{T}(\mathfrak{H}) = \mathbf{W}(\mathfrak{H})$, so daß die beiden Endpunkte des Intervalles $\mathbf{W}(\mathfrak{H})$, die nur im Grenzfalle $\mathfrak{H} = c\mathfrak{E}$, $c \gtrless 0$ zusammenfallen, gewiß dem Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$ angehören.

Man kann jede Matrix $\mathfrak{A}$ auf genau eine Weise in der Gestalt $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$ darstellen, wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ Hermitesch sind. Die Hermiteschen Komponenten $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sind beschränkt, wenn $\mathfrak{A}$ es ist. Wegen $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G} - i\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann normal, wenn $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ vertauschbar, d. h. wenn $\mathfrak{H}\mathfrak{G}$ Hermitesch ist. Ferner stellt $\mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}$ die reelle, $\mathfrak{H}_{\mathfrak{x}}$ die imaginäre Komponente der Zahl $\mathfrak{A}_{\mathfrak{x}}$ dar, so daß die Spektra von $\mathfrak{G}$ und $i\mathfrak{H}$ offenbar auf denjenigen Intervallen der Koordinatenachsen liegen, auf welche sich das $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ umbeschriebene achsenparallele Rechteck orthogonal projiziert.

§ 2.

Die komplexe Bildkurve $f = f(t)$.

Es sei $f(t)$ eine nicht notwendig reellwertige fastperiodische Funktion,

$$\mathbf{M}(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, dt \tag{3}$$

ihr Mittelwert, endlich $\mathfrak{n}(f)$ die untere, $\mathfrak{m}(f)$ die obere Grenze der (bekanntlich fastperiodischen) Funktion $|f(t)|$ für $-\infty < t < +\infty$. Es gibt genau ein Paar von reellwertigen fastperiodischen Funktionen $g(t)$, $h(t)$ derart, daß $f(t) = g(t) + ih(t)$ gilt. Denn zugleich mit $f(t)$ ist auch die

konjugierte Funktion $\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$ fastperiodisch. Durch die Beziehung $= f(t)$ wird die t-Achse auf eine beschränkte Punktmenge $\mathfrak{F}_0(f)$ der Ebene der Variable $f = g + ih$ abgebildet. Fügt man zu $\mathfrak{F}_0(f)$ seine Häufungspunkte hinzu, so entsteht eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{F}(f)$, die als der Bildbereich von f bezeichnet werden soll. Der Bildbereich ist zusammenhängend und — mit Ausnahme des trivialen Falles $f(t) \equiv$ konst. — perfekt, da f stetig ist. Die Kennzeichen der Punktmengen, die Bildbereiche $\mathfrak{F}(f)$ von stetigen und periodischen Funktionen f sind, hat bekanntlich Herr Hahn (unter Benutzung des Begriffes „zusammenhängend im Kleinen") entdeckt. — Bei der Lissajouskurve $f(t) = \sin\sqrt{2}t + i\cos t$ ist $\mathfrak{F}(f)$ das Quadrat $|g| \leqq 1$, $|h| \leqq 1$; ob es auch fastperiodische Peanokurven gibt, die auf jedem endlichen Intervall „glatt" sind, scheint nicht bekannt zu sein.

Wie das Beispiel $f(t) = e^{it}$ zeigt, braucht $\mathfrak{F}(f)$ nicht konvex zu sein. Es bezeichne $\mathfrak{W}(f)$ die konvexe Hülle von $\mathfrak{F}(f)$, also z. B. im Falle $f(t) = e^{it}$ den Kreis $|f| \leqq 1$.

Wir werden zu jeder fastperiodischen Funktion $f(t)$ eine beschränkte Matrix $\Theta(f) = \mathfrak{A} = \|a_{nm}\|$ zuordnen, worin die a_{nm} Fourierkoeffizienten von f sind, d. h. es gibt zu jedem Wertepaare n, m eine reelle Zahl ξ derart, daß $a_{nm} = \mathsf{M}(fe_{-\xi})$ gilt, wobei wir $e_\xi = e_\xi(t) = e^{i\xi t}$ setzen. Und zwar ist die Matrix $\Theta(f)$ aus den Fourierkoeffizienten derart aufgebaut, daß sie in dem periodischen Falle in die Laurentmatrix von Herrn Toeplitz übergeht und alle Eigenschaften und Anwendungsgebiete der spezielleren Laurentmatrizen hat. Der Hauptsatz besagt, daß das Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ identisch ist mit dem Bildbereiche $\mathfrak{F}(f)$ von $f(t)$; der Beweis hierfür erfolgt erst in § 5.

Ist $\zeta(t)$ $(\not\equiv 0)$ eine fastperiodische Funktion, so liegt die Zahl

$$\frac{\mathsf{M}(f|\zeta|^2)}{\mathsf{M}(|\zeta|^2)} = \frac{\mathsf{M}(f\zeta\bar{\zeta})}{\mathsf{M}(\zeta\bar{\zeta})}$$

gewiß in $\mathfrak{W}(f)$. In dem periodischen Spezialfall ist dies ein wohlbekannter Schwerpunktsatz. Im allgemeinen Falle ist eine gewisse Vorsicht geboten, doch kann der Beweis mittels einer in der Bohrschen Theorie sehr geläufigen Schlußweise ohne weiteres geführt werden. Nun werden wir in § 4 sehen, daß bei jeder fastperiodischen Matrix $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ und bei jedem $r \geqq 0$ zu jedem der Bedingung $\sum_{n=-r}^{+r} |x_n|^2 = 1$ genügenden System von $2r+1$ Zahlen x_n eine den Bedingungen

$$\mathfrak{A}_\xi^{[r]} = \mathsf{M}(f\zeta\bar{\zeta}), \qquad 1 = \mathsf{M}(\zeta\bar{\zeta})$$

genügende fastperiodische Funktion $\zeta(t)$ existiert, wobei wieder

$$\xi^{[r]} = (x_{-r}, x_{-r+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_r)$$

ist. Folglich liegt die Zahl $\mathfrak{A}_{\xi}^{[r]}$ in $\mathfrak{w}(f)$, wie auch dabei der Vektor $\xi^{[r]}$, der auf der Mannigfaltigkeit $|\xi^{[r]}| = 1$ liegt, sein mag, d. h. die $\mathbf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ und daher auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegen gewiß in $\mathfrak{w}(f)$. Nun ist aber $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ nach Definition die konvexe Hülle von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, und ebenso ist $\mathfrak{w}(f)$ diejenige von $\mathfrak{s}(f)$, so daß $\mathfrak{w}(f) = \mathbf{T}(\mathfrak{A})$ gilt, da nach dem erwähnten Hauptsatz $\mathfrak{s}(f) = \mathbf{S}(\mathfrak{A})$ ausfällt. Folglich liegt $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ in $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$, während $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ nach § 1 stets in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegen muß, so daß also $\mathbf{W}(\mathfrak{A}) = \mathbf{T}(\mathfrak{A})$, d. h.

$$\mathbf{W}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{w}(f); \qquad \mathfrak{A} = \Theta(f)$$

gilt. Die konvexe Hülle der Kurve $f = f(t)$ ist also, wenn man von den Randpunkten der Bereiche nötigenfalls absieht, identisch mit dem Bilde, das der Hilbertschen Kugel $|\xi| = 1$ vermöge der Kopplungsform $f = \mathfrak{A}_{\xi}$ von $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ in der f-Ebene entspricht. In dem periodischen Spezialfall ist dieser Satz auf einem etwas weniger direkten Wege von Herrn Toeplitz[9]) gefunden worden. — Aus

$$\mathbf{W}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{w}(f)$$

folgt offenbar

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{m}(f), \qquad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{n}(f).$$

§ 3.

Der Endlichkeitssatz der Frequenzmoduln.

Bevor ich zu der Matrizenzuordnung übergehe, will ich eine Bemerkung über die Frequenzen der Funktionen der fastperiodischen Funktion $f(t)$ vorausschicken. Man könnte eigentlich auch ohne den „Endlichkeitssatz", um den es sich dabei handelt, Auskommen finden[4]), doch ist dieser für eine nähere Beherrschung der Matrizen $\Theta(f)$ von der größten Bedeutung. — Auch werden wir es bereits bei dem Reziprokenproblem von $\Theta(f)$ mit den beiden Funktionen

$$f(t), \qquad \frac{1}{f(t)}$$

gleichzeitig zu tun haben, und es wäre dabei, wenn der Endlichkeitssatz nicht zur Verfügung stehen würde, notwendig, die Matrix $\Theta(f)$ mit einer anderen, ebenfalls zu f gehörigen zu ersetzen (nämlich eine andere Besetzung der Leerstellen durch Nullen und Fourierkoeffizienten vorzunehmen und dabei „mehr" Nullen als sonst zu verwenden), wenn f^{-1} mit in Betracht gezogen wird, indem sonst die auf Matrizen übertragene Multiplikationsregel

$$f\frac{1}{f} = 1$$

---

[9]) O. Toeplitz, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 197.

unrichtig sein könnte. Der Endlichkeitssatz ergibt nun hier, daß $\Theta(f)$ keiner Abänderung bedarf (ein „Platzmachen" in $\Theta(f)$ durch weitere paraitären Nullen ist also überflüssig).

Diejenigen reellen Zahlen ξ, für welche die Funktion $\mathbf{M}(fe_{-\xi})$ von Null verschieden wird, mögen als die eigentlichen Frequenzen von f bezeichnet werden. Es gibt höchstens abzählbar unendlich viele eigentliche Frequenzen (die jedoch auch überall dicht liegen können). Eine Zahl ξ, welche aus endlich vielen eigentlichen Frequenzen von f homogen-linear mit ganzzahligen Koeffizienten $(= 0, \pm 1, \ldots)$ kombiniert werden kann, nennen wir eine Resonanzfrequenz von f. Ist $\{\xi_n\}$ eine reelle Zahlenfolge $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, in welcher $\xi_n \neq \xi_m$ für $n \neq m$ gilt und die alle eigentlichen Frequenzen von $f(t)$ enthält (und sonst willkürliche weitere Zahlen enthalten kann), so bezeichnen wir diese schlechthin als ein Frequenzsystem von $f(t)$. Wir sagen endlich, $\{\xi_n\}$ sei ein zulässiges Frequenzsystem von $f(t)$, wenn es ein Frequenzsystem ist, das einen Modul bildet und derart numeriert ist, daß

$$\xi_n = -\xi_{-n}; \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \quad \text{also} \quad \xi_0 = 0 \tag{4}$$

gilt. Damit also $\{\xi_n\}$ ein zulässiges Frequenzsystem von f ist, muß außer (4) und

$$\xi_n \neq \xi_m; \quad n \neq m \tag{5}$$

die Bedingung erfüllt sein, daß zu beliebigen n, m, j, k $(= 0, \pm 1, 2, \ldots)$ ein l mit $\xi_l = j\xi_n + k\xi_m$ vorhanden ist, und es muß jede eigentliche Frequenz von f ein ξ_n sein (jedoch nicht umgekehrt). Offenbar hat jedes f unendlich viele zulässige Frequenzsysteme. Das eigentliche Frequenzsystem ist im allgemeinen kein zulässiges. — Entsprechend wollen wir sagen, $\{\xi_n\}$ sei ein zulässiges Frequenzsystem des fastperiodischen Funktionen*paares* $f_1(t), f_2(t)$, wenn $\{\xi_n\}$ für f_1 und zugleich für f_2 zulässig ist, was durch passende Ergänzung der beiden eigentlichen Frequenzsysteme stets erreicht werden kann.

Die Bohrsche Äquivalenz

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(fe_{-\xi_n})\, e_{\xi_n}(t) \tag{6}$$

wollen wir wie folgt lesen: $\{\xi_n\}$ ist ein Frequenzsystem der fastperiodischen Funktion f. Aus (6) folgt bekanntlich

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathbf{M}(fe_{-\xi_n})|^2 = \mathbf{M}(|f|^2), \tag{7}$$

und daraus der Eindeutigkeitssatz. Man erinnere sich ferner daran, daß Summe und Produkt fastperiodischer Funktionen, sowie die Grenzfunktionen

von (für $-\infty < t < +\infty$) gleichmäßig konvergenten fastperiodischen Funktionen fastperiodisch sind. — Aus

$$f_\nu(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(f_\nu e_{-\xi_n})\, e_{\xi_n}(t); \qquad \nu = 1, 2 \tag{8}$$

folgt

$$f_1(t) + f_2(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathbf{M}(f_1 e_{-\xi_n}) + \mathbf{M}(f_2 e_{-\xi_n})]\, e_{\xi_n}(t), \tag{9}$$

nicht aber

$$f_1(t)\, f_2(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(f e_{\xi_m - \xi_n})\, \mathbf{M}(f e_{-\xi_m}) \Big] e_{\xi_n}(t), \tag{10}$$

da $f_1 f_2$ eigentliche Frequenzen haben kann, die die Faktoren nicht haben. — Wir wollen sagen, (6) sei eine zulässige Darstellung von f, wenn in (6) die Folge $\{\xi_n\}$ ein zulässiges Frequenzsystem von f ist. Dann können wir die Bohrsche Multiplikationsregel wie folgt aussprechen: Steht unter (8) eine zulässige Darstellung des Paares f_1, f_2, so ist (10) gewiß richtig, und zwar ist dann (10) eine zulässige Darstellung von $f_1 f_2$ [die absolute Konvergenz der inneren Summe in (10) ist durch (7) gesichert].

Mit Rücksicht auf den Eindeutigkeitssatz gilt also

$$\mathbf{M}(F_1 F_2 e_{-\xi_m}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(F_1 e_{\xi_j - \xi_m})\, \mathbf{M}(F_2 e_{-\xi_j}), \tag{11}$$

wenn $\{\xi_n\}$ ein zulässiges Frequenzsystem des Paares F_1, F_2 ist. Es sei nun $\{\xi_n\}$ ein zulässiges Frequenzsystem des Paares f_1, f_2. Dann ist $\{\xi_n\}$ offenbar auch für das Paar $F_1 = f_2$, $F_2 = f_1 e_\xi$ zulässig, und (11) geht wegen

$$e_{\xi+\eta} = e_\xi e_\eta \tag{12}$$

über in

$$\mathbf{M}(f_1 f_2 e_{\xi_n - \xi_m}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(f_1 e_{\xi_n - \xi_j})\, \mathbf{M}(f_2 e_{\xi_j - \xi_m}). \tag{13}$$

Es sei nochmals betont, daß diesem Faltungssatze, auf welchem unsere Matrizenzuordnung beruhen wird, ganz wesentlich die (stets erfüllbare) Annahme zugrunde liegt, daß $\{\xi_n\}$ für das Funktionenpaar f_1, f_2 ein zulässiges Frequenzsystem darstellt.

Es sei $\{\xi_n^0\}$ das eigentliche Frequenzsystem von f_1 und $\{\eta_n^0\}$ dasjenige von f_2 (diese Systeme können auch endlich sein, sind aber, abgesehen von dem trivialen Falle $f \equiv 0$, zu welchem etwa die einzige Frequenz $\xi_0^0 = 0$ zugeordnet werden möge, nie leer). Wir wollen sagen, $\{\eta_n^0\}$ sei ein „Teiler" von $\{\xi_n^0\}$, und hierfür kurz $f_1 \supset f_2$ oder $f_2 \subset f_1$ schreiben, wenn jeder η_n^0 aus endlich vielen ξ_n^0 homogen-linear mit rationalen ganzen Koeffizienten kombiniert werden kann, so daß also jedes zulässige Frequenzsystem von f_1 auch für f_2 ein zulässiges Frequenzsystem ist. Es gilt nun der folgende Endlichkeits-

atz: Ist $F(f)$ eine auf der abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{H}(f)$ der komplexen -Ebene erklärte stetige Funktion [$\mathfrak{H}(f)$ ist, wie erinnerlich, die Bildkurve ler fastperiodischen Funktion nebst den Häufungspunkten], so ist die Funktion $F(f(t))$ fastperiodisch und $< f(t)$.

Beweis. Da $\mathfrak{H}(f)$ eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge st, so folgt aus dem Ergänzungssatz von Herrn Tietze[10]) und aus dem weidimensionalen Weierstraßschen Approximationssatz die Existenz einer Folge von rationalen ganzen Funktionen $F_\nu(g, h)$ derart, daß gleichmäßig auf der Punktmenge $\mathfrak{H}(f)$ der Ebene $f = g + ih$ die Grenzgleichung $F_\nu(g, h) \to F(f)$, $\nu \to +\infty$ gilt. Man hat also gleichmäßig für alle t

$$F_\nu(g(t), h(t)) \to F(g(t) + ih(t)) = F(f(t)),$$

wobei $f(t) = g(t) + ih(t)$, $g(t) \gtrless 0$, $h(t) \gtrless 0$ gesetzt ist. Diese für $-\infty < t < +\infty$ gleichmäßig geltende Grenzgleichung, welche die Fastperiodizität von $F(f(t))$ ergibt, bleibt nach Multiplikation mit $e_{-\xi}(t)$, wobei ξ eine fest gewählte reelle Zahl ist, offenbar erhalten. Andererseits darf der Operator $\mathfrak{M}$ im Falle gleichmäßiger Konvergenz mit einem Grenzübergang $\nu \to +\infty$ gewiß vertauscht werden. Folglich gilt

$$\mathfrak{M}(F_\nu(g, h)\, e_{-\xi}) \to \mathfrak{M}(F(f)\, e_{-\xi}). \tag{14}$$

Es sei nun $\xi \neq 0$ eine reelle Zahl, die keine Resonanzfrequenz von $f(t)$ ist. Die Behauptung $F(f(t)) < f(t)$ wird offenbar bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß ξ keine eigentliche Frequenz von F ist, d. h. daß der Ausdruck rechterhand in (14) verschwindet. Erst recht genügt es also zu zeigen, daß der Ausdruck linkerhand in (14) bei jedem ν verschwindet, d. h. daß ξ keine eigentliche Frequenz von $F_\nu(g(t), h(t))$ ist. Nun kann aber ξ für F_ν nicht einmal eine Resonanzfrequenz sein. Wegen $f(t) = g(t) + ih(t)$, $\bar{f}(t) = g(t) - ih(t)$ ist nämlich jede eigentliche Frequenz von g oder h eine Resonanzfrequenz von f. Folglich ist ξ weder für $g(t)$ noch für $h(t)$ eine eigentliche Frequenz. Mithin ist ξ auch für $F_\nu(g(t), h(t))$ keine Resonanzfrequenz, da F_ν eine rationale ganze Operation ist, für welche nach Herrn Bohr die formalen Rechenregeln gelten. Damit ist der Endlichkeitssatz bewiesen. — In abstracto handelt es sich um eine triviale körpertheoretische Bemerkung.

Wir werden später auch den wegen $f > \bar{f}$ ebenfalls trivialen Satz $f > |f|^2 = f\bar{f}$ benötigen.

Wenden wir nun den Endlichkeitssatz auf den Fall

$$F(f) = \frac{1}{\lambda - f}$$

---

[10]) H. Tietze, J. f. Math. **145** (1915), S. 10. Vgl. L. E. J. Brouwer, Math. Annalen **79** (1919), S. 209–211, 403.

an. Die Annahme, F sei stetig, besagt dann, daß die Zahl λ außerhalb $\mathfrak{H}(f)$ liegt. In diesem Falle (sonst ist die Funktion nicht einmal beschränkt, also auch nicht fastperiodisch) gilt also

$$\frac{1}{\lambda - f} \subset f.$$

Mit $\lambda = 0$ folgt daraus der merkwürdig klingende, jedoch, wie wir sehen, ziemlich flach gelegene Satz, daß jede eigentliche Frequenz von $[f(t)]^{-1}$ aus endlich vielen Frequenzen von $f(t)$ homogen-linear mit ganzzahligen Koeffizienten kombiniert werden kann (sobald beide Funktionen fastperiodisch sind).

§ 4.

Die fastperiodischen Matrizen.

Wir ordnen nun jedem zulässigen Frequenzsystem $\{\xi_n\}$ von $f(t)$ die unendliche Matrix

$$\mathfrak{A} = \Theta(f) = \|\mathbf{M}(f e_{\xi_n - \xi_m})\|; \qquad n, m = 0, \pm 1, \ldots \tag{15}$$

zu; die Folge $\{\xi_n\}$ ist durch f nicht eindeutig bestimmt, sie möge irgendwie fest gewählt werden. In diesem Sinne wollen wir $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ als *die* fastperiodische Matrix von f bezeichnen. Das (n, m)-te Element der Matrix ist gleich $\mathbf{M}(f e_{-\eta_{nm}})$, wenn $\eta_{nm} = \xi_m - \xi_n$ gesetzt wird, sie enthält also nur die Fourierkoeffizienten von f, einschließlich die Null, da ja $\mathbf{M}(f e_{-\eta_{nm}})$ der zu der Frequenz $\eta_{nm} = \xi_m - \xi_n$ gehörige Fourierkoeffizient ist, der verschwindet oder nicht, je nachdem η_{nm} eine eigentliche oder eine nicht eigentliche Frequenz von f darstellt (von dem trivialen Fall $f \equiv 0$, wo es keine eigentliche Frequenz gibt, möge man absehen). Beachtet man, daß $\{\xi_n\}$ ein Modul ist, so ersieht man, daß jede in $\Theta(f)$ einmal eintretende Zahl in $\Theta(f)$ unendlich vielmal vorkommt. Unter Beachtung von (4) und (5) erkennt man ferner, daß jede Zeile und jede Kolonne jeden nicht verschwindenden Fourierkoeffizienten $\mathbf{M}(f e_{-\eta})$ von $f(t)$ einmal und nur einmal enthält. Die fastperiodischen Matrizen sind also ähnlich gebaut wie die zu dem periodischen Spezialfall gehörigen Laurentmatrizen, bei welchen $\xi_n = n$, also

$$\Theta(f) = \|\mathbf{M}(f e_{n-m})\|$$

gilt (wenn 2π die Periode ist). Nur sind in dem allgemeinen Falle zwischen die „eigentlichen" Matrizenelemente auf eine *fast* periodische Weise viele „parasitären" Nullen gesät [ohne welche die zu dem Körpercharakter der Zuordnung

$$f(t) \rightleftarrows \Theta(f)$$

notwendige Bedingung (18) nicht erfüllt sein würde]. — Wegen $e_{\xi_n - \xi_n} = e_0 \equiv 1$

sind alle Diagonalelemente der Matrix gleich dem Mittelwerte $\mathfrak{M}(f)$. Man möge hierzu die Heisenbergsche *Säkular*störungsrechnung[11]) sowie meine unter [4]) zitierte Note vergleichen. — Zwei ganz verschiedene fastperiodische Funktionen können eine und dieselbe Matrix als fastperiodische Matrix zulassen. Der matrizenmäßige Vergleich der beiden führt nach gewissen Permutationsbetrachtungen[4]) in die Bohrsche Theorie der unendlich vielen Veränderlichen[5]) hinüber; vgl. den vorletzten Absatz von § 9 (S. 319).

Aus (4), (5), (15) folgt leicht, daß $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ dann und nur dann symmetrisch $(= \mathfrak{A}')$ ist, wenn $f(t) \equiv f(-t)$ gilt, und dann und nur dann schiefsymmetrisch $(= -\mathfrak{A}')$, wenn $f(t) \equiv -f(-t)$ wird. — Von der Realität von $\mathfrak{A}$ oder $f(t)$ ist dabei nicht gesprochen. Damit $\Theta(f)$ reell und symmetrisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß $f(t)$ als eine Kosinusreihe mit reellen Koeffizienten geschrieben werden kann, während $f(t)$ dann und nur dann eine reelle Sinusreihe ist, wenn $\Theta(f)$ die Form $i\mathfrak{B}$ hat, wobei $\mathfrak{B}$ eine reelle schiefsymmetrische Matrix bezeichnet; vgl. nämlich (28) weiter unten.

Die begleitende Matrix $\mathfrak{A}^* = \overline{\mathfrak{A}'}$ von $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ ist die fastperiodische Matrix $\Theta(\bar{f})$ der konjugierten Funktion. Aus (15) folgt nämlich wegen

$$\bar{e}_\eta = e_{-\eta} \qquad (e_\eta = e^{i\eta t},\ \eta \gtrless 0,\ -\infty < t < +\infty) \tag{16}$$

offenbar

$$\overline{\mathfrak{A}} = \|\mathfrak{M}(\bar{f}\,\bar{e}_{\xi_n - \xi_m})\| = \|\mathfrak{M}(\bar{f} e_{\xi_m - \xi_n})\|,$$

also

$$\mathfrak{A}^* = \overline{\mathfrak{A}}' = \|\mathfrak{M}(\bar{f} e_{\xi_m - \xi_n}\|' = \|\mathfrak{M}(\bar{f} e_{\xi_n - \xi_m})\|,$$

und daher wegen (15)

$$\mathfrak{A}^* \equiv \Theta^*(f) = \Theta(\bar{f}); \qquad \mathfrak{A} = \Theta(f). \tag{17}$$

Ist nun $f_2 < f_1$ [also z. B. $f_2 = \bar{f}_1$ oder $f_2 = (\lambda - f_1)^{-1}$, wobei λ außerhalb $\mathfrak{H}(f)$ liegt], und bedeutet $\{\xi_n\}$ ein zulässiges Frequenzsystem von f_1, so ist $\{\xi_n\}$ auch für f_2 zulässig, es gilt also dann (13). Für (13) können wir aber, wenn die fastperiodischen Matrizen $\Theta(f_1)$, $\Theta(f_2)$ unter Zugrundelegung dieser ξ_n gebildet werden, wegen (15) auch

$$\Theta(f_1 f_2) = \Theta(f_1)\,\Theta(f_2)$$

schreiben, linkerhand gewöhnliche, rechterhand Matrizenmultiplikation verstanden. Wegen $f_1 f_2 = f_2 f_1$ ist also $\Theta(f_1)$ mit $\Theta(f_2)$ offenbar vertauschbar

$$\Theta(f_1)\,\Theta(f_2) = \Theta(f_2)\,\Theta(f_1) = \Theta(f_1 f_2). \tag{18}$$

Setzt man hier $f_1 = f$, $f_2 = \bar{f}$, so folgt daraus unter Beachtung von (17)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A} = \Theta(|f|^2); \qquad \mathfrak{A} = \Theta(f), \tag{19}$$

---

[11]) Loc. cit. [3]), S. 700—702.

so daß also jede fastperiodische Matrix mit ihrer begleitenden Matrix vertauschbar, d. h. normal ist. Aus (18) folgt ferner

$$\Theta(f^n) = (\Theta(f))^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Dies gilt, unter der nullten Potenz jeder Matrix die Einheitsmatrix $\mathfrak{E} = \|\delta_{nm}\|$ verstanden, auch für $n = 0$:

$$\Theta(1) = \mathfrak{E}. \tag{21}$$

Denn wegen (3), (12), (15) und mit Rücksicht auf

$$\mathbf{M}(e_\alpha) = 0, \quad \alpha \gtrless 0; \quad \mathbf{M}(e_0) = \mathbf{M}(1) = 1$$

ist

$$\Theta(1) \equiv \|\mathbf{M}(e_{\xi_n - \xi_m})\| = \|\delta_{nm}\|.$$

Aus (9) geht endlich mit Rücksicht auf den Eindeutigkeitssatz die Rechenregel

$$\Theta(c_1 f_2 + c_2 f_2) = c_1 \Theta(f_1) + c_2 \Theta(f_2) \tag{22}$$

hervor. Ist also $F(X) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu X^\nu$ ein Polynom der Variable X, und setzt man $F(\mathfrak{A}) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \mathfrak{A}^\nu$, so gilt

$$\Theta(F(f)) = F(\Theta(f)). \tag{23}$$

Ist allgemeiner $F(f)$ eine auf der Punktmenge $\mathfrak{H}(f)$ erklärte stetige Funktion, so kann man (23) als eine Definitionsgleichung von $F(\Theta(f))$ auffassen; man beachte dabei den Endlichkeitssatz $F(f) \subset f$.

Wir beweisen jetzt — bisher haben wir es nicht benötigt —, daß jede fastperiodische Matrix $\Theta(f)$ beschränkt ist. Es sei zunächst die Zahlenfolge $\{x_n\}$ derart, daß durch

$$\zeta(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e_{\xi_n}(t), \tag{24}$$

wobei $\{\xi_n\}$ ein zulässiges Frequenzsystem von $f(t)$ bedeutet, eine fastperiodische Funktion $\zeta(t)$ erklärt wird. Dann ist auch $\bar{\zeta}(t)$ fastperiodisch, und wegen (16) gilt

$$\bar{\zeta}(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{x}_n e_{-\xi_n}(t). \tag{25}$$

Die zweimalige Anwendung der Bohrschen Multiplikationsregel ergibt aus (6), (24), (25) wegen

$$x_n = \mathbf{M}(\zeta e_{-\xi_n}), \qquad \bar{x}_m = \mathbf{M}(\bar{\zeta} e_{\xi_m})$$

offenbar, daß

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(f e_{\xi_n - \xi_m}) \bar{x}_m = \mathbf{M}(f \zeta \bar{\zeta}) \tag{26}$$

st. Es sei nun ein der Bedingung $\sum_{n=-r}^{+r} |x_n|^2 = 1$ genügender Vektor $\mathfrak{x}^{[r]}$ mit $2r+1$ Komponenten gegeben und man setze $x_n = 0$ für $|n| > r$. Dann ist (24) eine endliche fastperiodische Summe derart, daß der quadratische Mittelwert $\mathbf{M}(\zeta\bar{\zeta}) = \mathbf{M}(|\zeta|^2)$ wegen (7) gleich Eins ist, und (26) geht über in

$$\sum_{n=-r}^{r} \sum_{m=-r}^{r} \mathbf{M}(f e_{\xi_n - \xi_m}) x_n \bar{x}_m = \mathbf{M}(f|\zeta|^2),$$

d. i. in unseren früheren Bezeichnungen

$$\mathfrak{A}_{\xi}^{[r]} = \mathbf{M}(f|\zeta|^2); \qquad \mathfrak{A} = \Theta(f).$$

Nun ist aber, da $\mathfrak{m}(f)$ die obere Grenze von $|f(t)|$ bezeichnet,

$$|\mathbf{M}(f|\zeta|^2)| \leqq \mathfrak{m}(f)\, \mathbf{M}(|\zeta|^2) = \mathfrak{m}(f).$$

Es gibt also eine nur von $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ abhängige Schranke, nämlich $\mathfrak{m}(f)$, derart, daß für alle der Bedingung $|\mathfrak{x}^{[r]}|^2 = 1$ genügenden $\mathfrak{x}$ bei jedem r die Ungleichung $|\mathfrak{A}_{\xi}^{[r]}| \leqq \mathfrak{m}(f)$ gilt. Folglich ist $\Theta(f)$ beschränkt.

§ 5.

Das Spektrum.

Ist die Zahl λ außerhalb der Punktmenge $\mathfrak{F}(f)$ gelegen, so ist $(\lambda - f(t))^{-1}$ fastperiodisch. Es gilt ferner nach § 3

$$f > (\lambda - f) > (\lambda - f)^{-1}.$$

Man setze nun in (18)

$$f_1 = \lambda - f, \qquad f_2 = (\lambda - f)^{-1}$$

und beachte, daß dann wegen (21), (22)

$$\Theta(f_1 f_2) = \Theta(1) = \mathfrak{E}, \qquad \Theta(f_1) = \Theta(\lambda - f) = \lambda\mathfrak{E} - \Theta(f)$$

gilt. So folgt

$$(\lambda\mathfrak{E} - \Theta(f))\, \Theta\left(\frac{1}{\lambda - f}\right) = \Theta\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)(\lambda\mathfrak{E} - \Theta(f)) = \mathfrak{E},$$

mithin, da außer f auch $\frac{1}{\lambda - f}$ fastperiodisch, also $\Theta\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)$ beschränkt ist,

$$(\lambda\mathfrak{E} - \Theta(f))^{-1} = \Theta\left(\frac{1}{\lambda - f}\right). \tag{27}$$

Liegt also λ außerhalb der Bildkurve $\mathfrak{F}(f)$, so ist $(\lambda\mathfrak{E} - \Theta(f))^{-1}$ vorhanden, d. h. λ liegt dann außerhalb des Spektrums $\mathfrak{S}(\Theta(f))$. Der Zweck dieses Paragraphen, der den elementaren Teil der Theorie der fastperiodischen Matrizen zu einem Abschluß bringt, ist der Nachweis der Umkehrung, also von $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{S}(\Theta(f))$. Alles, was wir bisher behaupten können, besteht darin,

daß $\Theta\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)$ keine fastperiodische Matrix ist, wenn λ in $\mathfrak{H}(f)$ liegt. Es wäre aber — man vgl. nur die Bemerkungen von § 6 betr. die unitären fastperiodischen Matrizen — sehr wohl denkbar, daß $\lambda \mathfrak{E} - \Theta(f)$ trotzdem eine (nicht fastperiodische) beschränkte Reziproke hat, daß also λ wohl in $\mathfrak{H}(f)$, nicht aber auch in $\mathfrak{H}(\Theta(f))$ liegt. Der Nachweis dafür, daß dies nicht der Fall ist, kann — ganz im Rahmen des methodischen Grundgedankens der Toeplitzschen Reziprokentheorie — ohne weiteres auf den nichtnegativ definiten Hermiteschen Fall zurückgeführt werden. Damit ist aber noch nicht alles gewonnen, da die einfachen Schlußweisen, welche Herr Toeplitz in dem Hermiteschen Fall der Laurentmatrizen verwendet, bei beliebigen fastperiodischen Hermiteschen Matrizen versagen. Ich werde in diesem Paragraphen mit dem Grenzwertsatz (29) von Herrn Bohr zum Ziele gelangen. In § 8 wird sich herausstellen, daß die feineren und weitertragenden Wege der Hellingerschen Theorie[23]) auch bei den fastperiodischen Matrizen gangbar sind. Man benötigt freilich hierzu — entsprechend der weniger groben Zielsetzung — ganz wesentlich feinere Hilfsmittel, als die der ersten sechs Paragraphen sind.

Wir bemerken vorerst, daß die fastperiodische Matrix $\Theta(f)$ dann und nur dann Hermitesch ist, wenn die Funktion $f(t)$ durchweg reell ist. Der erste Teil der Behauptung folgt offenbar aus (17). Es sei umgekehrt $\Theta(f)$ Hermitesch, also wegen (15)

$$\mathfrak{M}(f e_{\xi_n - \xi_m}) = \overline{\mathfrak{M}(f e_{\xi_m - \xi_n})}$$

für alle m und n. Setzt man hier $m = 0$, so bleibt wegen (4)

$$\mathfrak{M}(f e_{\xi_n}) = \overline{\mathfrak{M}(f e_{-\xi_n})} \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots). \tag{28}$$

Geht man nun in (6) unter Beachtung von (16) und (28) zu den konjugierten Größen über, so folgt $f(t) \equiv \overline{f(t)}$, w. z. b. w.

Wir benötigen ferner den folgenden Grenzwertsatz von Herrn Bohr[7]): Ist die (nicht notwendig reellwertige) Funktion $f(t)$ fastperiodisch, so gilt

$$\lim_{n=+\infty} \sqrt[2n]{\mathfrak{M}(|f|^{2n})} = \mathfrak{m}(f), \tag{29}$$

also, da auch $\left|\sqrt{f(t)}\right|$ fastperiodisch ist (§ 3), auch

$$\lim_{n=+\infty} \sqrt[n]{\mathfrak{M}(|f|^{n})} = \mathfrak{m}(f) \tag{30}$$

[woraus übrigens nach einer wohlbekannten Schwarzschen Schlußweise[13])

[13]) Vgl. z. B. E. Schmidt, Math. Annalen **63** (1907), S. 455–457; H. Weyl, Math. Annalen **97** (1926), S. 342.

olgt[4]), daß mit Ausnahme des trivialen Falles $\mathfrak{m}(f) = 0$, wo $f(t) \equiv 0$ ilt, jedes $\mathbf{M}(|f|^n) > 0$ und

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\mathbf{M}(|f|^{n+1})}{\mathbf{M}(|f|^n)} = \mathfrak{m}(f)$$

t]. — Man beachte ferner, daß für $|\lambda| > \mathfrak{m}(f)$ die nach „Momenten" ortschreitende C. Neumannsche Entwicklung

31) $$\mathbf{M}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}(f^n)}{\lambda^{n+1}}; \quad |\lambda| > \mathfrak{m}(f)$$

ilt, da, wenn die Zahl λ absolut $> \mathfrak{m}(f)$ gewählt wird, die Reihe

$$\frac{1}{\lambda - f(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f(t))^n}{\lambda^{n+1}}$$

vegen $|(f(t))^n| \leqq \mathfrak{m}(f^n) = (\mathfrak{m}(f))^n$ für $-\infty < t < +\infty$ gleichmäßig konvergiert, so daß der Operator $\mathbf{M}$ gliedweise angewandt werden darf [es wird sich übrigens zum Schluß herausstellen, daß die Reihe (31) nicht auch für $|\lambda| > \mathfrak{m}(f) - \varepsilon$ konvergiert, wie klein dabei auch $\varepsilon > 0$ sein mag].

Es sei jetzt $f(t)$ reellwertig. Dann ist $\mathfrak{F}(f)$ ein auf der reellen Achse der λ-Ebene gelegenes endliches Intervall, dessen beiden Endpunkte, die Q und P heißen mögen, nur in dem Grenzfalle $f(t) = \text{const.}$ zusammenfallen. Es sei $f(t) \geqq 0$. Dann ist der obere Endpunkt P von $\mathfrak{F}(f)$ offenbar $\lambda = \mathfrak{m}(f)$. Da jetzt $|f| = f$ gilt, so ist die Reihe (31) wegen (30) nur für $|\lambda| > \mathfrak{m}(f)$, nicht aber auch für $|\lambda| > \mathfrak{m}(f) - \varepsilon$ konvergent, während die in (31) linkerhand stehende Funktion in dem Gebiete, das aus der λ-Ebene nach Anbringen des Schlitzes $0 \leqq \lambda \leqq \mathfrak{m}(f)$ entsteht, wegen $0 \leqq f(t) \leqq \mathfrak{m}(f)$ offenbar regulär ist. Da nun auf der Kreislinie $|\lambda| = \mathfrak{m}(f)$ der Divergenz zufolge mindestens ein singulärer Punkt liegen muß, so ist dieser der Punkt $\lambda = \mathfrak{m}(f)$, d. h. der obere Endpunkt P. Es ist aber, wenn $(\lambda \mathfrak{E} - \Theta(f))^{-1} = \|R_{nm}(\lambda)\|$ die Resolvente von $\Theta(f)$ bedeutet, wegen (15) und (27)

32) $$R_{nm}(\lambda) = \mathbf{M}\left(\frac{e_{\xi_n - \xi_m}}{\lambda - f}\right),$$

also insbesondere[13])

33) $$R_{nn}(\lambda) = R_{00}(\lambda) = \mathbf{M}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right),$$

und in § 1 ist betont worden, daß an einer Stelle, die außerhalb des Spektrums liegt, jedes Element der Resolvente, also auch $R_{00}(\lambda)$, regulär sein muß. Es gilt also das folgende

[13]) Die Formeln (32), (33) gelten übrigens offenbar bei jeder fastperiodischen Funktion [außerhalb $\mathfrak{F}(f)$].

Lemma. Ist $f(t) \gtrless 0$, so liegt der obere Endpunkt P von $\mathfrak{s}(f)$ gewiß in $\mathbf{S}(\Theta(f))$.

Man beachte nun die folgenden beiden Tatsachen:

I. Ist $\mathfrak{A}$, also auch $-\mathfrak{A}$, eine Hermitesche Matrix, was in dem fastperiodischen Falle $\mathfrak{A} = \Theta(f)$, $-\mathfrak{A} = \Theta(-f)$ die Reellwertigkeit von $f(t)$ bedeutet, so entsteht das (auf der reellen Achse gelegene) Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ aus demjenigen von $-\mathfrak{A}$ durch Spiegelung an dem Punkte $\lambda = 0$, und ebenso ist $\mathfrak{s}(f)$ das Spiegelbild von $\mathfrak{s}(-f)$.

II. Ersetzt man $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A} + c\mathfrak{E}$, was in dem fastperiodischen Falle $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ wegen $\Theta(c) = c\mathfrak{E}$ den Ersatz von f durch $f + c$ bedeutet, so entsteht $\mathbf{S}(\mathfrak{A} + c\mathfrak{E})$, wie bei (2) bereits erwähnt wurde, aus $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ durch eine Translation, und $\mathfrak{s}(f + c)$ entsteht aus $\mathfrak{s}(f)$ bei dem Ersatz von f durch $f + c$ durch dieselbe Translation.

Aus I., II. und aus dem Lemma folgt nun offenbar, daß die beiden Endpunkte Q, P des Intervalles $\mathfrak{s}(f)$ bei jeder Hermiteschen, d. h. zu einem reellwertigen f gehörigen fastperiodischen Matrix $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ stets in dem Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegen. Der Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ jeder Hermiteschen Matrix $\mathfrak{A}$ ist, wie wir aus § 1 wissen, ebenfalls ein Intervall auf der reellen Achse, das stets von zwei Punkten von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ begrenzt wird[14]), und $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegt immer in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Wir haben aber am Anfang von § 5, S. 303 gesehen, daß außerhalb $\mathfrak{s}(f)$ kein Punkt von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegen kann. Folglich ist $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch Q und P begrenzt, d. h. es gilt

$$\mathbf{W}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{s}(f) \quad \text{für} \quad \mathfrak{A} = \Theta(f) \quad \text{und} \quad f(t) \gtrless 0. \tag{34}$$

Ist insbesondere $f(t) \geqq 0$, so daß also $\lambda = \mathfrak{n}(f)$ den unteren Grenzpunkt von $\mathfrak{w}(f)$ darstellt, so ist auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auf der Halbachse $\lambda \geqq 0$ gelegen, so daß mit Rücksicht auf die in § 1 gegebene Definition der Zahl $\mathfrak{n}(\mathfrak{A})$ der Punkt $\lambda = \mathfrak{n}(\mathfrak{A})$ der untere Grenzpunkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ist. Wegen (34) folgt daraus

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{n}(f_0) \quad \text{für} \quad \mathfrak{A}_0 = \Theta(f_0) \quad \text{und} \quad f_0(t) \geqq 0, \tag{35}$$

wobei $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_0$ und f auf f_0 vertauscht wurde.

Es sei nun $f(t)$ irgendeine, also nunmehr nicht notwendig reellwertige fastperiodische Funktion, und λ irgendeine Zahl, und man setze $f_0(t) = |\lambda - f(t)|^2$, was offenbar gestattet ist, da $|\lambda - f(t)|^2 \geqq 0$ und fastperiodisch ist. So geht (35) in

$$\mathfrak{n}(\Theta(|\lambda - f|^2)) = \mathfrak{n}(|\lambda - f|^2) \tag{36}$$

über, wobei außer der Fastperiodizität von f gar nichts vorausgesetzt ist.

---

[14]) Vgl. meine unter [8]) zitierte Arbeit.

Mit Rücksicht auf (19), wobei $\mathfrak{A} = \Theta(\lambda - f)$ zu setzen ist, folgt daraus in Verbindung mit dem bei (1) erwähnten Toeplitzschen Fundamentalsatz, daß die Matrix

$$\mathfrak{A} = \Theta(\lambda - f) = \lambda\,\Theta(1) - \Theta(f) = \lambda\,\mathfrak{E} - \Theta(f)$$

dann und nur dann keine beschränkte Reziproke hat, wenn $\mathfrak{n}(|\lambda - f|^2) = 0$ ist. M. a. W., λ liegt dann und nur dann in dem Spektrum von $\Theta(f)$, wenn die Funktion $|\lambda - f(t)|^2$ der Null beliebig nahe kommen kann, während t sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt, d. h. dann und nur dann, wenn λ auf der abgeschlossenen Bildkurve $\mathfrak{F}(f)$ liegt. Damit ist der Hauptsatz $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{S}(\Theta(f))$ bewiesen. Das Wesentliche war hierbei das Lemma. Alles Weitere hätte sich ebenso führen lassen, wie dies Herr Toeplitz[1]) bei den Laurentmatrizen getan hat.

Es sei noch der Vollständigkeit halber daran erinnert, daß es zu $\lambda\,\mathfrak{E} - \Theta(f)$ auch dann eine Matrix geben kann, die, mit $\lambda\,\mathfrak{E} - \Theta(f)$ von links und rechts multipliziert, die Einheitsmatrix ergibt, wenn λ in dem Spektrum liegt, nur ist dann freilich diese „Reziproke" keine beschränkte Matrix, sondern eine solche, die ungefähr Hellingerschen Differentiallösungen[15]) oder Superpositionen von solchen entspricht. — Z. B. im Falle $f(t) = |\sqrt{\sin t}|$ liegt $\lambda = 0$ in $\mathfrak{F}(f)$, d. h. $\Theta(f)$ kann keine beschränkte Reziproke haben. Die Funktion $(f(t))^{-1} = |\sqrt[-3]{\sin t}|$ ist aber quadratisch integrierbar, so daß die Matrix $\Theta(f^{-1})$ eindeutig gebildet werden kann und mit Rücksicht auf die gewöhnliche Parsevalsche Relation die Eigenschaft $\Theta(f)\,\Theta(f^{-1}) = \Theta(f)\,\Theta(f^{-1}) = \mathfrak{E}$ hat, ohne freilich beschränkt zu sein. — Wir können also nur folgendes behaupten. Ist f fastperiodisch, so so hat $\Theta(f)$ entweder gar keine *beschränkte* Reziproke, oder sie hat die sogar fastperiodische Reziproke $\Theta(f^{-1})$, je nachdem der Nullpunkt auf der Bildkurve $\mathfrak{F}(f)$ liegt oder nicht.

§ 6.

Der Carathéodory-Toeplitzsche Gedankenkreis bei fastperiodischen Funktionen.

Unlängst habe ich gezeigt[14]), daß das Carathéodory-Toeplitzsche Problem für die Theorie der unitären Matrizen dieselbe Bedeutung hat wie die Theorie der assoziierten Kettenbrüche[16]) für die beschränkten Hermiteschen Formen (der Übergang von dem unitären zu dem Hermiteschen Fall wird einfach durch die Laplacesche Transformation geliefert). Als Nebenresultat ergab

---

[15]) E. Hellinger, Diss., Göttingen 1907. — Vgl. die Fußnote [5]) meiner unter [5]) zitierten Arbeit.

[16]) Vgl. Enc. d. math. Wiss. 2 C 13, S. 1583, Fußnote [146]), Schlußbemerkung.

sich die folgende Verallgemeinerung der (sich auf endliche Matrizen beziehenden) Euler-Hurwitzschen Parmaterdarstellung (die bei den endlichen Matrizen eine Produktzerlegung ist): Durchläuft $\mathfrak{H}$ die Mannigfaltigkeit derjenigen beschränkten, „abgeschlossenen", nichtnegativ definiten Hermiteschen Matrizen, für welche $\mathfrak{m}(\mathfrak{H}) \leqq 2\pi$ ist, so durchläuft die Matrix

$$e(\mathfrak{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\mathfrak{H})^n}{n!} = \cos\mathfrak{H} + i\sin\mathfrak{H}$$

[wobei $\cos\mathfrak{H}$ und $\sin\mathfrak{H}$ offenbar die Hermiteschen Komponenten (§ 1) von $e(\mathfrak{H})$ bezeichnen] die Mannigfaltigkeit der (beschränkten) unitären Matrizen, und zwar ist die Abbildung eineindeutig. In Analogie zu dem am Schluß des vorigen Paragraphen formulierten Satzes könnte man erwarten, daß etwas Entsprechendes auch in dem Teilbereiche der fastperiodischen Matrizen gilt, daß also insbesondere der folgende Satz richtig ist: eine fastperiodische Matrix $\Theta(f)$ ist dann und nur dann unitär, wenn sie mittels einer fastperiodischen Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ in der Gestalt $e(\mathfrak{H})$ dargestellt werden kann. Der erste Teil dieses Satzes ist trivial, der zweite wird durch das Gegenbeispiel $f(t) = e(t)$ widerlegt [vgl. (23)]. — Da das Spektrum jeder unitären Matrix auf dem Rande des Einheitskreises liegt[14]), so kann $\Theta(f)$ wegen $\mathfrak{S}(\Theta(f)) = \mathfrak{s}(f)$ nur dann unitär sein, wenn $|f(t)| \equiv 1$ gilt. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so ist auch f^{-1} fastperiodisch, und es gilt $f^{-1}\bar{f} \equiv 1$, woraus wegen (17), (28), (21) folgt, daß $\Theta^*(f)$ zu $\Theta(f)$ reziprok, also $\Theta(f)$ unitär ist (§ 1). Mithin ist $\Theta(f)$ dann und nur dann unitär, wenn $f(t) = e(\varphi(t))$ gilt und dabei $\varphi(t) \gtreqless 0$ derart ist, daß $f(t)$ fastperiodisch wird. Hierfür ist die Fastperiodizität von $\varphi(t)$ hinreichend, aber nicht notwendig: man setze nur $\varphi(t) = t$. Es wäre eine interessante Aufgabe, die Klasse derjenigen $\varphi(t) \gtreqless 0$ zu charakterisieren, bei welchen $e(\varphi(t))$ fastperiodisch ist.

Wir gehen nun zu dem eigentlichen Carathéodory-Toeplitzschen Problem[17]) über. Es sei $f(t)$ reellwertig, d. h. $\Theta(f)$ Hermitesch, so daß die abgeschlossene Bildkurve $\mathfrak{s}(f)$ der Funktion $f = f(t)$ und der abgeschlossene Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ der zu $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ gehörigen Hermiteschen Form (unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$) auf der reellen Achse gelegenen Intervalle sind. In dem vorigen Paragraphen haben wir bewiesen, daß $\mathfrak{s}(f) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ist. Wir wissen ferner aus § 1, daß der Abschnittsbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ in $\mathbf{W}(\mathfrak{A}^{[r+1]})$ liegt und für $r \to \infty$ gegen $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ konvergiert. Beachtet man noch, daß bekanntlich jede Determinante gleich dem Produkte ihrer Eigenwerte ist und daß der kleinste unter den $2r+1$ Eigenwerten einer Hermite-

[17]) Vgl. die Abhandlungen von C. Carathéodory, E. Fischer und O. Toeplitz, Rend. Palermo **32** (1911), ferner G. Herglotz, Sächs. Sitzber. **63** (1911), S. 501—511 und I. Schur, Journ. f. Math. **147** (1917), S. 205—232.

schen Matrix $\mathfrak{A}^{[r]}$ das Minimum von $\mathfrak{A}_\xi^{[r]}$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}^{[r]}| = 1$ ergibt, d. h. in den unteren Endpunkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A}^{[r]})$ hineinfällt, und daß die aufeinanderfolgenden Abschnittsspektra voneinander stets getrennt werden[18]), so folgt für den Fall $f(t) \geqq \varepsilon > 0$ offenbar der folgende Satz: Ist $\varepsilon > 0$, so ist für $f(t) \geqq \varepsilon$ (wobei, wie auch später, unter t nicht ein fester, sondern ein beliebiger Punkt der reellen Achse gemeint ist) notwendig und hinreichend, daß

$$\det \mathfrak{A}^{[r]} \geqq \varepsilon^{2r+1} \qquad r = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}, \ldots$$

gilt, wobei $\det \mathfrak{A}^{[r]}$ die Determinante des r-ten Abschnittes

$$\mathfrak{A}_\xi^{[r]} \equiv \Theta_\xi^{[r]}(f) \equiv \sum_{n=-r}^{+r} \sum_{m=-r}^{+r} \mathbf{M}(f e_{\xi_n - \xi_m}) x_n \bar{x}_m$$

der Kopplungsform $\mathfrak{A}_\xi = \Theta_\xi(f)$ von $\mathfrak{A} = \Theta(f)$ bedeutet, wenn r ganzzahlig ist, und $\mathfrak{A}_\xi^{[r-\frac{1}{2}]}$ bei ganzzahligem r aus $\mathfrak{A}_\xi^{[r]}$ dadurch entsteht, daß man $x_r = 0$ setzt. Man beachte dabei, daß, im Gegensatz zu dem periodischen Spezialfall, aus $f(t) > 0$ noch nicht folgt, daß auch $f(t) \geqq \varepsilon > 0$ gilt. — Wegen $\mathbf{W}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{H}(f)$ und da die $\mathbf{W}^{[r]}$ für $r \to +\infty$ ineinandergeschachtelt gegen die abgeschlossene Vereinigung $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ streben, läßt sich ferner folgendes behaupten: Damit $f(t) \geqq 0$ gilt, ist notwendig und hinreichend, daß jede Abschnittsform $\Theta_\xi^{[r]}(f)$ nichtnegativ definit ist. Die Umsetzung dieses letzteren Kriteriums in eine Folge von Determinantenungleichheiten gelingt auf Grund einer allgemeinen Theorie bekanntlich[19]) nicht einmal in dem Carathéodory-Toeplitzschen periodischen Spezialfall

$$\mathbf{M}(f e_{\xi_n - \xi_m}) = \mathbf{M}(f e_{n-m}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{i(n-m)t}\, dt.$$

Die nähere Diskussion könnte wohl auch in dem allgemeinen Fall durchgeführt werden, vielleicht am bequemsten mit der Methode von Herrn Herglotz[17]). Ohnedies läßt sich offenbar nur folgendes behaupten: Für $f(t) \geqq 0$ ist die Bedingung

$$\det \mathfrak{A}^{[r]} > 0 \qquad r = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}, \ldots$$

gewiß hinreichend [auch wenn $\det \mathfrak{A}^{[r]} \to 0$ gilt, was bei stetigen und periodischen Funktionen, aber auch nur in diesem Spezialfall, der Annahme $f(t) > 0$ widerspricht], und gewiß notwendig, daß

$$\det \mathfrak{A}^{[r]} \geqq 0 \qquad r = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}, \ldots$$

---

[18]) Vgl. z. B. I. Schur, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 288.

[19]) Vgl. l. c. [1]), S. 362—364, ferner [17]).

wird. — Die Kriterien könnten auf die übliche Weise[16]) derart umgeformt werden, daß keine „halbzahligen" Determinanten auftreten. Doch will ich hier auf Einzelheiten nicht eingehen.

Eine Vorsicht ist vor allem offenbar durch den Umstand geboten, daß es indefinite Hermitesche Formen gibt, bei welchen alle Abschnittsdiskriminanten $\geqq 0$ sind, wie z. B. bei der Diagonalform

$$x_1 \bar{x}_1 + 0\, x_2 \bar{x}_2 - x_3 \bar{x}_3 \pm \dots .$$

§ 7.

Übergang zu dem transzendenten Problem: Spektralanalyse.

Bevor ich weitergehe, will ich zur Bequemlichkeit des Lesers wieder einige Sätze aus der Matrizentheorie zusammenstellen. Es handelt sich jetzt um die Hilbertsche Theorie der beschränkten Hermiteschen Formen[20]). Danach gibt es eine und nur eine Matrix $\| \sigma_{nm}(\mu) \|$ von linksstetigen, für $\mu \to -\infty$ verschwindenden und schwankungsbeschränkten Funktionen $\sigma_{nm}(\mu)$ für $-\infty < \mu < +\infty$ derart, daß die Resolvente

$$(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{H})^{-1} \equiv \| R_{nm}(\lambda) \| \tag{37}$$

einer beschränkten Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ [außerhalb des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$] die Darstellung

$$R_{nm}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{nm}(\mu)}{\lambda - \mu} \qquad n, m = 0, \pm 1, \dots \tag{38}$$

gestattet. Die Matrix $\| \sigma_{nm}(\mu) \|$ heißt Spektralmatrix von $\mathfrak{H}$. Die Spektralmatrix hat u. a. die folgenden Eigenschaften: Sie ist Hermitesch und beschränkt bei jedem μ. Es gilt

$$\mathfrak{H}^n = \| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^n \, d\sigma_{nm}(\mu) \|, \quad n = 0, 1, \dots \ (\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{E}). \tag{39}$$

Die Zahl μ_0 liegt dann und nur dann außerhalb des (offenbar reellen) Spektrums, wenn es kein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß in dem Intervalle $|\mu_0 - \mu| < \varepsilon$ jedes $\sigma_{nm}(\mu) \equiv \sigma_{nm}(\mu_0)$, d. h. konstant ist, so daß das Spektrum aus den Nichtkonstanzstellen der σ_{nm} und aus den Häufungsstellen dieser Nichtkonstanzstellen besteht; liegt also μ ganz links von dem Spektrum, so ist $\sigma_{nm}(\mu) \equiv 0$. Ferner gilt $\sigma_{nm}(\mu) \equiv \delta_{nm}$, wenn μ ganz rechts von dem Spektrum liegt. Die diagonalen Elemente $\sigma_{nn}(\mu)$ sind des Hermiteschen Charakters zufolge gewiß reell. Sie sind ferner monoton, haben also offenbar die Totalschwankung Eins, da ja $\sigma_{nn}(-\infty) = 0$,

[20]) Vgl. l. c. [16]), S. 1575 ff., oder mein unter [26]) zitiertes Buch.

$_{nn}(+\infty) = \delta_{nn} = 1$ ist. Es gilt ferner

40) $$|\Delta\sigma_{nm}|^2 \leqq (\Delta\sigma_{nn})(\Delta\sigma_{mm}),$$

obei

$$\Delta\sigma = \sigma(\mu + \Delta\mu) - \sigma(\mu), \qquad \Delta\mu > 0$$

esetzt ist. Sind also in einer Umgebung einer Stelle μ_0 alle σ_{nn} konstant, o sind es auch die übrigen σ_{nm}. Das Spektrum besteht daher aus den Wachstumstellen der σ_{nn} und aus den Häufungsstellen dieser Stellen.

Nun gibt es aber mit Rücksicht auf eine bekannte Stieltjessche Umehrformel[21]) zu jeder, etwa für alle nicht reellen λ erklärten Funktion $R(\lambda)$ öchstens eine nicht abnehmende, von links stetige, den Bedingungen $(-\infty) = 0$, $\sigma(+\infty) = 1$ genügende Funktion $\sigma(\mu)$ derart, daß $R(\lambda)$ n der Gestalt

41) $$R(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\lambda - \mu}$$

largestellt werden kann. Da bei den fastperiodischen Matrizen wegen (33) lle $R_{nn}(\lambda)$ gleich, also etwa $= R_{00}(\lambda)$ sind, so muß daher die Spektralnatrix einer Hermiteschen fastperiodischen Matrix mit Rücksicht auf (38) lie Eigenschaft

42) $$\sigma_{nn}(\mu) = \sigma_{00}(\mu) \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

aben. Folglich besteht das Spektrum von $\mathfrak{H} = \Theta(f)$; $f(t) \gtrless 0$ aus len Wachstumstellen des mittleren Elementes $\sigma_{00}(\mu)$ in der Spektralnatrix von $\mathfrak{H} = \Theta(f)$. Wir wollen $\sigma_{00}(\mu)$ vorübergehend als die Hauptpektralfunktion von $f(t)$ bezeichnen (sobald $\mathfrak{H}$ fastperiodisch ist). Es sei $\mathfrak{q}(f)$ die untere, $\mathfrak{p}(f)$ die obere Grenze der reellwertigen fastperiodischen Funktion $f(t)$ für $-\infty < t < +\infty$, d. h. es seien $\lambda = \mathfrak{q}(f)$, $\lambda = \mathfrak{p}(f)$ die beiden Endpunkte des Bildbereiches $\mathfrak{H}(f)$, die wir früher durch Q, P bezeichnet haben[22]). Da $\mathfrak{H}(f) = \mathfrak{S}(\Theta(f))$ das Spektrum von $\mathfrak{H}$ ist, so gilt

43) $$\begin{aligned} \sigma_{00}(\mu) &\equiv 0 \quad \text{für} \quad \mu < \mathfrak{q}(f), \\ &\equiv 1 \quad \text{für} \quad \mu > \mathfrak{p}(f), \end{aligned}$$

während zwischen Q und P keine Konstanzstelle von σ_{00} vorhanden ist, da ja das ganze Intervall $\mathfrak{H}(f)$ dem Spektrum angehört.

Ich will nun untersuchen, was die Hauptspektralfunktion von $\Theta(f)$ für die Funktion $f(t)$ selbst bedeutet, und allgemeiner, was die σ_{nm} von

---

[21]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig u. Berlin 1913. S. 372—374.

[22]) Ist $f(t) \gtrless 0$, so ist $\mathfrak{q}(f) = \mathfrak{n}(f)$, $\mathfrak{p}(f) = \mathfrak{m}(f)$, da $\mathfrak{n}(f)$ und $\mathfrak{m}(f)$ stets die untere bzw. obere Grenze von $|f(t)|$ für $-\infty < t < +\infty$ bezeichnen.

$\Theta(f)$ für $f(t)$ bedeuten. Es wird sich dabei um eine sinngemäße Umdeutung der Spektralregel handeln, die von den Herren Toeplitz und Hellinger in dem periodischen Spezialfall für die Laurentmatrizen stückweise invertierbarer („glatter") Funktionen gefunden worden ist[23]). Es stellt sich heraus, daß $\sigma_{00}(\mu)$ die „asymptotische Umkehrfunktion" von $f(t)$ darstellt. Ich werde also t auf dem Intervalle $-T \leqq t \leqq T$ als Funktion von f auffassen, den Grenzübergang $T \to +\infty$ vornehmen und zeigen, daß sich dann $\sigma_{00}(f)$ als die „durchschnittliche" *Maßfunktion* von $f(t)$ ergibt (im Sinne der reellen Funktionentheorie). Es handelt sich um eine Invertierung, aber um eine solche „im Großen". Denn bereits die Weierstraßsche periodische Kurve hat keine Monotonieintervalle, also auch keine „Umkehrfunktion" im Kleinen, deren Gang nach der Art der Riemannschen Flächen mittels sich verzweigenden Intervallgebilden veranschaulicht werden könnte. Es kann also die Toeplitz-Hellingersche Spektralregel[23]) nur dann allgemein formuliert werden, wenn der Begriff der Umkehrfunktion eine sinngemäße Umdeutung erfährt.

Der Zusammenhang mit dem Toeplitzschen Trägheitsgesetz bzw. mit dem Born-v. Kármánschen Verteilungssatz ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß die Spektralmatrizen der Abschnitte von $\Theta(f)$ (das sind die bekannten, von Stieltjes und Hilbert betrachteten Treppenfunktionen) für $r \to \infty$ bekanntlich an jeder Stetigkeitsstelle der Grenzfunktion gegen die Spektralmatrix von $\Theta(f)$ konvergieren, und andererseits daraus, daß die Spektralmatrix des r-ten Abschnittes die „richtig", d. h. auf Grund der r-ten Eigenlösungen normierte Statistik der r-ten Eigenwerte beschreibt (bei jeder Hermiteschen Matrix). [Die Frage, ob die Gewichte (= Eigenlösungen) nach Vornahme des Grenzüberganges $r \to \infty$ herausfallen, ist nach dem Toeplitzschen Trägheitsgesetz[24]) in dem periodischen Spezialfall gewiß zu bejahen; wie es im allgemeinen Falle ist, werde ich nicht untersuchen.]

§ 8.

Umkehrung $t = t(f)$ im Großen: die durchschnittliche Maßfunktion.

Es sei $f(t)$ eine reellwertige fastperiodische Funktion, d. h. $\Theta(f)$ sei Hermitesch. Den trivialen Fall $\Theta(f) = c\,\mathfrak{E}$, $f(t) \equiv c$ wollen wir ausschließen, so daß der Bildbereich

$$\mathfrak{F}(f): \quad \mathfrak{q}(f) \leqq \mu \leqq \mathfrak{p}(f) \tag{44}$$

---

[23]) O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1907, S. 114 und 1910, S. 499—506, ferner [1]); E. Hellinger, l. c. [15]), S. 76—77.

[24]) l. c. [1]), S. 367—369; die daselbst skizzierten Überlegungen sind bekanntlich von Herrn G. Szegö [Math. Annalen 76 (1915), S. 490 ff., Math. Ztschr. 6 (1920), S. 194—197] durchgerechnet worden.

kein Punkt, sondern ein Intervall mit zwei Endpunkten ist. Es sei φ eine reelle Zahl, $T > 0$, und es bezeichne $\alpha(\varphi, T; f)$, kurz $\alpha(\varphi, T)$, diejenige Teilmenge des Intervalles

$$-T \leqq t \leqq T, \tag{45}$$

auf welcher $f(t) < \varphi$ ausfällt. Man setze endlich

$$\omega(\varphi, T) = \frac{\text{mes}\,\alpha(\varphi, T)}{2T},$$

so daß $\omega(\varphi, T)$ die relative Häufigkeit der Kurve $f = f(t)$ in dem Streifen $\mathfrak{q}(f) \leqq f(t) < \varphi$ der reellen (t, f)-Ebene und in bezug auf das Intervall (45) darstellt. Die Kurve verläuft in dem Streifen

$$\mathfrak{q}(f) \leqq f \leqq \mathfrak{p}(f). \tag{44'}$$

Die Funktion $\omega(\varphi, T)$ ist bei festem T eine monoton nicht abnehmende Funktion von φ, die für $\varphi < \mathfrak{q}(f)$ identisch (d. h. bei jedem T) verschwindet, für $\varphi > \mathfrak{p}(f)$ identisch gleich Eins ist. Einen von 0 und 1 verschiedenen Wert kann $\omega(\varphi, T)$, bei festem T als Funktion von φ aufgefaßt, nicht entlang eines Intervalles $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ annehmen. Dies folgt einfach aus dem Satze von Bolzano über die Zwischenwerte der stetigen Funktionen; denn f ist stetig. Hingegen kann ω sehr wohl Sprünge haben: man nehme nur an, daß $f(t)$, ohne konstant zu sein, Konstanzstrecken hat.

Wenn der Grenzwert

$$\omega(\varphi) = \lim_{T=+\infty} \omega(\varphi, T), \qquad -\infty < \varphi < +\infty$$

existiert, so ist $\omega(\varphi)$ die durchschnittliche Verweilzeit (d. h. die mittlere relative Häufigkeit) der Kurve $f = f(t)$ in der Halbebene $f < \varphi$ oder in dem Streifen $\mathfrak{q}(f) \leqq f < \varphi$ der reellen (t, f)-Ebene, so daß wir $\omega(\varphi)$ als die Dichtefunktion[25]) von $f(t)$ bezeichnen wollen (ihre Existenz ist in dem periodischen Spezialfall trivial).

Der Gang des Beweises dafür, daß jede fastperiodische Funktion $f(t) \gtrless 0$ eine Dichtefunktion hat, wird durch die folgende Überlegung nahegelegt. Die Hauptspektralfunktion $\sigma_{00}(\mu)$ muß aus physikalischen Gründen die Bedeutung haben, daß sie das spektrale Verteilungsgesetz der Wahrscheinlichkeiten a priori festlegt (das sind im wesentlichen die „richtig normierten Gewichte", d. h. die Hellingerschen Vielfachheiten), und es ist nicht zu erwarten, daß in diesem Zusammenhange das „Bernoullische Prinzip" (Wahrscheinlichkeit a priori = relative Häufigkeit) versagt, zumal es grundsätzlich wohl genügen würde, sich auf endliche fastperiodische Summen zu

[25]) Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist freilich nicht $\omega(\varphi)$, sondern $d\omega(\varphi) : d\varphi$.

beschränken. Nach einer gelegentlichen Bemerkung von Herrn Heisenberg ist es mir so plausibel geworden, daß $\omega(\varphi) = \sigma_{00}(\varphi)$ sein muß, *wenn* $\omega(\varphi)$ existiert. — Aber auch der Existenzbeweis selbst läßt sich am bequemsten in diesem Rahmen führen: wir brauchen nur an den bei (41) erwähnten Stieltjesschen Eindeutigkeitssatz bzw. an die Konvergenzsätze der Theorie der assoziierten Kettenbrüche Anschluß zu finden.

Betrachten wir zu diesem Ende die Funktion

$$R(\lambda, T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \frac{dt}{\lambda - f(t)}, \tag{46}$$

wobei λ eine außerhalb $\mathfrak{E}(f)$ gelegene Zahl bedeutet. Offenbar ist

$$R(\lambda, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega(\varphi, T)}{\lambda - \varphi} \tag{47}$$

(die Integration bezieht sich auf φ). Denn die Lebesgueschen Horizontalsummen von (46) sind mit Rücksicht auf die Definition von $\omega(\varphi, T)$ identisch mit den entsprechenden Stieltjesschen Näherungssummen von (47), mithin sind auch die beiden Integrale identisch. — Es gilt nun bekanntlich der folgende

Hilfssatz[26]). Es sei $\varrho(\varphi, T)$ eine Schar von bei jedem $T > 0$ für $-\infty < \varphi < +\infty$ erklärten, monoton nicht abnehmenden Funktionen derart, daß es zwei von T unabhängige Zahlen $q, p\,(> q)$ gibt von der Beschaffenheit, daß $\varrho(\varphi, T) \equiv 0$ gilt für $\varphi < q$ und $\varrho(\varphi, T) \equiv 1$ für $\varphi > p$; es seien ferner die (außerhalb des Intervalles

$$q \leqq \varphi \leqq p \tag{48}$$

offenbar reguläre Funktionen darstellenden) Integrale

$$S(\lambda; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\varphi, T)}{\lambda - \varphi}$$

derart, daß der Grenzwert

$$\lim_{T \to +\infty} S(\lambda; T) = S(\lambda) \tag{49}$$

in unendlich vielen Punkten λ, die mindestens einen nicht auf dem Schlitz (48) gelegenen Häufungspunkt haben, existiert. Dann gibt es eine und

---

[26]) Vgl. H. Hamburger, Math. Annalen 81 (1920), S. 266—286; daselbst auch Literatur. — Vgl. übrigens die Darstellung der fraglichen (wesentlich weitergehenden) Ergebnisse in meinem Buch: Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig, S. Hirzel, 1929.

nur eine von links stetige, monotone Funktion $\varphi(\varrho)$ derart, daß an allen Stetigkeitsstellen von $\varrho(\varphi)$, also mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Stellen, die Grenzgleichung

$$\lim_{T\to+\infty} \varrho(\varphi, T) = \varrho(\varphi) \tag{50}$$

gilt; außerdem darf man in (49) den Grenzübergang hinter dem Integralzeichen vornehmen, und es gilt außerhalb des Schlitzes

$$\lim_{T\to+\infty} S(\lambda, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho(\varphi)}{\lambda-\varphi}, \tag{51}$$

übrigens gleichmäßig auf jedem den Schlitz nicht treffenden Kreisbereiche. —

Nun ist aber der Grenzwert

$$\lim_{T\to+\infty} R(\lambda, T)$$

außerhalb $\mathfrak{s}(f)$ gewiß vorhanden, er ist ja wegen (46), (47), (33) offenbar gleich $R_{00}(\lambda)$. Setzen wir also

$$\gamma = \mathfrak{q}(f), \quad p = \mathfrak{p}(f), \quad \varrho = \omega, \quad S(\lambda, T) = R(\lambda; T), \quad S(\lambda) = R_{00}(\lambda),$$

so sind die Prämissen des Hilfssatzes erfüllt. Folglich gibt es nach (50) eine und nur eine von links stetige Funktion $\omega(\varphi)$ derart, daß an allen Stetigkeitsstellen von $\omega(\varphi)$

$$\lim_{T\to+\infty} \omega(\varphi, T) = \omega(\varphi)$$

gilt, womit die Existenz der Dichtefunktion bis auf ihre Sprungstellen, welchen gegenüber die Stieltjessche Integration sich unempfindlich verhält, und die uns nicht interessieren, bewiesen ist; es ist ferner wegen (51)

$$R_{00}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega(\varphi)}{\lambda-\varphi}. \tag{52}$$

Da aber wegen (38) auch

$$R_{00}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{00}(\varphi)}{\lambda-\varphi}$$

gilt, so ergibt der bei (41) erwähnte Stieltjessche Eindeutigkeitssatz die Identität der Dichtefunktion ω mit der Hauptspektralfunktion σ_{00}. Damit ist alles bewiesen. — Genau so werden wir in der zweiten Mitteilung bei den unitären fastperiodischen Matrizen vorgehen; nur die Stieltjessche Umkehrformel wird dabei durch die Poissonsche zu ersetzen sein[14]).

Wegen $\varrho = \sigma_{00}$ und mit Rücksicht auf die bei (43) gefundenen Eigenschaften von σ_{00} ist die Dichtefunktion für $\varphi < \mathfrak{q}(f)$ identisch gleich Null, für $\varphi > \mathfrak{p}(f)$ identisch gleich Eins und inzwischen monoton. Ferner hat

sie auf dem Intervalle (44), wobei nunmehr $\mu = \varphi$ zu setzen ist, keine Konstanzstrecke, was eine fastperiodische Verallgemeinerung des eingangs erwähnten Bolzanoschen Zwischenwertsatzes aussagt. Sprünge kann die Dichtefunktion sehr wohl haben (man denke nur an eine nicht konstante, stetige und periodische Funktion mit Konstanzstrecken), und zwar auch überall dicht auf $\mathfrak{H}(f)$ [es wäre sogar denkbar, daß es nicht konstante fastperiodische Funktionen gibt, deren Spektrum kein Streckenspektrum, sondern nur ein überall dichtes Punktspektrum enthält; es sei hier erwähnt, daß die Existenz eines Punktspektrums wegen (40), (42) aus σ_{00} allein abgelesen werden kann]. — Da $\omega(\varphi)$ außerhalb $\mathfrak{H}(f)$ konstant ist, so gilt wieder, wegen (52), die Momentenentwicklung

$$(31)' \qquad R_{00}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^n \, d\omega(\varphi)}{\lambda^{n+1}} \quad \text{für} \quad |\lambda| > \mathfrak{m}(f),$$

also wegen (31) und (33) offenbar

$$(53) \qquad \mathfrak{M}(f^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^n \, d\omega(\varphi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(was die Zulässigkeit der statistisch-verteilungsmäßigen Deutung bestätigt), d. h.

$$(54) \qquad \mathfrak{M}(F(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\varphi) \, d\omega(\varphi),$$

wobei F ein Polynom, allgemeiner (mit Rücksicht auf den Weierstraßschen Approximationssatz) eine stetige Funktion bedeutet. Sie braucht nur auf $\mathfrak{H}(f)$ erklärt zu sein, da sonst $d\omega(\varphi) \equiv 0$ ist. — Die Beziehung (53) könnte ersichtlich zu verschiedenen „fastperiodischen Momentenproblemen“ Anlaß geben.

§ 9.

Die diophantischen Zusammenhänge.

Aus der Dichtefunktion von $f(t)$ kann diejenige von Funktionen von $f(t)$ berechnet werden. Betrachten wir z. B. den einfachsten und zugleich interessantesten Fall: $\omega(\varphi)$ ist die Dichtefunktion von f, und $f(t)$ kann der Null nicht beliebig nahe kommen, d. h. f^{-1} ist ebenfalls fastperiodisch; was ist die Dichtefunktion $\tau(\varphi)$ von f^{-1}? Zunächst gilt außer (52)

$$(55) \qquad r_{00}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\varphi)}{\lambda - \varphi},$$

wobei $\|r_{nm}(\lambda)\|$ die Resolvente von $\Theta(f^{-1})$ bezeichnet. Nach Voraussetzung liegt $\lambda = 0$ außerhalb des abgeschlossenen Wertbereiches $\mathfrak{H}(f)$, der

usammenhängend ist, also entweder auf der negativen oder auf der positiven Halbachse liegt, je nach dem (konstanten) Vorzeichen von $f(t)$. Es möge etwa der zweite Fall vorliegen, also $f(t) \geqq \mathfrak{n}(f) > 0$ sein, so daß $\mathfrak{H}(f^{-1})$ aus $\mathfrak{H}(f)$ durch Abbildung mittels reziproker Radien entsteht; der Nullpunkt liegt außerhalb $\mathfrak{H}(f^{-1})$, das ebenfalls von der positiven Halbachse enthalten wird. Außerhalb $\mathfrak{H}(f)$ ist $\omega(\varphi)$, außerhalb $\mathfrak{H}(f^{-1})$ entsprechend $\tau(\varphi)$ konstant, nämlich $\equiv 0$ auf der linken, $\equiv 1$ auf der rechten Seite, und inzwischen monoton. Setzt man in (54) $F = \varphi^{-n}$, was nunmehr gestattet ist, so folgt, daß (53) auch für $n < 0$ gilt. Aus einer allgemeinen Regel[27]) über die Bestimmung der Spektralmatrix von $\mathfrak{H}^{-1}$ aus derjenigen von $\mathfrak{H}$ folgt nun durch Vergleich von (52) mit (55) und mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Darstellung (41), daß auf $\mathfrak{H}(f^{-1})$, d. h. auf dem Intervalle

$$\frac{1}{\mathfrak{m}(f)} \leqq \varphi \leqq \frac{1}{\mathfrak{n}(f)},$$

bis auf die Unstetigkeitsstellen von $\tau(\varphi)$

(56)
$$\tau(\varphi) = \int_{\frac{1}{\varphi}} \frac{d\omega(\psi)}{\psi^2}$$

gilt, wobei sich die additive Konstante daraus bestimmt, daß $\tau(\varphi)$ außerhalb $\mathfrak{H}(f^{-1})$ identisch $= 0$ bzw. $= 1$ ist. — In dem vorliegenden fastperiodischen Fall kann man (56) aus (23), (27) mit Rücksicht darauf, daß (53) auch für $n < 0$ gilt, offenbar unmittelbar entnehmen.

Die reellwertige fastperiodische Funktion f kann nur dann als gleichverteilt bezeichnet werden, wenn die Dichte $d\omega(\varphi)$ auf $\mathfrak{H}(f)$ konstant ist, so daß

$$\omega(\varphi) = \frac{\varphi - \mathfrak{n}(f)}{\mathfrak{m}(f) - \mathfrak{n}(f)}; \qquad \mathfrak{n}(f) \leqq \varphi \leqq \mathfrak{m}(f)$$

gilt, wie bei der stetigen und nach Eins periodischen Funktion $f(t)$, die auf dem Periodizitätsintervalle $|t| \leqq \frac{1}{2}$ gleich $|t|$ ist. Doch sind diese gleichverteilten $f(t) \gtrless 0$ keine „krummen" Kurven, so daß $\omega(\varphi)$ z. B. bei $f(t) = \sin t$ ein Arcussinus ist. Eine „Aufklärung" dieses Mißstandes ergibt sich erst, wenn man auf das Verteilungsproblem des Wertgebietes nicht reellwertiger fastperiodischer Funktion $f(t)$ eingeht. Dies kann, wie wir später sehen werden, ohne besondere Schwierigkeiten geschehen. Beachtet man nämlich, daß die Hermiteschen Komponenten der fastperiodischen Matrix $\Theta(f) = \Theta(g + ih)$ offenbar die Hermiteschen fastperiodischen Matrizen $\Theta(g)$, $\Theta(h)$ der Komponenten g, h der fastperiodischen Funk-

[27]) Vgl. mein unter [26]) zitiertes Buch.

tion $f(t) = g(t) + ih(t)$ sind, so kann man die Umformung von (33) bei nicht reellem f in ein zweifaches Integral vornehmen und den komplexen Fall auf den reellen sozusagen zurückführen. Bei dieser Umformung, für welche (18) wesentlich ist, hat man es eigentlich mit der Kopplungsaufgabe zu tun, aus den Spektralmatrizen zweier Hermiteschen Matrizen, deren Produkt Hermitesch ist, die Spektralmatrix des Produktes zu berechnen, und dies führt im Falle fastperiodischer Matrizen aus ersichtlichen formalen Gründen zu einer wie Laplacesche Faltprodukte[28]) gebauten Formel. — Durch eine Untersuchung von Herrn F. Bernstein über die harmonische Analyse versteckter Fastperiodizitäten[29]) scheint es übrigens nahegelegt zu sein, daß der Zusammenhang mit der Theorie der Laplaceschen Transformation viel tiefer liegt, d. h. nicht nur formale, sondern auch inhaltliche Hintergründe hat.

Es sei hier erwähnt, daß die Theorie der fastperiodischen auch mit den diophantischen Untersuchungen von Herrn Bohr über unendlich viele Variable[30]) zusammenhängt. Zur Orientierung betrachten wir den einfachsten Fall, wo es keine „Kommensurabilitätslücken" gibt, also die (komplexwertigen) fastperiodischen Funktionen, deren eigentliche Frequenzen linear unabhängig sind; die Null möge der Einheitlichkeit halber keine eigentliche Frequenz der Funktion sein, d. h. der Mittelwert soll verschwinden (doch ist dies unwesentlich). Eine solche Funktion, bei welcher zwischen endlich vielen eigentlichen Frequenzen keine homogen-lineare Abhängigkeit mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, möge als nichtentartet bezeichnet werden. — Es sollen ferner zwei beliebige (nicht notwendig nichtentartete) fastperiodische Funktionen amplitudenäquivalent heißen, wenn sie dieselbe Fouriersche Koeffizientenfolge haben, so daß etwa

$$ae^{it} + be^{2it}, \quad ae^{2it} + be^{it},$$

aber auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{itn}}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{it \log n}}{n^2}$$

amplitudenäquivalente Paare darstellen.

Aus unserer Matrizenzuordnung geht nun unmittelbar hervor, daß zwei amplitudenäquivalente, nichtentartete fastperiodische Funktionen eine und dieselbe Matrix als fastperiodische Matrix zulassen. Folglich sind auch die Spektra identisch. Nach dem Hauptsatz (§ 5) gilt daher der folgende

---

[28]) Vgl. G. Doetsch, Math. Annalen 89 (1923), S. 198.

[29]) F. Bernstein, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 7 (1927), S. 441—444.

[30]) H. Bohr, Gött. Nachr. 1913, S. 441 ff.; Math. Annalen 79 (1919), S. 136 ff.; Acta Math. 46 (1925), S. 118 ff., S. 164 ff.

Unabhängigkeitssatz. Alle amplitudenäquivalenten, nichtentarteten fastperiodischen Funktionen haben denselben Bildbereich. —

Dieser Satz kann ohne weiteres auf den Fall übertragen werden, wo die Funktionen nur aus *dem* Grunde nicht nichtentartet sind, daß zugleich mit ξ_n auch $-\xi_n$ eine eigentliche Frequenz ist, usf. Wie ich l. c. [4]) angedeutet habe, hängt die Behandlung des allgemeinen Falles (also z. B. die Untersuchung derjenigen gewöhnlichen Dirichletschen Reihen, bei welchen $a_n \neq 0$ ist auch für zusammengesetzte n), von der Heranziehung gewisser Untergruppen der symmetrischen Gruppe abzählbar vieler Elemente ab. Ich komme darauf noch ausführlich zurück.

Berechnet man (zunächst bei reellem f) außer $\sigma_{00} = \sigma_{nn}$ auch die übrigen σ_{nm}, was auf Grund der obigen Methode nach dem bekannten Lebesgueschen Muster [31]) ebenfalls ohne Schwierigkeit geschieht, so zeigt sich, daß die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, d\sigma_{nm}(\mu) \right\| \cdot \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mu)\, d\sigma_{nm}(\mu) \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, G(\mu)\, \sigma_{nm}(\mu) \right\|,$$

wobei F und G willkürliche stetige Funktionen bezeichnen, für die fastperiodischen Matrizen rein diophantisch gedeutet werden kann. Darauf soll in einer Fortsetzung dieses Aufsatzes eingegangen werden, bei der Einordnung der (zu einem stetigen Parameter gehörigen) Weylschen Gleichverteilungstheorie [32]) in die soeben vorgezeichneten allgemeineren Rahmen. Wir werden sehen, daß man in dem eigentlichen diophantischen Falle $|f(t)| \equiv 1$, wo $\Theta(f)$ unitär ist, bei der Bestimmung der *unitären Spektralmatrix* [14]) wörtlich so vorgehen kann, wie in dem Hermiteschen Fall (§ 8). Ist endlich $f(t)$ eine beliebige fastperiodische Funktion, die der Null nicht beliebig nahe kommen kann — letztere Einschränkung ist bekanntlich [32]) bereits aus „topologischen" Gründen wesentlich —, so setze man $r(t) = |f(t)|$ und $e^{i\psi(t)} = f(t)\,|f(t)|^{-1}$. Dann gilt die auf Lagrange zurückgehende Zerlegung [32])

$$f(t) = r(t)\, e^{i\psi(t)}, \quad \Theta(f) = \Theta(r)\,\Theta(e^{i\psi}) \qquad \text{(vgl. § 3)}, \tag{57}$$

wobei $\Theta(r)$ Hermitesch und $\Theta(e^{i\psi})$ unitär ist.

Schwarzburg, Weihnachten 1928.

---

[31]) Vgl. z. B. F. Riesz, Les systèmes des équations linéaires, Paris 1913, S. 153 (Collection Borel). Siehe ferner E. Hellinger, l. c. [15]), S. 76.

[32]) H. Weyl, Math. Annalen 77 (1916), S. 319–324, ferner T. Levi-Civita, Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) 28 (1911), S. 325 ff.

(Eingegangen am 13. Januar 1929.)

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften.

Der von Herrn Domherrn Dr. Dr. ing. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig gestiftete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften", der zur Zeit 500 RM. beträgt, ist für das Jahr 1928 durch das Preisgericht dem Direktor des Instituts für Meereskunde in Berlin Herrn Prof. Dr. Albert Defant für seine in dem Werk „Das Gezeitenproblem des Meeres in Landesnähe, Hamburg 1925" zusammengefaßten Arbeiten zuerkannt worden.

Ernst-Abbe-Gedächtnispreis.

Der von der Carl-Zeiss-Stiftung zu Jena begründete Ernst Abbe-Gedächtnispreis und die damit verbundene Abbe-Medaille, die im Jahre 1928 zum ersten Male für Anwendungsgebiete der Mathematik und Physik zur Vergebung kommen sollten, sind nach dem Urteil des Preisgerichts (Prof. Hecker-Jena, Prof. Prantl-Göttingen, Prof. Zenneck-München) dem Prof. Dr. Dr. ing. h. c. Alexander Meißner-Berlin, dem „Erfinder des Röhrengenerators", zuerkannt worden.

Bemerkung über einen Verzerrungssatz bei topologischen Abbildungen in der Hydromechanik.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Es sei $T_0 + S_0$ ein beschränkter dreidimensionaler Bereich, dessen Begrenzung S aus einer endlichen Anzahl geschlossener, einander weder schneidender noch berührender Flächen mit stetiger Normale besteht, kürzer ein Bereich der Klasse A, und es mögen $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$ und $z(a, b, c, t)$ drei in $\{T_0 + S_0; \langle t_0, t_1 \rangle\}$ [1]) erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen stetige, einer Ungleichheit von der Form

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} \geqq q_0 > 0 \tag{1}$$

genügende Funktionen bezeichnen. Es möge schließlich dem Bereich $T_0 + S_0$ durch die Gleichungen

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t) \tag{2}$$

für jedes t in $\langle t_0, t_1 \rangle$ in dem Raume x-y-z ein (notwendigerweise der Klasse A angehörender) beschränkter Bereich $T + S$ umkehrbar eindeutig und stetig zugeordnet sein. Es sei d_{12} der Abstand zweier beliebigen Punkte (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) in $T_0 + S_0$; r_{12} sei der Abstand ihrer durch Vermittelung von (2) entworfenen Bilder. *Es gibt gewiß eine Zahl $N > 0$, so daß für alle t in $\langle t_0, t_1 \rangle$*

$$N \geqq \frac{r_{12}}{d_{12}} \geqq \frac{1}{N} \tag{3}$$

gilt.

[1]) D. h. für alle (x, y, z) in $T_0 + S_0$ und alle t in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle t_0, t_1 \rangle$.

Da die Jacobische Determinante $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}$ nicht verschwindet, so sind auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ vorhanden und stetig. Aus

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}} \tag{4}$$

folgt augenscheinlich, falls

$$\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|, \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial z}{\partial c}\right| \leqq M \tag{5}$$

gesetzt wird,

$$\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| \leqq 2M^2 \frac{1}{q_0} = M_1. \tag{6}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\left|\frac{\partial b}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial c}{\partial z}\right| \leqq M_1. \tag{7}$$

Es sei $T^* + S^*$ das Bild von $T_0 + S_0$ zu einer beliebigen Zeit t^* in $\langle t_0, t_1\rangle$. Dem Punkte (a, b, c) möge hierbei der Punkt (x^*, y^*, z^*) entsprechen. Man kann gewiß $T + S$ als das topologische Bild von $T^* + S^*$ auffassen; die Koordinaten des Bildpunktes (x, y, z) von (a, b, c) erscheinen dabei als Funktionen von x^*, y^*, z^*, t^* und t, die für alle (x^*, y^*, z^*) in $T^* + S^*$ und alle t in $\langle t_0, t_1\rangle$ oder, was dasselbe bedeutet, für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ und alle t und t^* in $\langle t_0, t_1\rangle$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x^*, y^*, z^* haben. Für $t^* \to t$ konvergieren die Ausdrücke

$$\frac{\partial x}{\partial x^*} - 1, \ \frac{\partial x}{\partial y^*}, \ \frac{\partial x}{\partial z^*}; \ \frac{\partial y}{\partial x^*}, \ \frac{\partial y}{\partial y^*} - 1, \ \frac{\partial y}{\partial z^*}; \ \frac{\partial z}{\partial x^*}, \ \frac{\partial z}{\partial y^*}, \ \frac{\partial z}{\partial z^*} - 1$$

gegen Null, und zwar aus Gründen der Stetigkeit, für alle (a, b, c) in $T_0 + S_0$ und alle t^* und t in $\langle t_0, t_1\rangle$ gleichmäßig. Jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ läßt sich darum ein ν zuordnen, so daß

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x^*} - 1\right|, \left|\frac{\partial x}{\partial y^*}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial z}{\partial z^*} - 1\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |t - t^*| < \nu \tag{8}$$

gilt.

Es gibt nun gewiß eine Zahl q, so daß für *alle* t^* in $\langle t_0, t_1\rangle$ die Punkte (x_1^*, y_1^*, z_1^*), (x_2^*, y_2^*, z_2^*) im Abstande r_{12}^* (Bilder der Punkte (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)) durch ein Kurvenstück Γ^* mit stetiger Tangente in $T^* + S^*$ von der Länge $\leqq q r_{12}^*$ verbunden werden können[2]). Offenbar

[2]) Dies ließe sich durch eine geringfügige Modifikation der in meiner Arbeit Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. II, Sächsische Berichte 78 (1926), S. 147–239, insb. S. 147—152 angewandten Schlußweise zeigen.

st bsp.

$$x_2 - x_1 = x_2^* - x_1^* + \int_{\Gamma^*} \frac{\partial}{\partial s^*}(x - x^*)\, ds^* = x_2^* - x_1^* + \xi_{12}, \tag{9}$$

nter s^* die Bogenlänge auf Γ^* verstanden. Wegen (9) gilt, solange $|t^* - t| \leqq \nu$ ist, wie man leicht verifiziert,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}(x - x^*)\right| \leqq \varepsilon\sqrt{3}, \tag{10}$$

lso

$$|\xi_{12}| \leqq \varepsilon\sqrt{3}\, q\, r_{12}^*. \tag{11}$$

Setzt man

$$y_2 - y_1 = y_2^* - y_1^* + \eta_{12}, \qquad z_2 - z_1 = z_2^* - z_1^* + \zeta_{12},$$

o erhält man ganz ähnlich

$$|\eta_{12}|,\ |\zeta_{12}| \leqq \varepsilon\sqrt{3}\, q\, r_{12}^*. \tag{12}$$

Wir finden weiter

$$r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1^* - x_2^*)^2 + (y_1^* - y_2^*)^2 + (z_1^* - z_2^*)^2$$
$$+ 2(x_1^* - x_2^*)\xi_{12} + 2(y_1^* - y_2^*)\eta_{12} + 2(z_1^* - z_2^*)\zeta_{12} + \xi_{12}^2 + \eta_{12}^2 + \zeta_{12}^2$$
$$= r_{12}^{*2}\left\{1 + 2\left(\frac{x_1^* - x_2^*}{r_{12}^*}\frac{\xi_{12}}{r_{12}^*} + \frac{y_1^* - y_2^*}{r_{12}^*}\frac{\eta_{12}}{r_{12}^*} + \frac{z_1^* - z_2^*}{r_{12}^*}\frac{\zeta_{12}}{r_{12}^*}\right) + \frac{\xi_{12}^2 + \eta_{12}^2 + \zeta_{12}^2}{r_{12}^{*2}}\right\}.$$

Es sei $\omega > 0$ eine beliebige Zahl < 1. Beachtet man (11) und (12), so sieht man leicht, daß man ε, mithin auch ν so klein wählen kann, daß, sofern $|t^* - t| \leqq \nu$ angenommen wird, für alle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) in $T_0 + S_0$

$$\frac{r_{12}}{r_{12}^*} \geqq 1 - \omega \tag{13}$$

ausfällt. Da t^* mit t vertauscht werden kann, so gilt weiter

$$\frac{r_{12}^*}{r_{12}} \geqq 1 - \omega, \quad \text{d. h.} \quad \frac{r_{12}}{r_{12}^*} \leqq \frac{1}{1-\omega}. \tag{14}$$

Es sei jetzt n die kleinste ganze Zahl $\geqq \frac{t_1 - t_0}{\nu}$, und es mögen $T^{(1)} + S^{(1)}$, $T^{(2)} + S^{(2)}, \ldots, T^{(n)} + S^{(n)}$ die zu den Zeitpunkten $t_0 + \frac{t - t_0}{n}$, $t_0 + 2\frac{t - t_0}{n}, \ldots, t$ gehörigen Bilder von $T_0 + S_0$ bezeichnen. Für die geradlinigen Abstände $r_{12}^{(1)}, r_{12}^{(2)}, \ldots, r_{12}^{(n)} = r_{12}$ der zugehörigen Bilder von (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) gelten nach (13) und (14) die Ungleichheiten

$$\frac{1}{1-\omega} \geqq \frac{r_{12}^{(1)}}{d_{12}} \geqq 1 - \omega, \quad \frac{1}{1-\omega} \geqq \frac{r_{12}^{(2)}}{r_{12}^{(1)}} \geqq 1 - \omega, \ldots, \frac{1}{1-\omega} \geqq \frac{r_{12}^{(n)}}{r_{12}^{(n-1)}} = \frac{r_{12}}{r_{12}^{(n-1)}} \geqq 1 - \omega.$$

Wir finden so ohne weiteres

$$N = \left(\frac{1}{1-\omega}\right)^n \geqq \frac{r_{12}}{d_{12}} \geqq (1-\omega)^n = \frac{1}{N}. \tag{16}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die Voraussetzungen unseres Satzes sind insbesondere erfüllt, wenn es sich bei der von uns betrachteten topologischen Abbildung um die Bewegung einer Flüssigkeit, allgemeiner eines beliebigen kontinuierlich verteilten Mediums handelt. Durch die Gleichungen (2) ist dann die Bahn des Teilchens (a, b, c) des Mediums gegeben. Die Jacobische Determinante (1) stellt das Verhältnis $\frac{\varrho_0}{\varrho}$ der Dichten des betrachteten Teilchens zur Zeit t_0 und t dar und erweist sich darum gewiß $\geqq q_0 > 0$.

In dem besonderen Falle einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1.$$

Zu ganz analogen Ungleichheitsbeziehungen gelangt man, wenn es sich um eine topologische Abbildung des Gesamtraumes der Variablen a, b, c auf den Gesamtraum der Variablen x, y, z handelt. Es wird diesmal angenommen, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}$ für *alle* (a, b, c) und alle t in $\langle t_0, t_1 \rangle$ gleichmäßig stetig sind. Dies ist gewiß der Fall, wenn $\frac{\partial x}{\partial a} - 1, \frac{\partial x}{\partial b}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c} - 1$, wie dies bei den hydrodynamischen Anwendungen in der Regel der Fall ist, im Unendlichen etwa wie $(a^2 + b^2 + c^2)^{-1}$ verschwinden.

(Eingegangen am 15. September 1928.)

Almost periodic recurrent motions[1].

By

Philip Franklin, Cambridge, Mass. (U.S.A.)[2].

§ 1.

Introduction.

In his study of dynamical systems[3], Birkhoff was led to the consideration of certain limiting motions which he called *recurrent*. While every recurrent motion which he explicitly constructed for an analytic system has an *almost periodic* character[4], he constructed a non-analytic system with a recurrent motion not of this type, and conjectured that analogous analytic systems existed. The concepts of recurrent motion and almost periodic motion thus appear to be related, but not identical. In the present note we show that *every stable almost periodic motion is a recurrent motion possessing a certain stability property, and conversely, every recurrent motion possessing this property is an almost periodic motion.*

§ 2.

Definitions and known theorems.

We first recall some of Birkhoff's definitions and results[3]. The motions he discusses are defined by a set of differential equations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

where each of the n functions X_j is a real and single-valued function of the n variables x_k. These functions are usually assumed to be analytic,

[1]) Communicated to the American Mathematical Society, January, 1928.

[2]) Pro tem. at Zürich, Switzerland.

[3]) G. D. Birkhoff, Bulletin Soc. math. France **40** (1912), p. 305–323.

[4]) H. Bohr, Acta Mathematica **45** (1924), p. 29–127.

though most of the discussion applies if they are merely subjected to a Lipschitz condition

$$|X_j(x_k + \Delta x_k) - X_j(x_k)| \leqq G(x_k) \sum_{s=1}^{n} |\Delta x_s|. \tag{2}$$

Here x_k is an abbreviation for $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and there are n equations given by $j = 1, 2, \ldots$ or n. The x_k of (1) may be thought of as the Hamiltonian coördinates and momenta for the original mechanical problem, t being the time. We shall refer to them as coördinates in the sequel.

A motion is said to be *positively* and *negatively stable* if all the points $x_k(t)$, $-\infty < t < \infty$, for this motion may be included in a closed, and hence finite domain D, composed entirely of regular points, i. e. where the X_j are analytic in the case which principally interests us or, in the more general case, subjected to such conditions that the theorems of existence, uniqueness and continuous dependence of the solution on the initial conditions and parameters appearing in the X_j apply to the system (1). The points L of the x_k space such that every neighborhood of a point L contains points of a particular motion with t arbitrarily great positively (or negatively) are called omega (or alpha) limit points of that motion. The motions determined by these points are called omega (or alpha) derived motions. For stable motions[5]) these alpha and omega derived motions are also stable. A closed set of stable motions such that the set of omega derived motions, as well as the set of alpha derived motions of any one motion of the set coincides with the original set is called a *minimal* set, and every motion of such a set is said to be *recurrent*. Such a motion is characterized by[6])

Theorem A. A necessary and sufficient condition for a positively and negatively stable motion to be recurrent is that to every given positive quantity η, there should exist a time interval T, such that the portion of the motion corresponding to every time interval of length T has some points at distance less than η from any point of the entire motion.

In general the solutions of (1) are continuous in the initial conditions in the sense that if a motion defined by $x_k(t_0) = a_k$ is capable of extension throughout the time intervals $|t - t_0| \leqq S$, then for any given positive quantity ε, there exists a $\delta(\varepsilon, S, a_k)$ such that if $|\bar{a}_k - a_k| < \delta$, the motion defined by $\bar{x}_k(t_0) = \bar{a}_k$ is capable of similar extension, and throughout the time intervals for which $|t - t_0| \leqq S$, we shall have $|\bar{x}_k(t) - x_k(t)| < \varepsilon$. Consequently, for a stable motion, this relation will

---

[5]) loc. cit. [3]), p. 309.

[6]) loc. cit. [3]), p. 312.

hold for any S, if the proper $\delta(\varepsilon, S, a_k)$ is taken. But, as all the points of a stable motion may be included in a closed region D, in which the X_j are analytic, the partial derivatives of the X_j will be bounded in this region, or in particular throughout the motion. As the $G(x_k)$ of (2) are related to these derivatives by the law of the mean we may derive a uniform Lipschitz condition. We have, namely,

$$(3) \qquad |X_j(x_k+\Delta x_k) - X_j(x_k)| = \left| \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial X_j}{\partial x_s}\right]_{x_k^*} \Delta x_s \right| \leqq G \sum_{s=1}^{n} |\Delta x_s|,$$

where x_k^* is a point intermediate between x_k and $x_k+\Delta x_k$ on some path joining them, and hence may be taken in D if both these points are in D or in particular if x_k is a point of the motion and Δx_k is small enough, $|\Delta x_k| < c$. G is a bound for the absolute value of $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$ in D. But, from (1), we have

$$(4) \qquad \frac{d\Delta x_j}{dt} = \frac{d(x_j+\Delta x_j)}{dt} - \frac{d(x_j)}{dt} = X_j(x_k+\Delta x_k) - X_j(x_k),$$

which, combined with (3) gives

$$(5) \qquad \left|\frac{d\Delta x_j}{dt}\right| \leqq G \sum_{s=1}^{n} |\Delta x_s|.$$

As the quantities $\Delta x_k(t)$ restricted by this relation and also by

$$(6) \qquad |\Delta x_k(t_0)| \leqq b,$$

will clearly be greatest when both equalities hold or for $t > t_0$,

$$(7) \qquad \frac{d\Delta x_j}{dt} = nG\Delta x_j, \qquad \Delta x_j(t) = be^{nG(t-t_0)},$$

we have for $|t-t_0| \leqq S$, $\varepsilon_1 < c$

$$(8) \qquad |\bar{x}_k(t) - x_k(t)| = |\Delta x_k(t)| \leqq be^{nG|t-t_0|} \leqq be^{nGS} \leqq \varepsilon_1,$$

provided that

$$(9) \qquad |\bar{a}_k - a_k| = |\Delta x_k(t_0)| \leqq b \leqq \varepsilon_1 e^{-nGS}.$$

Thus for a stable motion, we may take

$$(10) \qquad \delta(\varepsilon, S, a_k) = \varepsilon_1 e^{-nGS}, \qquad \varepsilon_1 = \min(\varepsilon, c),$$

which is *independent* of a_k, and will be denoted by $\delta(\varepsilon, S)$.

The quantity just found for a stable motion does, however, depend on S. The special stability condition which we need in our discussion is the existence of such a quantity which is independent of both S and a_k. As we shall only need it for a motion compared with itself, we formulate the following definition.

A stable motion is said to possess the *stability property* S if, for every positive ε, there exists a corresponding $h(\varepsilon)$, such that if $|x_k(t_1) - x_k(t_2)| < h(\varepsilon)$, the motions defined by taking $x_k(t_1)$ and $x_k(t_2)$ as initial points will have their coördinates differ by less than ε for all times, i. e. $|x_k(t_1+t) - x_k(t_2+t)| < \varepsilon$.

Finally, we recall the definition of an almost periodic function as given by H. Bohr [7]). A function $f(x)$ defined and continuous for all real values of $x(-\infty < x < \infty)$ is said to admit $\tau(\varepsilon)$ as a *displacement number* corresponding to ε if, for all values of x, we have

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon. \tag{11}$$

If, for every positive ε, there is an interval $L(\varepsilon)$ such that every interval of length $L(\varepsilon)$ contains at least one displacement number $\tau(\varepsilon)$, $f(x)$ is said to be *almost periodic.*

By an *almost periodic motion*, we shall mean a motion each of whose coördinates is an almost periodic function of the time.

§ 3.

Characterization of stable almost periodic motions.

We shall now prove

Theorem I. *A necessary and sufficient condition for a stable motion to be almost periodic is that it be a recurrent motion possessing the property S.*

We begin with the necessity. As our motion is almost periodic, each of the n functions $x_k(t)$ is. Hence [8]) these are simultaneously almost periodic, i. e. for each given ε, there is a single $L(\varepsilon)$ such that in each interval of this length there is a single $\tau(\varepsilon)$ which may be used for all the n functions. If then $t_1 < t < t_1 + L$ is any interval of this length, and t_2 is any other time, there exists a displacement number $\tau(\varepsilon)$ in the interval $t_1 - t_2 < \tau < t_1 - t_2 + L$. Consequently

$$|x_k(t_2+\tau) - x_k(t_2)| \leqq \varepsilon, \tag{12}$$

and as $t_2 + \tau$ is in the arbitrary time interval we started with, we see that on taking $T = L(\varepsilon)$, the conditions of theorem A are met, and the motion is recurrent.

We must next show that our motion possesses the property S. As the motion is stable, by (10) we may find a $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}, S\right)$ for any finite S.

---

[7]) loc. cit. [4]), p. 30.

[8]) loc. cit. [4]), p. 37—40.

n particular, take for S a common $L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. We assert that this $\left(\frac{\varepsilon}{3}, L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$ will serve as the $h(\varepsilon)$ demanded by the property S. For, if

13) $$|x_k(t_1) - x_k(t_2)| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}, L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right),$$

ve have from the definition of $\delta(\varepsilon, S)$,

14) $$|x_k(t_1 + u) - x_k(t_2 + u)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{if} \quad |u| < L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Moreover, for any t, there exists a common $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ in the interval $< \tau < t + L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ for which

15) $$|x_k(t_1 + t) - x_k(t_1 + t - \tau)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

nd

16) $$|x_k(t_2 + t) - x_k(t_2 + t - \tau)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

But, as $|t - \tau| < L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, we may set $u = t - \tau$ in (14), and on combining the result with (15) and (16), we obtain

17) $$|x_k(t_1 + t) - x_k(t_2 + t)| \leqq \varepsilon,$$

which holds for all t and shows that the property S holds.

For the sufficiency, we assume that our motion is recurrent and satisfies the condition S. By this condition, there exists an $h(\varepsilon)$ for our motion. We assert that the T of theorem A corresponding to $\eta = h(\varepsilon)$ is the $L(\varepsilon)$ required by the definition of almost periodicity. For, by the fundamental property of T, in any interval of the motion with time duration of this length there is a point at distance less than $h(\varepsilon)$ from every point of the motion. In particular, let $x_k(0)$ be the particular point of the motion selected, and t_1 the time for the point in the interval at distance less than $h(\varepsilon)$ from it. We have:

18) $$|x_k(t_1) - x_k(0)| < h(\varepsilon).$$

Consequently, by the fundamental property of $h(\varepsilon)$,

19) $$|x_k(t_1 + t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

for all t, which shows that we may take $\tau(\varepsilon) = t_1$.

§ 4.

Further properties.

From the presence of a single stable almost periodic motion in a system, we may draw certain conclusions about other motions of the system. We begin with

Theorem II. *If a stable motion is almost periodic, each of its omega (or alpha) derived motions is also almost periodic.*

Let $\bar{x}_k(0)$ be an omega limit point of the stable almost periodic motion $x_k(t)$, and $\bar{x}_k(t)$ the omega derived motion defined by it. If $\tau(\varepsilon)$ is a common displacement number for the $x_k(t)$, and t_1 is any fixed value of t, by (10) we may find a $\delta(\eta, |\tau| + |t_1| + 1)$ for the first motion. As $\bar{x}_k(0)$ was an omega limit point, for some t_2 we shall have

$$|x_k(t_2) - \bar{x}_k(0)| < \delta(\eta, |\tau| + |t_1| + 1). \tag{20}$$

As a consequence of this and the definition of $\delta(\varepsilon, S)$,

$$|x_k(t_2 + t_1) - \bar{x}_k(t_1)| < \eta \tag{21}$$

and

$$|x_k(t_2 + t_1 + \tau) - \bar{x}_k(t_1 + \tau)| < \eta. \tag{22}$$

Recalling that τ is a displacement number corresponding to ε for the $x_k(t)$, we get from (21) and (22):

$$|\bar{x}_k(t_1 + \tau) - \bar{x}_k(t_1)| \leqq 2\eta + \varepsilon. \tag{23}$$

Since η is arbitrary, this implies

$$|\bar{x}_k(t_1 + \tau) - \bar{x}_k(t_1)| \leqq \varepsilon. \tag{24}$$

This holds for all t_1, and shows that τ is also a displacement number corresponding to ε for the $\bar{x}_k(t)$, so that the motion defined by them is almost periodic.

Corollary 1. *If one motion of a minimal set is almost periodic, all of the motions in the set are.* For, the motions of the set are the derived motions of any one of them.

Corollary 2. *If a system of motions contains a single stable almost periodic motion which is not purely periodic it contains a non-enumerable number of such motions.* For, by our theorem I the motion is recurrent. Hence it is a member of a minimal set, which by corollary 1 consists entirely of almost periodic motions. But[6] every minimal set which does not consist of a single purely periodic motion has the power of the continuum.

Corollary 3. *Each of the motions of a minimal set of almost periodic motions has the same characteristic frequencies as any other. The corresponding (complex) coefficients have the same absolute values.* For, let $\bar{x}_k(t)$ be any derived motion of $x_k(t)$, as in the theorem. As $\bar{x}_k(t)$ is stable and almost periodic, by theorem I it possesses the property S. From its property as a limit motion we have for some t_1

$$|x_k(t_1) - \bar{x}_k(0)| < h(\varepsilon), \tag{25}$$

and hence for all t,

$$|x_k(t_1+t)-\bar{x}_k(t)|<\varepsilon, \tag{26}$$

so that, since $|e^{-i\lambda(t_1+t)}|=1$,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda(t_1+t)}x_k(t_1+t)\,dt - e^{-it_1\lambda}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda t}\bar{x}_k(t)\,dt\right|<\varepsilon. \tag{27}$$

On taking the limit for $T=\infty$, we find from this for each x_k

$$\big||\alpha(\lambda,x_k)|-|\alpha(\lambda,\bar{x}_k)|\big|\leqq|\alpha(\lambda,x_k)-e^{-it_1\lambda}\alpha(\lambda,\bar{x}_k)|<\varepsilon. \tag{28}$$

and hence equals zero since ε is arbitrary.

The characteristic frequencies agree, since they are the λ's with non-vanishing coefficients $\alpha(\lambda)$. We note that for real quantities, if A_λ are cosine and B_λ are sine coefficients,

$$|\alpha(\lambda)|^2=A_\lambda^2+B_\lambda^2. \tag{29}$$

In conclusion, we note that a simple example of a system which illustrates our theorems is furnished by the motions of a particle on a smooth circular billiard table. For each motion, the angle which the path makes with the tangent to the circle at a point of reflection from the circumference is constant. Each set of motions obtained by shifting the point of reflection, but keeping this angle and the velocity in the path fixed yields either a set of periodic motions or a minimal set. It is easy to see directly that these motions are stable, possess the property S and are almost periodic.

Massachusetts Institute of Technology.

(Eingegangen am 2. Mai 1928.)

Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe.

Von

Arnold Scholz in Berlin.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag dazu sein, unter Heranziehung der Klassenkörpertheorie Körper mit vorgeschriebener Gruppe zu konstruieren. Und zwar sollen Konstruktionen behandelt werden, die durch eine Kette von (aufeinanderzusetzenden) Klassenkörpern geleistet werden können. Es kommt damit von vornherein nur eine Konstruktion von Körpern mit auflösbarer Gruppe (Radikalkörpern) über einem gegebenen endlichen Körper (algebraischen Zahlkörper) in Frage, da ein Klassenkörper ein relativ-Abelscher Körper über einem endlichen Körper ist. Umgekehrt muß aber auch für die Radikalkörper die Methode, Klassenkörper zu konstruieren, zum Ziel führen, da durch die Klassenkörper eines Körpers K_0 alle relativ-Abelschen Körper über K_0 erschöpft werden.

Bei der Behandlung des Problems, überhaupt Körper mit vorgeschriebener Gruppe zu konstruieren, bedeutet es keine Einschränkung, wenn man nur relativ-Galoissche Körper konstruiert. Denn ist eine Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ in n Symbolen gegeben und bildet man die reguläre Darstellung $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$, so gilt folgendes: Gibt es einen Körper K mit der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ über dem Grundkörper K_0, der dann relativ-Galoissch ist, und bildet man die Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_1$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, die bei isomorpher Zuordnung der Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ einer Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist, welche aus den Permutationen von $\mathfrak{G}$ besteht, die ein bestimmtes Symbol ungeändert lassen, so ist der zu $\overline{\mathfrak{G}}_1$ gehörige Unterkörper von K ein Körper mit der Gruppe $\mathfrak{G}$. Es genügt daher, die Gruppen im abstrakten Sinne, nicht als Permutationsgruppen zu behandeln.

Für den einfachsten Fall, daß eine Abelsche Gruppe als Galoissche Gruppe gegeben ist, läßt sich die Konstruktion eines zugehörigen Körpers stets durch Komposition eines Kreiskörpers mit dem Grundkörper voll-

ziehen. Dies ist nach Kronecker die einzige Möglichkeit, wenn der Grundkörper der der rationalen Zahlen ist; dagegen bieten sich stets noch andere Möglichkeiten, wenn der Grundkörper umfangreicher (aber endlich) ist. Das 3. Kapitel dieser Arbeit birgt solche anderen Lösungen.

Der nächste Schritt wäre dann der, Körper mit beliebiger metabelscher Gruppe, d. h. einer Gruppe, deren Kommutatorgruppe Abelsch ist, über gegebenem endlichen Grundkörper zu konstruieren. Diese Aufgabe soll hier mit Hilfe der Klassenkörpertheorie in Angriff genommen werden. Das erfordert vor allem eine eingehende Untersuchung der Struktur metabelscher Gruppen. Zu ihrer Durchführung operiere ich mit symbolischen Potenzen von Gruppenelementen, einem Kalkül, den gleichzeitig Herr Ph. Furtwängler zum Beweis des Hauptidealsatzes[1]) verwandt hat und der auf Grund des Artinschen Allgemeinen Reziprozitätsgesetzes (s. u.) in einem inneren Zusammenhang mit dem entsprechenden Kalkül in der Idealtheorie steht. Es läßt sich damit für die metabelschen Gruppen eine Zerfällung ihrer Kommutatorgruppe in zwei charakteristische Bestandteile erreichen. Diese Zerfällung will ich jedoch erst in einer weiteren Arbeit ausführen; sie reduziert die Aufgabe, Körper zu beliebiger metabelscher Gruppe zu konstruieren, darauf, zu zwei Haupttypen metabelscher Gruppen Körper zu konstruieren. Von den beiden Haupttypen soll in dieser Arbeit nur der eine: die „Dispositionsgruppe“ gruppentheoretisch diskutiert werden, und darauf soll die Konstruktion des „Dispositionskörpers“ durchgeführt werden, die die Konstruierbarkeit von Körpern für einen weiten Bereich von Gruppen nach sich zieht, auf Grund der vorausgeschickten gruppentheoretischen Diskussion. Unter die Gruppen, die auf diese Weise erledigt werden, fallen insbesondere alle Gruppen quadratfreier Ordnung.

Der zweite, noch zurückgestellte Haupttypus umfaßt die metabelschen Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Für diesen Typus steht die Konstruierbarkeit von zugehörigen Körpern noch in Frage.

An klassenkörpertheoretischen Hilfsmitteln wird in dieser Arbeit im wesentlichen nur folgendes Ergebnis der Takagischen Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers (Journal of the College of Science, Tokyo 1920, Bd. 41, Nr. 9) benutzt:

Zu jeder Idealgruppe H eines endlichen Körpers K_0 mit dem Führer $\mathfrak{f}$ gehört ein einziger relativ-Abelscher Körper K über K_0, der Klassenkörper zu H genannt, in dem die in H liegenden Primideale aus K_0 und nur diese in lauter verschiedene Primideale ersten Relativgrades zerfallen.

Die Galoissche Gruppe des Körpers $\frac{K}{K_0}$ (K über K_0) ist der Gruppe

[1]) Hamburg. Math. Sem. Abh. 7 (1929), S. 14—36.

der Klassen nach der Idealgruppe H, der „zu K gehörigen Klassengruppe“ in K_0, einstufig isomorph.

Weiter wird das Artinsche Allgemeine Reziprozitätsgesetz (Abhdlg. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg, Bd. 5, S. 353—363) benutzt, das man im Anschluß an die Takagischen Sätze so formulieren kann:

Die durch die Kongruenz: $\omega^{N(\mathfrak{p})} \equiv \omega^S \pmod{\mathfrak{p}}$ (ω beliebige ganze Zahl aus K) dem Primideal $\mathfrak{p}$ aus K_0 für $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ eindeutig zugeordnete Substitution S der Galoisschen Gruppe von $\frac{K}{K_0}$ ist nur von der Klasse nach H abhängig, in der das Ideal $\mathfrak{p}$ liegt. Ordnet man jeder Klasse nach H die betreffende Substitution S zu, so ergibt diese Zuordnung einen einstufigen Isomorphismus zwischen der Klassengruppe und der Galoisschen Gruppe von $\frac{K}{K_0}$.

An klassenkörpertheoretischen Bezeichnungen seien noch folgende hervorgehoben bzw. neu eingeführt: Zum Unterschied von der Idealgruppe H, zu der ein Körper gehört, werde die Gruppe der Klassen nach H $\left(\text{Faktorgruppe } \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}}\right)$ als die „Klassengruppe, zu der der Körper gehört“, bezeichnet. Es ist vorteilhaft, mit beiden Wendungen zu operieren, ebenso auch neben der Ausdrucksweise: „der zu einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörige Unterkörper“, wenn $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{G}$ ist, die folgende zu gebrauchen: „der zur Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}$ gehörige Unterkörper“, was zu keinem Mißverständnis führen kann.

Ferner werde als absoluter Klassenkörper ein solcher bezeichnet, dessen Idealgruppe alle Hauptideale (Zahlideale) enthält, als unverzweigter Klassenkörper einer, dessen Idealgruppe alle total positiven Hauptideale enthält, als Kongruenzklassenkörper (mod $\mathfrak{m}$) einer, dessen Idealgruppe alle Hauptideale (α) enthält, für die $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ gilt, ob α total positiv ist oder nicht. Als den (vollständigen) absoluten, unverzweigten Klassenkörper, Kongruenzklassenkörper (mod $\mathfrak{m}$) bezeichne man immer den maximalen Klassenkörper der betreffenden Art. Hierbei spreche man von „Vollständigkeit in bezug auf die Primzahl l“, wenn man nur den maximalen Körper aller der Klassenkörper der betreffenden Art meint, deren Grad eine Potenz der Primzahl l ist. — Die entsprechenden Attribute erteile man auch den Klassengruppen, zu denen die Körper gehören.

Weiter heiße ein Kongruenzklassenkörper (mod $\mathfrak{m}$), der zum absoluten Klassenkörper teilerfremd ist, ein Restkörper (mod $\mathfrak{m}$). Die Idealgruppe eines Restkörpers enthält also Ideale aus allen absoluten Idealklassen des Grundkörpers, und die Klassengruppe kann in diesem Fall durch Zahlreste (mod $\mathfrak{m}$) repräsentiert werden.

An Literatur über Körper mit auflösbarer Gruppe ist zu erwähnen:

G. Bucht, Über die Wurzeln der metazyklischen Gleichungen von Primzahlpotenzgrad, Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. I.: 4, Nr. 6 (1908); II.: 5, Nr. 23 (1909). — Über einige algebraische Gleichungen achten Grades, loc. cit. 6, Nr. 30 (1910).

F. Mertens, Algebraisch lösbare Gleichungen, Berichte d. Wiener Akademie 123 (1914), S. 207—290. — Über die Bildung zyklischer Gleichungen in gegebenem Rationalitätsbereich; Gleichungen achten Grades mit Quaternionengruppe, loc. cit. 125 (1916), S. 735—831. — Ein Satz zur Bildung algebraisch lösbarer Gleichungen, Crelles Journal 157 (1927), S. 199—213.

F. Neiß, Relativ-Abelsche Zahlkörper, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 1920.

I. Definitionen und vorbereitende Sätze.

In Übereinstimmung mit den gruppentheoretischen Bezeichnungen, die Herr Ph. Furtwängler zum Beweis des Hauptidealsatzes verwendet, gebrauche ich folgende:

Sind S und T Elemente einer Gruppe, so bedeute T^S die Transformation von T mit S: $T^S = S^{-1}TS$.

Hat man insbesondere eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$, die invariante Untergruppe einer (endlichen) Gruppe $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{G}$) ist; ist A ein Element aus $\mathfrak{A}$; $S_1, \dots S_k$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$, so bedeute:

$$A^{a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots + a_k S_k} = (A^{a_1})^{S_1} \cdot (A^{a_2})^{S_2} \dots (A^{a_k})^{S_k} = (A^{S_1})^{a_1} \cdot (A^{S_2})^{a_2} \dots (A^{S_k})^{a_k}$$

($a_1 \dots a_k$ ganze rationale Zahlen).

Ein solcher Ausdruck: $A^{\sum a_\nu S_\nu}$ heiße eine symbolische Potenz von A, $F(S) = \sum a_\nu S_\nu$ symbolischer Exponent. Es gelten die gewöhnlichen Rechenregeln des Potenzierens:

$$A^{F_1(S)} \cdot A^{F_2(S)} = A^{F_1(S)+F_2(S)}; \qquad (A^{F_1(S)})^{F_2(S)} = A^{F_1(S)\cdot F_2(S)};$$

$$(A_1 A_2)^{F(S)} = A_1^{F(S)} \cdot A_2^{F(S)}.$$

Dabei hat man mit den symbolischen Exponenten $F(S)$ wie mit hypercomplexen Größen zu rechnen, d. h. für ihre Addition und Multiplikation gelten die gewöhnlichen Gesetze eines Integritätsbereiches, nur daß das kommutative Gesetz der Multiplikation lediglich für die Multiplikation einer rationalen Zahl mit einer beliebigen Größe des Systems gilt, während zwei Automorphismen S in ihrer Bedeutung als Gruppenelemente zu multiplizieren sind. Die Symbole S brauchen dabei nur einem vollständigen Restsystem $\mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{G}$ entnommen zu werden; denn für $T\mathfrak{A} = S\mathfrak{A}$ ($T \sim S \pmod{\mathfrak{A}}$) gilt: $A^T = A^S$; die Symbole $S < \mathfrak{S}$ treten hier also nur als Repräsentanten der Elemente von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ auf, die man selbst an Stelle der S in den Exponenten eines Elementes A einsetzen könnte.

Im Exponenten von Gruppenelementen $A < \mathfrak{A}$ wird demnach die Multiplikation schon dann durchweg kommutativ, wenn die Gruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ Abelsch ist. In diesem Falle kann man die Exponenten als Polynome in m Variablen: $S_1, \ldots S_m$ auffassen, wenn $S_1 \mathfrak{A}, \ldots S_m \mathfrak{A}$ eine Basis für $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ bilden.

Weiter bezeichne $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}_{\mathfrak{G}}$ die durch $A_1, A_2, \ldots, A_k < \mathfrak{A}$ symbolisch erzeugte Gruppe, die aus allen $A_1^{F_1(S)} A_2^{F_2(S)} \ldots A_k^{F_k(S)}$ bestehe.

Betrachtet man für ein Element $A < \mathfrak{A}$ die Gesamtheit aller $H(S)$, für die die Gleichung $A^{H(S)} = E$ gilt, so erkennt man, daß diese einen Modul $\mathfrak{H}$ bilden, der die „symbolische Ordnung" von A heiße, im Gegensatz zu der „natürlichen Ordnung" h, der kleinsten Zahl, für die $A^h = E$ gilt. A heiße auch zum Exponenten oder Modul $\mathfrak{H}$ gehörig. Der Modul $\mathfrak{H}$ ist ein Rechtsideal im Bereich aller $F(S)$, wie aus $A^{HF} = (A^H)^F$ folgt. Die Ordnung $\mathfrak{H}$ läßt sich, wie leicht einzusehen, auf die Gestalt: $\mathfrak{H} = (h, H_1(S), H_2(S), \ldots, H_k(S))$ bringen. Hierbei bedeute allgemein der Modul: $\mathfrak{M} = (m, F_1(S), \ldots, F_k(S))$ die Gesamtheit aller $F_1 X_1 + F_2 X_2 + \ldots + F_k X_k + m Y$ mit beliebigen symbolischen Exponenten $X_1, X_2, \ldots, Y$.

Der Modul $\mathfrak{N}$ heiße ein Teiler des Moduls $\mathfrak{M}$, oder $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{N}$ teilbar, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ vorkommen.

Ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ Abelsch, so ist z. B. die symbolische Ordnung eines Elementes $A < \mathfrak{A}$ ein Teiler von $\mathfrak{M} = (h, S_1^{h_1} - 1, \ldots, S_m^{h_m} - 1)$, wenn h die natürliche Ordnung von A ist, und $h_1, \ldots h_m$ die Ordnungen der entsprechenden Basiselemente von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$.

(Die ganze hier aufgestellte Symbolik läßt sich auch auf Automorphismen Abelscher Gruppen $\mathfrak{A}$ übertragen, wenn A^S das Element von $\mathfrak{A}$ bedeutet, in das $A < \mathfrak{A}$ durch den Automorphismus S übergeführt wird.)

Folgender Satz über Moduln in den Variablen: $S_1, \ldots S_m$ ist für die späteren gruppentheoretischen Betrachtungen von Wichtigkeit:

Hat man einen Modul: $\mathfrak{M} = (l^k, F_1(S_1), F_2(S_2), \ldots, F_m(S_m))$, *bei dem also jede erzeugende Funktion* F_μ *nur von einer Variablen* S_μ *abhängt und für den außerdem* $F_\mu \not\equiv 0 \,(l)$ *gilt* (l *Primzahl*); *gelten ferner für eine Funktion* $H(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ *die Kongruenzen:*

$$J_1(S_1) \cdot H \equiv 0; \quad J_2(S_2) \cdot H \equiv 0; \quad \ldots; \quad J_\nu(S_\nu) \cdot H \equiv 0 \,(\mathfrak{M}),$$

wobei $F_\varrho = J_\varrho \cdot L_\varrho$ *sei* ($\varrho = 1 \ldots \nu$), *so gelten auch die Kongruenzen:*

$$H(S_1, \ldots S_m) \equiv 0 \,(\mathfrak{M}_\varrho) \qquad (\varrho = 1 \ldots \nu),$$

wobei man $\mathfrak{M}_\varrho$ aus $\mathfrak{M}$ erhält, indem man in $\mathfrak{M}$ nur F_ϱ durch L_ϱ ersetzt, also $\mathfrak{M}_\varrho = (\mathfrak{M}, L_\varrho)$. Ferner läßt sich darstellen:

$$H \equiv L_1 \cdot L_2 \dots L_\nu \cdot H'(\mathfrak{M}).$$

Beweis. Es möge F_μ $(\mu = 1 \dots m)$ vom Grade n_μ (in S_μ) sein; J_ϱ und L_ϱ $(\varrho = 1 \dots \nu)$ von den Graden n'_ϱ und n''_ϱ; $n'_\varrho + n''_\varrho = n_\varrho$. Nimmt man nun an, daß H schon (mod $\mathfrak{M}$) reduziert sei, also in S_μ von einem Grade $h_\mu < n_\mu$, und dividiert man jetzt durch L_ϱ, so daß

$$H(S_1, \dots S_m) = K_\varrho(S_1, \dots S_m) \cdot L_\varrho(S_\varrho) + R_\varrho(S_1, \dots S_m),$$

so ist jetzt R_ϱ ebenfalls reduziert (mod $\mathfrak{M}$), wenn man von dem Zahlmodul l^k absieht. Denn die Glieder von K_ϱ, die bei der Division des nach Potenzen von S_ϱ geordneten H entstehen, sind, da L_ϱ nur von S_ϱ abhängt, in S_μ $(\mu \neq \varrho)$ höchstens vom Grade h_μ, so daß ebenfalls R_ϱ in S_μ von einem Grade $r_\mu < n_\mu$ ist. In S_ϱ ist aber R_ϱ von einem Grade $r_\varrho < n''_\varrho$, da es ja (mod L_ϱ) reduziert worden ist.

Daher hat dann $J_\varrho \cdot R_\varrho$ in den S_μ und S_ϱ einen Grad $r_\mu < n_\mu$; $r'_\varrho < n'_\varrho + n''_\varrho = n_\varrho$, und da $J_\varrho \cdot R_\varrho = J_\varrho H - J_\varrho K_\varrho L_\varrho \equiv 0\,(\mathfrak{M})$, so ist zugleich $J_\varrho \cdot R_\varrho \equiv 0\,(l^k)$ und damit auch $R_\varrho \equiv 0\,(l^k)$, weil $J_\varrho \mid F_\varrho \not\equiv 0\,(l)$. Danach wird $H \equiv 0\,(L_\varrho, l^k)$, wenn H schon (mod $\mathfrak{M}$) reduziert ist; im allgemeinen dann $H \equiv 0\,(\mathfrak{M}, L_\varrho, l^k)$, d. h. (mod $\mathfrak{M}_\varrho$).

Man hat außerdem gewonnen: $H \equiv K_\varrho \cdot L_\varrho\,(\mathfrak{M})$.

Um nun zur allgemeineren Darstellung $H \equiv L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_\nu H'(\mathfrak{M})$ zu gelangen, setze man zuerst ein: $H \equiv K_1 \cdot L_1\,(\mathfrak{M})$. Es folgt dann aus $J_2 \cdot H \equiv (J_2 \cdot K_1) \cdot L_1 \equiv 0\,(\mathfrak{M})$ nach dem eben Bewiesenen die Kongruenz $J_2(S_2) \cdot K_1 \equiv 0\,(\mathfrak{M}, J_1)$, und da dieser Modul noch die Gestalt $(l^k, J_1(S_1), F_2(S_2), \dots)$ hat, so gibt es eine Darstellung $K_1 \equiv L_2 N(\mathfrak{M}, J_1)$, woraus dann folgt: $H \equiv L_1 K_1 \equiv L_1 L_2 N(\mathfrak{M})$. Entsprechend folgt dann allgemein aus $H \equiv L_1 L_2 \dots L_{\varrho-1} P$ und $J_\varrho \cdot H \equiv 0\,(\mathfrak{M})$:

$$J_\varrho \cdot P \equiv 0\,(\mathfrak{M}, J_1, \dots, J_{\varrho-1}); \qquad P \equiv L_\varrho \cdot Q\,(\mathfrak{M}, J_1, \dots, J_{\varrho-1});$$
$$H \equiv L_1 L_2 \dots L_\varrho \cdot Q\,(\mathfrak{M}) \qquad (\varrho = 1 \dots \nu).$$

Der hier bewiesene Satz sei im folgenden kurz als „Modulsatz" bezeichnet.

Um mit Galoisschen Gruppen von Körpern besser operieren zu können, seien noch folgende Festsetzungen getroffen: Ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ ein direktes Produkt der Gruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_r$ und damit $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_\varrho \times \mathfrak{A}'_\varrho$, wo $\mathfrak{A}'_\varrho = \prod_{\nu \neq \varrho} \mathfrak{A}_\nu$, so heiße $\mathfrak{H}$ auch das absolute Produkt der Faktorgruppen $\mathfrak{H}_\varrho = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}'_\varrho}$ $(\varrho = 1 \dots r)$. Es besteht einstufiger Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}_\varrho$ und $\mathfrak{A}_\varrho$ $(\mathfrak{H}_\varrho \sim \mathfrak{A}_\varrho)$.

Sind allgemeiner die Faktoren $\mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_r$ des direkten Produktes $\mathfrak{H}$ invariante Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ (also auch $\mathfrak{H} \lhd \mathfrak{G}$), so heiße $\mathfrak{G}$ relatives Produkt der Faktorgruppen $\mathfrak{G}_\varrho = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_\varrho}$ $(\varrho = 1 \dots r)$ über $\overline{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}$, wo wieder $\mathfrak{A}'_\varrho = \prod_{\nu \neq \varrho} \mathfrak{A}_\nu$.

Das Kompositionsgesetz eines relativen Produkts $\mathfrak{G}$ ist durch die Kompositionsgesetze seiner Faktoren $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ schon eindeutig bestimmt: Man kann die Elemente von $\mathfrak{G}$ unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen in der Form $G = S A_1 A_2 \dots A_r$ darstellen, wo $A_\varrho < \mathfrak{A}_\varrho$ und S ein vollständiges Restsystem (mod $\mathfrak{H}$) in $\mathfrak{G}$ durchläuft. Hat man zwei Elemente $G' = S' A'_1 \dots A'_r$ und $G'' = S'' A''_1 \dots A''_r$, und ist $G' G'' = G = S A_1 \dots A_r$, so ist wegen $S' \mathfrak{H} \cdot S'' \mathfrak{H} = S \mathfrak{H}$ der Rest S schon durch S' und S'' bestimmt, und das Element A_ϱ bestimmt sich dann schon allein aus der gleichzeitig in $\mathfrak{G}_\varrho = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_\varrho}$ geltenden Gleichung:

$$S' A'_\varrho \mathfrak{A}'_\varrho \cdot S'' A''_\varrho \mathfrak{A}'_\varrho = S A_\varrho \mathfrak{A}'_\varrho .$$

Das Kompositionsgesetz von $\mathfrak{G}$ erhält man damit tatsächlich schon durch Kombination der einzelnen in den $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ auszuführenden Kompositionen, und noch mehr: Man kann für die gemeinsame Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der $\mathfrak{G}_\varrho$ ein beliebiges Kompositionsgesetz aufstellen und dieses dann beliebig zu Kompositionsgesetzen für die $\mathfrak{G}_\varrho$ ergänzen; die eben beschriebene Kombination der Kompositionsgesetze liefert dann stets wieder ein Gruppengesetz, wie man unmittelbar sieht.

Es hat demnach nicht nur die Zerlegung einer Gruppe in ein relatives Produkt einen Sinn, sondern es ist auch die Bildung eines relativen Produkts ein wohlbestimmter, immer ausführbarer Prozeß. Man muß sich hierbei nur daran gewöhnen, daß man eine gegebene Gruppe als Faktorgruppe einer weiteren auffassen darf. Dieser Erweiterungsprozeß, bei dem das ursprüngliche Einheitselement zu einer invarianten Untergruppe einer neuen Gruppe wird, möge Aufspaltung heißen. Bei der Bildung eines relativen Produkts werden mit einer Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ erst r verschiedene Aufspaltungen vorgenommen, die zu den Gruppen $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ führen, und die Vereinigung dieser Aufspaltungen führt dann zum relativen Produkt $\mathfrak{G}$, das seinerseits eine Aufspaltung jedes Faktors $\mathfrak{G}_\varrho$ ist.

Für die Körpertheorie hat der Begriff des relativen Produkts folgende Bedeutung: *Es seien $K_1, \dots K_r$ relativ Galoissche Körper über K_0 mit dem größten gemeinsamen Teiler $\overline{K}$ und über diesem voneinander unabhängig, d. h. jeder habe mit dem Produkt der übrigen auch nur den Körper $\overline{K}$ gemeinsam. Es seien $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ die Galoisschen Gruppen von $K_1, \dots K_r$ über K_0. Dann ist das relative Produkt der Gruppen $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ die Galoissche Gruppe des Produkts $K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_r$:*

Ist $\overline{K} = K_0(\vartheta)$; $K_\varrho = K_0(\alpha_\varrho)$; $\vartheta = \varphi_\varrho(\alpha_\varrho)$, und wird der Produktkörper durch $\psi = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ erzeugt, so gehen aus einer Substitution $(\vartheta \to \vartheta^{(\nu)})$ der Gruppe von $\frac{\overline{K}}{K_0}$ durch Aufspaltung in K_ϱ die Substitutionen $(\alpha_\varrho \to \alpha_\varrho^{(\nu,\sigma)})$ hervor, so daß $\varphi_\varrho(\alpha_\varrho^{(\nu,\sigma)}) = \vartheta^{(\nu)}$; speziell $\varphi_\varrho(\alpha_\varrho^{(\sigma)}) = \vartheta$. Die Konjugierten von ψ in bezug auf $\overline{K}$ sind dann die $\psi(\alpha_1^{(\sigma_1)}, \alpha_2^{(\sigma_2)}, \ldots, \alpha_r^{(\sigma_r)})$; die σ_ϱ sind hierbei voneinander unabhängig, da das Produkt der K_ϱ unabhängig über $\overline{K}$ ist. Die Konjugierten von ψ in bezug auf K_0 haben dann die Form $\psi(\alpha_1^{(\nu,\sigma_1)}, \alpha_2^{(\nu,\sigma_2)}, \ldots, \alpha_r^{(\nu,\sigma_r)})$. Das die Substitutionsverknüpfung bestimmende Kompositionsgesetz der Indizes ν, σ ist das eines relativen Produktes.

Man hat hiermit eine Methode gewonnen, aus dem Kompositionsgesetz der Galoisschen Gruppe von $K_1, \ldots K_r$ das der Galoisschen Gruppe ihres Produkts abzuleiten. Im allgemeinen gewinnt man erst dadurch auch die Struktur der Galoisschen Gruppe des Produktkörpers:

Während die Struktur eines absoluten Produkts (gleich der eines direkten Produkts) schon durch die Struktur[2]) ihrer Faktoren bestimmt ist, genügt es zur Bestimmung der Struktur eines über einer Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ gebildeten relativen Produkts von Gruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_r$ im allgemeinen nicht einmal, die Struktur der $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_r$ und den Stil[2]) von $\mathfrak{G}$ innerhalb $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_r$ anzugeben, wie man z. B. an den in Kap. V unter 3b) behandelten Gruppen sieht. Dies hieße nämlich, daß man in den Gruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_r$ unabhängig voneinander beliebige Automorphismen zuließe. Um die Struktur des relativen Produkts aber invariant zu lassen, darf man zwar in einer Gruppe $\mathfrak{G}_1$ einen beliebigen Automorphismus vornehmen; in den übrigen $\mathfrak{G}_\varrho$ sind aber nur noch solche Automorphismen zulässig, die für die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ denselben Automorphismus bewirken wie der in $\mathfrak{G}_1$ angesetzte.

Doch reicht es aus, daß man das Kompositionsgesetz eines relativen Produkts $\mathfrak{G}$ aus den Kompositionsgesetzen seiner Faktoren $\mathfrak{G}_\varrho$ bestimmen kann, um die Konstruktion eines Körpers mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Konstruktion von Körpern K_ϱ mit den Gruppen $\mathfrak{G}_\varrho$ zurückzuführen:

Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ die gemeinsame Faktorgruppe der $\mathfrak{G}_\varrho$, so wird es in gewissen Fällen darauf ankommen, eine passende Wahl des Körpers $\overline{K}$ zur Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ zu treffen, die ja von vornherein nur als abstrakter Gruppentyp, also ihrer Struktur nach gegeben ist; in andern Fällen kann wieder die Wahl des Körpers $\overline{K}$ ohne Einfluß auf die Fortsetzbarkeit der Konstruktion sein;

[2]) Zwei Gruppen haben dieselbe Struktur, wenn sie einander (einstufig) isomorph zugeordnet werden können. Innerhalb einer Gruppe haben zwei Untergruppen oder Faktorgruppen denselben Stil, wenn sie durch einen Automorphismus der ganzen Gruppe ineinander übergeführt werden können.

das hängt von der Beschaffenheit der Gruppen $\mathfrak{G}_\varrho$ ab. Hat man jetzt einen Körper $\overline{K}$ bestimmt, so hat damit die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ eine konkrete Bedeutung als Galoissche Gruppe von $\overline{K}$ gewonnen. Man zähle deshalb unter allen möglichen Aufspaltungen $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ zwei Aufspaltungen $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ erst dann zum selben Typus, wenn $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ durch einen Isomorphismus ineinander übergehen können, der jedes Element von $\overline{\mathfrak{G}}$ in sich selbst überführt. Man kann dann alle $\overline{K}$ enthaltenden Körper genau nach dem Typus ihrer Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ (als Aufspaltung von $\overline{\mathfrak{G}}$) einteilen; das ist eine schärfere Einteilung als nach der Struktur von $\mathfrak{G}$.

Aus dem so formulierten Begriff des Typus geht hervor, daß der Typus eines relativen Produkts von Gruppen über der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ durch den Typus der einzelnen Faktoren bestimmt ist. Unter diesen Faktoren können mehrere vom gleichen Typ auftreten; wir schreiben dafür ein Typenprodukt: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1^{a_1} \mathfrak{G}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{G}_r^{a_r}$. Die Konstruktion eines Körpers zum Typ $\mathfrak{G}$ kann dann auf die Konstruktion von Körpern zu den Typen $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_r$ zurückgeführt werden, wenn der zur Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ bestimmte Körper $\overline{K}$ die Eignung besitzt, daß zu jedem Faktor $\mathfrak{G}_\varrho$ auch entsprechend viele über $\overline{K}$ voneinander unabhängige Körper gebildet werden können. Im allgemeinen wird es auf die Konstruktionsmöglichkeit unendlich vieler Körper ankommen, da man ja schon eine beliebige Potenz eines gegebenen Typus bilden kann.

Über das Verhältnis von Typus und Struktur sei noch folgendes gesagt: Besitzt eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ $w = uv$ Automorphismen V, und ist $\mathfrak{G}$ eine Aufspaltung von $\overline{\mathfrak{G}}$, so kann man w konjugierte Aufspaltungen $\mathfrak{G}^V$ zu $\mathfrak{G}$ bilden, die die gleiche Struktur besitzen und in denen $\overline{\mathfrak{G}}$ den gleichen Stil hat. $\mathfrak{G}^V$ entsteht so, daß man auf $\overline{\mathfrak{G}}$ zuerst den Automorphismus V ausübt und an dem so permutierten $\overline{\mathfrak{G}}$ (an $\overline{\mathfrak{G}}^V$) die obige Aufspaltung vornimmt. Führen u Automorphismen V (eine Untergruppe aller) auf denselben Typus $\mathfrak{G}$, so hat man v verschiedene konjugierte Aufspaltungen zu $\mathfrak{G}$, deren relatives Produkt eine „Normalaufspaltung“ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, eine solche, innerhalb der noch alle Automorphismen von $\overline{\mathfrak{G}}$ anwendbar sind ($v = 1$). Der Typus einer Normalaufspaltung $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist schon durch seine Struktur und den Stil von $\overline{\mathfrak{G}}$ innerhalb $\mathfrak{G}$ bestimmt.

II. Diskussion zweistufiger Gruppen.

Es ist bekannt, daß sich eine auflösbare Gruppe in eine Reihe: $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{G}' \triangleright \mathfrak{G}'' \triangleright \ldots \triangleright \mathfrak{G}^{(n)} = E$ entwickeln läßt, wo $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}'}, \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}''}, \frac{\mathfrak{G}''}{\mathfrak{G}'''}, \ldots$ die maximalen Abelschen Faktorgruppen von $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ sind. Durch $\mathfrak{G}$ sind die Gruppen $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ eindeutig bestimmt, und jedes $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ ist invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ heißen die Ableitungen von $\mathfrak{G}$,

$\mathfrak{G}'$ speziell die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}''$ die von $\mathfrak{G}', \ldots$), da sie aus allen Kommutatoren: $S^{-1}T^{-1}ST$ je zweier Elemente von $\mathfrak{G}$ erzeugt wird. Ebenso heiße $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}'}$ der Kommutatorfaktor von $\mathfrak{G}$.

Ist noch $\mathfrak{G}^{(n-1)} \neq E$, aber $\mathfrak{G}^{(n)} = E$, so heiße $\mathfrak{G}$ eine n-stufige Gruppe.

Wir wollen hier nur erst die zweistufigen (metabelschen) Gruppen oder überhaupt den Fall von Gruppentypen $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$ betrachten, wo $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}$ Abelsch sind. Es soll im allgemeinen nicht verlangt werden, daß $\mathfrak{A}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ sei; für viele Fälle wäre dies sogar unvorteilhaft. Natürlich entsteht dadurch die Möglichkeit, daß einige Typen von zweistufigen Gruppen auf mehrfache Weise behandelt werden. Jedenfalls ist aber jeder Typus einer zweistufigen Gruppe unter der Form $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$ enthalten (auch die Abelschen Gruppen selbst, von denen wir ausgehen).

Die Behandlung der zweistufigen Gruppen kann nun in der Weise erfolgen, daß man sie auf gewisse Haupttypen zurückführt und diese dann ausreichend charakterisiert. Dabei sei unter einer Reduktion auf speziellere Gruppentypen folgendes verstanden: 1. Zerspaltung einer Gruppe $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$ $\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right.$ und $\mathfrak{A}$ Abelsch$\left.\right)$ über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ in ein relatives Produkt. 2. Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ als Faktorgruppe einer andern. Die erste Reduktion bedeutet eine wirkliche Vereinfachung; die zweite nur eine Vereinheitlichung mit dem Erfolg, daß man sich auf gewisse maximale Typen beschränken kann. Die beiden angegebenen Gruppenreduktionen reduzieren zugleich die Aufgabe, Körper zu den betreffenden Gruppen zu konstruieren; die allgemeineren Körpertypen stellen sich hier als Produktkörper bzw. Unterkörper der spezielleren dar.

Eine Reduktion kann man nun mit der allgemeinen Gruppe $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$ $\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right.$ und $\mathfrak{A}$ Abelsch$\left.\right)$ sofort vornehmen: Sind $l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots, l^{(n)}$ die verschiedenen in der Ordnung von $\mathfrak{A}$ aufgehenden Primzahlen, so kann man $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ zerlegen, wobei $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1 \ldots n)$ die Elemente von $\mathfrak{A}$ umfaßt, deren Ordnung eine Potenz von $l^{(\nu)}$ ist. Jedes $\mathfrak{A}_\varrho$ ist dann offenbar eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, da jedes Element von $\mathfrak{A}$ bei Transformation wieder nur in ein Element gleicher Ordnung aus $\mathfrak{A}$ übergehen kann, ebenso jedes $\mathfrak{A}'_\nu = \prod_{\varrho \neq \nu} \mathfrak{A}_\varrho$, das aus allen Elementen von $\mathfrak{A}$ besteht, deren Ordnung zu $l^{(\nu)}$ teilerfremd ist, und für das $\mathfrak{A}_\nu \times \mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}$ gilt. Es ist darum $\mathfrak{G}$ das relative Produkt der Gruppen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_\nu}$ $(\nu = 1 \ldots n)$ über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$. Das heißt aber: Es können alle zweistufigen Gruppen als bekannt

gelten, wenn alle solche Gruppen $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$ bekannt sind, bei denen $\mathfrak{A}$ von Primzahlpotenzordnung ist. Es genügt, solche zweistufigen Körper zu konstruieren, bei denen der zweite auf den ersten Abelschen Körper aufzusetzende Körper von Primzahlpotenzgrad ist. Dabei braucht man vorläufig noch zu keinem Gruppentyp unendlich viele Körper zu verlangen, da die Faktoren $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_\nu}$ alle verschiedenartig sind, schon weil die $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'_\nu}$ teilerfremde Ordnungen haben.

Die zu behandelnden Gruppen haben jetzt folgende Gestalt:

$$\mathfrak{G} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m; \mathfrak{A}\}; \quad \mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}_{\mathfrak{S}}; \quad \mathrm{Ord}(A_\varrho) = l^{k_\varrho}.$$

$S_1\mathfrak{A}, S_2\mathfrak{A}, \ldots, S_m\mathfrak{A}$ sei eine Basis für $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ und $\mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A}) = l_\mu^{h_\mu}$ (l, l_μ Primzahlen). Für $l_\mu \neq l$ kann man S_μ als von $\mathfrak{A}$ unabhängig ($\mathrm{Ord}(S_\mu) = \mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A}) = l_\mu^{h_\mu}$) annehmen; denn ist noch $\mathrm{Ord}(S_\mu) = l^c \cdot l_\mu^{h_\mu}$, so kann man $S_\mu^{l^c}$ statt S_μ in die Basis einsetzen. Ist dagegen $l_\mu = l$, so läßt sich im allgemeinen nicht $\mathrm{Ord}(S_\mu) = \mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A})$ erreichen. ($\mathrm{Ord}(A)$ bedeute die Ordnung von A.)

Bevor wir zur Betrachtung von spezielleren Gruppentypen übergehen, seien noch einige Rechenregeln für Kommutatoren zweistufiger Gruppen angeführt:

Sind S und T zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$, und ist $S^{-1}T^{-1}ST = A$, also auch $S^T = SA$; $ST = TSA$, so nenne man A den Kommutator *von* S *mit* T. Es ist dann offenbar A^{-1} der Kommutator von T mit S. Weiter gilt[2a]):

$$1) \qquad (S^\nu)^{T^\mu} = S^\nu A^{\frac{T^\mu - 1}{T-1} \cdot \frac{S^\nu - 1}{S-1}};$$

der Kommutator von S^ν mit T^μ ist also eine symbolische Potenz von A.

$$(2) \qquad A_1, A_2 < \mathfrak{A} : (SA_2)^{TA_1} = SAA_1^{1-S}A_2^T.$$

(A, A_1, A_2 vertauschbar!)

Der Kommutator von SA_2 mit TA_1 setzt sich also zusammen: $A \cdot A_1^{1-S}A_2^{T-1}$.

Wir stellen jetzt einen speziellen Typus von zweistufigen Gruppen auf, mit dem man die zweistufigen Gruppen in weitem Umfange erfassen kann, und für den sich die Konstruktion von Körpern glatt ausführen läßt.

Erster Haupttypus: Die zweistufige Dispositionsgruppe.

Eine Gruppe $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$ heiße eine zweistufige Dispositionsgruppe, wenn $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}$ Abelsch sind, und wenn es in $\mathfrak{A}$ ein Element A gibt, so

[2a]) Vgl. Ph. Furtwängler loc. cit. S. 16 u.

daß die Potenzen A^S eine Basis von $\mathfrak{A}$ bilden, wenn S ein vollständiges Restsystem $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{G}$ durchläuft. Außerdem sei A, und damit auch $\mathfrak{A}$, von Primzahlpotenzordnung.

Die Dispositionsgruppe ist also dadurch charakterisiert, daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ durch ein einziges Element A symbolisch erzeugt wird, das bei fester natürlicher Ordnung l^k und gegebenem $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} = \{S_1\mathfrak{A}, \ldots, S_m\mathfrak{A}\}$ mit $\mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A}) = l_\mu^{h_\mu}$ die maximale symbolische Ordnung

$$\mathfrak{M} = (l^k, S_1^{l_1^{h_1}} - 1, \ldots, S_m^{l_m^{h_m}} - 1)$$

besitzt. $\mathfrak{G}$ kann also dargestellt werden:

$$\mathfrak{G} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m; \{A\}_\mathfrak{S}\} = \sum S_1^{c_1} S_2^{c_2} \ldots S_m^{c_m} A^{F(S)}.$$

(Die Summe ist über ein vollständiges Restsystem $(\mathrm{mod}\, l_\mu^{h_\mu})$ für c_μ und $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{M})$ für $F(S) = F(S_1, \ldots, S_m)$ zu erstrecken.)

$\mathfrak{M}$ ist natürlich invariant gegenüber einer Basistransformation in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$.

In der Dispositionsgruppe lassen sich nun, wie gezeigt werden soll, die $S_1, S_2, \ldots, S_m$ so aus ihren Nebengruppen $S_1\mathfrak{A}, S_2\mathfrak{A}, \ldots, S_m\mathfrak{A}$ auswählen, daß $\mathrm{Ord}(S_\mu) = \mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A})$ und $S_\mu S_\nu = S_\nu S_\mu$ wird. Ist dies geschehen, so heiße die Dispositionsgruppe *normiert*.

Zum Beweis der Normierbarkeit benutzen wir den Modulsatz. Zuerst suche man $\mathrm{Ord}(S_\mu) = \mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A})$ zu erreichen:

Ist

$$S_\mu^{l_\mu^{h_\mu}} = A^{H(S)},$$

so gilt wegen der Vertauschbarkeit von S_μ und $A^{H(S)}$:

$$(S_\mu - 1) \cdot H(S) \equiv 0\,(\mathfrak{M}).$$

Also läßt sich H darstellen:

$$H \equiv \frac{S_\mu^{l_\mu^{h_\mu}} - 1}{S_\mu - 1} \cdot H'(\mathfrak{M}).$$

Ersetzt man nun S_μ durch $S'_\mu = S_\mu A^{-H'}$, so wird $(S'_\mu)^{l_\mu^{h_\mu}} = E$.

Man darf S'_μ noch durch $S'_\mu A^{(1-S_\mu)F(S)}$ mit beliebig gewähltem $F(S)$ ersetzen; es ergibt die $l_\mu^{h_\mu}$-te Potenz dann ebenfalls das Einheitselement.

Jetzt bleibt noch zu zeigen, daß auch die Vertauschbarkeit je zweier S_μ in der Dispositionsgruppe erreicht werden kann. Es sei also schon $\mathrm{Ord}(S_\mu) = \mathrm{Ord}(S_\mu\mathfrak{A}) = l_\mu^{h_\mu}$. Ist $S_\mu S_1 = S_1 S_\mu A^{F(S)}$, also $S_\mu^{S_1} = S_\mu A^{F(S)}$; $S_1^{S_\mu} = S_1 A^{-F(S)}$, und dann

$$S_\mu^{S_1^\tau} = S_\mu A^{(1+S_1+\cdots+S_1^{\tau-1})F(S)}; \qquad S_1^{S_\mu^\tau} = S_1 A^{-(1+S_\mu+\ldots+S_\mu^{\tau-1})F(S)},$$

so folgt aus $S_\mu^{l_\mu^{h_\mu}} = E$:

$$\frac{S_1^{l_1^{h_1}}-1}{S_1-1}\cdot F \equiv \frac{S_\mu^{l_\mu^{h_\mu}}-1}{S_\mu-1}\cdot F \equiv 0;$$

also

$$F \equiv (1-S_1)(1-S_\mu)F''(\mathfrak{M}).$$

Ersetzt man dann S_μ durch $S_\mu A^{F'}$, wo $F' = (1-S_\mu)F''$, so bleibt die Ordnung von S_μ erhalten, und es wird:

$$(S_\mu A^{F'})^{S_1} = S_\mu^{S_1} A^{S_1 F'} = S_\mu A^{F+S_1 F'} = S_\mu A^{F'}.$$

Man kann also S_1 mit den übrigen S_μ vertauschbar machen, indem man die S_μ abändert, ohne ihre Ordnung zu ändern. Nachträglich darf man dann noch S'_μ durch jedes

$$S'_\mu A^{\left(1+S_1+\ldots+S_1^{l_1^{h_1}-1}\right)(1-S_\mu)J(S)}$$

ersetzen; es bleibt dann seine Vertauschbarkeit mit S_1 und seine Ordnung erhalten.

Hat man schon erreicht, daß für $\lambda < \mu$ jedes S_λ mit $S_1, S_2, \ldots, S_m$ vertauschbar ist (unter Beibehaltung der Ordnungen), so gelten, wenn $S_\nu^{S_\mu} = S_\nu A^J$ $(\nu > \mu)$, folgende Beziehungen:

$$\begin{cases} S_\nu^{S_\lambda S_\mu} = S_\nu^{S_\mu} = S_\nu A^J, \\ S_\nu^{S_\mu S_\lambda} = (S_\nu A^J)^{S_\lambda} = S_\nu A^{S_\lambda J}. \end{cases}$$

Nun ist aber schon $S_\lambda S_\mu = S_\mu S_\lambda$; also $A^J = A^{S_\lambda J}$; $(1-S_\lambda)J \equiv 0\,(\mathfrak{M})$. Anderseits gilt wie oben: $J \equiv (1-S_\mu)(1-S_\nu)J''(\mathfrak{M})$. Zusammengefaßt erhält man:

$$J \equiv \prod_{\lambda<\mu}\left(1+S_\lambda+\ldots+S_\lambda^{l_\lambda^{h_\lambda}-1}\right)(1-S_\mu)(1-S_\nu)\cdot J'''.$$

Ersetzt man jetzt S_ν durch $S_\nu A^{J'}$, wo

$$J' = \prod_{\lambda<\mu}\left(1+S_\lambda+\ldots+S_\lambda^{l_\lambda^{h_\lambda}-1}\right)(1-S_\nu)J''',$$

so bleibt S_ν wegen des Faktors $\prod_{\lambda<\mu}\sum S_\lambda^e$ von J' mit allen S_λ vertauschbar, wird außerdem wegen $J \equiv (1-S_\mu)J'$ mit S_μ vertauschbar und ändert wegen des Faktors $(1-S_\nu)$ von J' seine Ordnung nicht.

Es sind jetzt also $S_1, S_2, \ldots, S_\mu$ mit allen S_ν $(\nu = 1 \ldots m)$ vertauschbar, ohne daß ein S_ν seine Ordnung geändert hat. Man gelangt also schließlich zum Ziel.

Eine wichtige Folgerung aus diesen beiden Normierungsmöglichkeiten der Dispositionsgruppe ist, daß der Aufbau der Dispositionsgruppe durch

die Beschaffenheit der beiden Abelschen Gruppen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}$, oder noch einfacher: durch die Beschaffenheit von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ und die Ordnung l^k des Elementes A, das $\mathfrak{A}$ symbolisch erzeugt, bestimmt ist. Zugleich sieht man, daß jeder Typ $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ einer Abelschen Gruppe kombiniert mit einer Primzahlpotenz l^k oder, wie man auch sagen kann, daß jeder Modul $\mathfrak{M} = \left(l^k, S_1^{l^{h_1}} - 1, \ldots, S_m^{l^{h_m}} - 1\right)$ wirklich eine zweistufige Dispositionsgruppe $\mathfrak{G} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m; \{A\}_{\mathfrak{S}}\}$ bestimmt, bei der das Element A die natürliche Ordnung l^k erhält, und deren Elemente R sich auf die Gestalt bringen lassen:

$$R = P(S) \cdot A^{F(S)}; \qquad P(S) = \prod_{\mu} S_\mu^{c_\mu}.$$

Ihr Multiplikationsgesetz:

$$RR' = PP' \cdot A^{FP'+F'}; \qquad PP' = \prod S_\mu^{c_\mu + c'_\mu}$$

erfüllt das assoziative Gesetz:

$$(RR')R'' = R(R'R'') = PP'P'' \cdot A^{FP'P''+F'P''+F''}.$$

Es existiert ein inverses Element zu R:

$$R^{-1} = P^{-1}A^{-FP^{-1}}; \qquad P^{-1} = \prod S_\mu^{-c_\mu}.$$

$\mathfrak{G}$ heiße Dispositionsgruppe vom Typ $(l_1^{h_1} \ldots l_m^{h_m}; l^k)$.

$\mathfrak{G}$ ist ersichtlich eine Normalaufspaltung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$: Jeder Automorphismus (Basistransformation) der Gruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ ist nämlich auf die $\mathfrak{G}$-Untergruppe $\mathfrak{S}$ der $S = \prod S_\mu^{c_\mu}$ anwendbar und bewirkt zugleich einen Automorphismus in $\{A\}_{\mathfrak{S}}$, der die Basiselemente A^S untereinander permutiert.

Auf die Dispositionsgruppe lassen sich nun alle die zweistufigen Gruppen

$$\mathfrak{G} = \{S_1, \ldots S_m; \{A_1, \ldots A_r\}_{\mathfrak{S}}\}$$

zurückführen, für die man erreichen kann, daß $S_1, S_2, \ldots, S_m$ untereinander vertauschbar sind, indem man sie als Faktorgruppen relativer Produkte von Dispositionsgruppen darstellt. Diese sind aber nur ein Teil aller zweistufigen Gruppen.

Sei also $\mathfrak{G} = \{S_1, \ldots S_m, \{A_1, \ldots A_r\}_{\mathfrak{S}}\}$; $\mathrm{Ord}(A_\varrho) = l^{k_\varrho}$, $\mathrm{Max}(k_\varrho) = k$; $\mathrm{Ord}(S_\mu \mathfrak{A}) = l_\mu^{h_\mu}$; $\mathrm{Ord}(S_\mu) = l_\mu^{h'_\mu}$, $h'_\mu \geqq h_\mu$, wobei $h'_\mu > h_\mu$ nur für $l_\mu = l$ in Betracht kommt. Außerdem $S_\mu S_\nu = S_\nu S_\mu$; $\mu, \nu = 1 \ldots m$.

Man nehme die Abelsche Gruppe $\{S_1, \ldots S_m\}$ der Ordnung $\prod_\mu l_\mu^{h'_\mu}$, bilde zu ihr eine Dispositionsgruppe vom Typ $(l_1^{h'_1}, l_2^{h'_2}, \ldots, l_m^{h'_m}; l^k)$ und erhebe diese in die relative r-te Potenz. Man gelangt dann zu einer Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Gestalt:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \{\bar{S}_1, \ldots \bar{S}_m; \overline{\mathfrak{A}}\}; \qquad \overline{\mathfrak{A}} = \{\bar{A}_1\}_{\mathfrak{S}} \times \{\bar{A}_2\}_{\mathfrak{S}} \times \ldots \times \{\bar{A}_r\}_{\mathfrak{S}};$$

$$\mathrm{Ord}\,(\bar{S}_\mu\,\overline{\mathfrak{A}}) = \mathrm{Ord}\,(\bar{S}_\mu) = l_\mu^{h'_\mu}; \qquad \bar{S}_\mu \bar{S}_\nu = \bar{S}_\nu \bar{S}_\mu;$$

$$\mathrm{Ord}\,(\bar{A}_\varrho) = \left(l^k,\ \bar{S}_1^{l_1^{h'_1}} - 1, \ldots, \bar{S}_m^{l_m^{h'_m}} - 1\right).$$

Man erhält einen Homomorphismus zwischen $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}$ durch die Zuordnung:

$$\prod_{\mu=1}^{m} \bar{S}_\mu^{c_\mu} \prod_{\varrho=1}^{r} \bar{A}_\varrho^{F_\varrho(\bar{S}_1, \ldots \bar{S}_m)} \to \prod_{\mu=1}^{m} S_\mu^{c_\mu} \prod_{\varrho=1}^{r} A_\varrho^{F_\varrho(S_1, \ldots S_m)}.$$

Die Eindeutigkeit der Zuordnung ist dadurch gewährleistet, daß die (natürlichen bzw. symbolischen) Ordnungen der erzeugenden Elemente von $\mathfrak{G}$ Teiler der entsprechenden Ordnungen in $\overline{\mathfrak{G}}$ sind und in $\overline{\mathfrak{G}}$ die erzeugenden Elemente (symbolisch) unabhängig sind. Die Homomorphie wird dann durch das allgemeine Kompositionsgesetz:

$$\Pi S_\mu^{c_\mu} \Pi A_\varrho^{F_\varrho} \cdot \Pi S_\mu^{c'_\mu} \Pi A_\varrho^{F'_\varrho} = \Pi S_\mu^{c_\mu + c'_\mu} \Pi A_\varrho^{F_\varrho \cdot \Pi S_\mu^{c'_\mu} + F'_\varrho}$$

dieser Gruppen $\mathfrak{G}$ bestätigt. Man hat damit eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Faktorgruppe der Dispositionsgruppenpotenz $\overline{\mathfrak{G}}$ gewonnen.

Für die Gesamtheit der Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $S_\mu S_\nu = S_\nu S_\mu$ ist dann die Konstruierbarkeit von Körpern gesichert, wenn man zu jeder Dispositionsgruppe $\mathring{\mathfrak{G}} > \mathring{\mathfrak{A}}$ unendlich viele Körper mit größtem gemeinsamen Unterkörper zur Gruppe $\frac{\mathring{\mathfrak{G}}}{\mathring{\mathfrak{A}}}$ konstruieren kann.

Unter die Gruppen $\mathfrak{G} = \sum S_1^{\alpha_1} \ldots S_m^{\alpha_m} \mathfrak{A}$, die sich so normieren lassen, daß die S_μ untereinander vertauschbar sind, und sich damit auf Dispositionsgruppen zurückführen lassen, gehören nun vor allem diejenigen, für die die Ordnung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ zur (Primzahlpotenz-) Ordnung von $\mathfrak{A}$ teilerfremd ist.

Sei nämlich:

$$\mathfrak{G} = \sum S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \ldots S_m^{\alpha_m} \mathfrak{A};\ \mathrm{Ord}\,(S_\mu) = \mathrm{Ord}\,(S_\mu \mathfrak{A}) = l_\mu^{h_\mu};\ l_\mu \neq l;\ \mathrm{Ord}\,(\mathfrak{A}) = l^a.$$

Ferner sei $S_\mu^{S_1} = S_\mu A_{1\mu}$; $A_{1\mu} < \mathfrak{A}$. Es gilt dann:

$$S_\mu^{S_1^{h_1}} = S_\mu A_{1\mu}^{\sum S_1^\lambda} = S_\mu \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, l_1^{h_1} - 1):\ A_{1\mu}^{\sum S_1^\lambda} = E.$$

Da nun $S_1 - 1$ und $\sum S_1^\lambda \pmod{l}$ zueinander teilerfremd sind wegen $(l_1, l) = 1$, so kann man ein $J(S_1)$ bestimmen, daß

$$(1 - S_1) \cdot J(S_1) \equiv 1\,(\sum S_1^\lambda, l^a),$$

also nach einem durch die symbolische Ordnung von $A_{1\mu}$ teilbaren Modul. Setzt man dann $S'_\mu = S_\mu A_{1\mu}^J$, so ist

$$S_\mu'^{S_1} = S_\mu A_{1\mu} A_{1\mu}^{S_1 J} = S_\mu A_{1\mu}^{(1-S_1)J + S_1 J} = S'_\mu:\ S_1 S'_\mu = S'_\mu S_1.$$

Ersetzt man noch S'_μ durch $S'^{\,l^a}_\mu$, so hat man auch wieder Ord $(S'^{\,l^a}_\mu) = l^{h_\mu}_\mu$. Sind schon $S_1, \dots S_{\mu-1}$ mit allen S_ν $(\nu = 1 \dots m)$ vertauschbar, so ist auch der Kommutator $A_{\mu\nu} = S_\nu^{-1} S_\nu^{S_\mu}$ mit jedem S_λ $(\lambda < \mu)$ vertauschbar. Ersetzt man dann S_ν durch $S'_\nu = S_\nu A_{\mu\nu}^{J_\mu (S_\mu)}$, wo

$$(1 - S_\mu) J_\mu \equiv 1 \left(l^a, \sum_{\varrho=0}^{l^{h_\mu - 1}_\mu} S_\mu^\varrho \right),$$

so wird S'_ν mit S_μ vertauschbar und bleibt außerdem mit den S_λ $(\lambda < \mu)$ vertauschbar. Die Normierungsmöglichkeit dieser Gruppen $\mathfrak{G}$ ist damit gezeigt.

Man kann aber noch allgemeiner schließen: Hat $\mathfrak{G}$ die Gestalt

$$\mathfrak{G} = \sum S_1^{\alpha_1} \dots S_m^{\alpha_m} T_1^{\beta_1} \dots T_n^{\beta_n} \mathfrak{A},$$

wo wieder die Ordnungen der S_μ zu l teilerfremd sind und die T_ν eine Potenz von l als Ordnung haben (dabei nicht notwendig von $\mathfrak{A}$ unabhängig sind), so kann man, wenn die S_μ untereinander schon vertauschbar gemacht sind, noch erreichen, daß die S_μ mit den T_ν vertauschbar werden, indem man, wenn $T_\nu^{S_\mu} = T_\nu B_{\mu\nu}$ gilt, T_ν durch $T'_\nu = T_\nu B_{\mu\nu}^{J_\mu}$ ersetzt, wo J_μ dieselbe Bedeutung wie oben hat. T'_ν bleibt dann mit den S_λ vertauschbar, mit denen T_ν schon vertauschbar ist. Die T_ν können aber untereinander im allgemeinen nicht mehr vertauschbar gemacht werden.

Hat man die Auswahl der Repräsentanten S_μ, T_ν für die Basiselemente $S_\mu \mathfrak{A}$, $T_\nu \mathfrak{A}$ der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ so getroffen, daß Ord (S_μ) = Ord $(S_\mu \mathfrak{A})$; $S_\mu S_\nu = S_\nu S_\mu$; $S_\mu T_\nu = T_\nu S_\mu$ allgemein gilt, so heiße die Gruppe $\mathfrak{G}$ (nach $\mathfrak{A}$) normiert.

Einer späteren Abhandlung sei es vorbehalten zu zeigen, daß man jede zweistufige Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Kommutatorgruppe $\mathfrak{A}$ von Primzahlpotenzordnung ist, dadurch, daß man sie nach $\mathfrak{A}$ normiert, über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ in ein relatives Produkt zweier Faktoren zerspalten kann, von denen sich der eine auf die Dispositionsgruppe zurückführen läßt, während der andere das absolute Produkt einer Abelschen Gruppe und einer zweistufigen Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist. Die Aufgabe, Körper zu beliebiger zweistufiger Gruppe zu konstruieren, reduziert sich entsprechend auf die Konstruktion von Dispositionskörpern und zweistufigen Körpern von Primzahlpotenzgrad. Für die zweistufigen Gruppen von Primzahlpotenzordnung werden in derselben Abhandlung Maximaltypen aufgestellt werden, die nur von der Ordnung der Erzeugenden $S_1, \dots S_m$ und der in der Kommutatorgruppe vorkommenden Maximalordnung abhängen und alle genannten Gruppen als Faktorgruppen aufweisen.

Wir schreiten nunmehr zu den Körperkonstruktionen.

III. Konstruktion des Abelschen Körpers.

Da jeder Abelsche Körper ein Produkt von zyklischen Körpern von Primzahlpotenzgrad ist, genügt es, die Aufgabe zu behandeln: Über einem gegebenen endlichen Körper K_0 zyklische Körper K_1 von einem beliebigen Primzahlpotenzgrad l^h zu konstruieren. Am einfachsten wäre hier, so zu verfahren: Falls K_0 der Körper der rationalen Zahlen ist, handelt es sich jedenfalls um eine Kreiskörperkonstruktion, und man könnte dann als zyklischen Körper vom Grade l^h einen Unterkörper des Körpers der p-ten Einheitswurzeln wählen, wo p eine Primzahl der Form $l^h \cdot x + 1$ ist; man hätte eine unendliche Auswahl von solchen Primzahlen und daher auch von passenden zyklischen Körpern. Für einen beliebigen endlichen Grundkörper K_0 könnte man dann die Aufgabe durch Adjunktion eines solchen Kreiskörpers erledigen; nur scheiden hier eine endliche Anzahl solcher Kreiskörper aus, die mit K_0 einen Teiler gemeinsam haben. Es ergibt sich also wieder eine Konstruktionsmöglichkeit für unendlich viele Körper.

Wenn man aber bedenkt, daß weiter das Ziel verfolgt werden soll, zu mehrstufigen Gruppen Körper zu konstruieren, und zwar durch Aufeinandersetzen von Körpern, so daß jeder folgende in bezug auf den vorhergehenden Abelsch ist, so sieht man, daß das eben besprochene Verfahren nicht den genügenden Spielraum gibt, da eine Kette von Kreiskörperadjunktionen wieder eine Kreiskörperadjunktion ergibt. Man muß ein Verfahren wählen, das für die konstruierbaren relativ-Abelschen Körper keine Einschränkung der Möglichkeiten ihrer absoluten Galoisschen Konstitution bedeutet. Ein in dieser Beziehung wenigstens sehr weit reichendes Verfahren ist folgendes:

Man konstruiere den relativ-zyklischen Körper K_1 vom Grade l^h als Klassenkörper über K_0, und zwar als Restkörper nach einem Primidealführer $\mathfrak{p}$, für den $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \,(l^h)$ gilt und für den alle (zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden) Zahlen aus K_0, die l^h-te Idealpotenzen sind, speziell also alle Einheiten, l^h-te Potenzreste sind. Man sage hierfür kurz (in Anlehnung an die bekannte Furtwänglersche Bezeichnung): $\mathfrak{p}$ sei ein primäres Primideal $(\mathrm{mod}\, l^h)$ in K_0. Hat man ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ gefunden, so stelle man eine Idealklassengruppe $\bar{\mathrm{J}}$ $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$ in K_0 auf, deren Hauptklasse aus allen l^h-ten Potenzresten und überhaupt allen den Idealen gebildet ist, von denen eine g-te Potenz, wo $(g, l) = 1$, einen l^h-ten Potenzrest $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$ ergibt, wie man sich ausdrücken kann, da jede Einheit l^h-ter Potenzrest ist. Die Ordnung von $\bar{\mathrm{J}}$ ist offenbar eine Potenz von l. Ist $\bar{\mathrm{A}}$ die Untergruppe der Zahlidealklassen von $\bar{\mathrm{J}}$ (von der Ordnung l^h), so läßt sich nun $\bar{\mathrm{J}} = \bar{\mathrm{A}} \times \bar{\mathrm{C}}$ zerspalten, wo dann $\bar{\mathrm{C}}$ eine Gruppe ist, die zugleich ein Repräsentanten-

ystem für die absoluten Idealklassen in bezug auf die Primzahl l in K_0 ildet: Es genügt zu zeigen, daß man für eine Basis $C_1, C_2, \ldots, C_e$ der bsoluten Idealklassengruppe ein Repräsentantensystem $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_e$ aus $\bar{J}$ o auswählen kann, daß $\mathrm{Ord}(\bar{C}_i) = \mathrm{Ord}(C_i)$; denn dann bildet ein Repräsentantensystem der $\prod \bar{C}_i^{\mu_i}$ für die $\prod C_i^{\mu_i}$, d. h. ein vollständiges Restsystem $(\mathrm{mod}\,\bar{A})$ in $\bar{J}$, eine Gruppe, und es folgt $\bar{J} = \bar{A} \times \{\bar{C}_1, \ldots \bar{C}_e\}$. Ist nun $\mathrm{Ord}(C_i) = l^{h_i}$ und $h_i \geqq h$, so enthält $\bar{C}_i^{l^{h_i}}$ Zahlen, die l^h-te Idealpotenzen sind, also ist $\bar{C}_i^{l^{h_i}} = \bar{E}$; ist $h_i < h$, so kann man von einem beliebig gewählten Repräsentanten $\bar{C}_i$ nur sagen, daß $\bar{C}_i^{l^{h_i}}$ Zahlen enthält, die l^{h_i}-te Idealpotenzen sind, also $\bar{C}_i^{l^{h_i}} = \gamma^{l^{h_i}} \bar{E}$, wo γ eine Zahl aus K_0 ist. Dann ist aber $\gamma^{-1} \bar{C}_i$ ein passender Repräsentant für C_i.

Nachdem man nun eine Zerlegung $\bar{J} = \bar{A} \times \bar{C}$ gewonnen hat, bilde man jetzt den zur Faktorgruppe $\frac{\bar{J}}{\bar{C}}$ gehörigen Klassenkörper, der ein Restkörper, zyklisch vom Grade l^h, ist: Die Klassengruppe $\frac{\bar{J}}{\bar{C}}$ kann ebenso wie die Untergruppe $\bar{A}$ von $\bar{J}$ durch die Potenzen $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{l^h} \sim 1$ eines l-ten Nichtrestes $\alpha\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p})$ repräsentiert werden. Für jedes Ideal $\mathfrak{j}$ besteht $(\mathrm{mod}\,\bar{C})$ eine Äquivalenz: $\mathfrak{j} \sim \alpha^r$.

Man braucht also nur noch die Existenz von unendlich vielen primären Primidealen $(\mathrm{mod}\,l^h)$ in K_0 nachzuweisen, dann liefert die eben angegebene Konstruktionsmethode unendlich viele zyklische Körper vom Grade l^h über K_0, deren Teilerfremdheit schon aus der Verschiedenheit ihrer Führer $\mathfrak{p}$ hervorgeht. Die primären Primideale $(\mathrm{mod}\,l^h)$ eines Körpers K_0 lassen sich aber nun so charakterisieren: Es sind diejenigen Primideale aus K_0, die im Körper

$$K_0^{(l^h)} = K_0(\zeta_{l^k+k};\ \sqrt[l^h]{\varepsilon_1}, \sqrt[l^h]{\varepsilon_2}, \ldots, \sqrt[l^h]{\varepsilon_r};\ \sqrt[l^h]{\varrho_1}, \sqrt[l^h]{\varrho_2}, \ldots, \sqrt[l^h]{\varrho_e})$$

in lauter verschiedene Primideale ersten Relativgrades zerfallen („vollständig zerfallen", wie man kurz dafür sage). Hierbei bedeute ζ_n allgemein eine primitive n-te Einheitswurzel, $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$ ein vollständiges System von Fundamentaleinheiten in K_0; die ϱ_i seien l^h-te Idealpotenzen: $(\varrho_i) = \mathfrak{r}_i^{l^h}$; $i = 1 \ldots e$, und $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_e$ Repräsentanten einer Basis derjenigen Idealklassen von K_0 (im absoluten Sinne), deren l^h-te Potenz die Hauptklasse ergibt; ferner liege noch ζ_{l^k}, aber nicht mehr $\zeta_{l^{k+1}}$ in K_0.

Die in $K_0^{(l^h)}$ vollständig zerfallenden Primideale aus K_0 sind nach bekannten Sätzen der Idealtheorie jedenfalls diejenigen, für die $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\,(l^h)$ gilt und $\varrho_1, \ldots \varrho_e$, $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$, ζ_{l^k} und damit auch alle Einheiten aus K_0 l^h-te Potenzreste sind, wenn man die in $\varrho_1, \ldots \varrho_e$ aufgehenden Primideale

außer acht läßt[3]). Ist nun ϱ eine zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde l^h-te Idealpotenz: $(\varrho) = \mathfrak{r}^{l^h}$, so ist $\mathfrak{r} = \gamma \prod_{i=1}^{e} \mathfrak{r}_i^{a_i}$ darstellbar und folglich $\varrho = \varepsilon \gamma^{l^h} \prod_{i=1}^{e} \varrho_i^{a_i}$, wo ε eine Einheit, also ϱ wirklich l^h-ter Potenzrest $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p})$ ist. (Das Umgekehrte folgt noch leichter.)

Solche Primideale $\mathfrak{p}$ in K_0, die in $K_0^{(l^h)}$ vollständig zerfallen, gibt es aber unendlich viele; denn es gibt in jedem Körper unendlich viele Primideale von sogar absolut erstem Grade, die zur Körperdiskriminante teilerfremd sind. Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein solches Primideal aus $K_0^{(l^h)}$, so ist in K_0 $N(\bar{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$ ein Primideal, welches in $K_0^{(l^h)}$ vollständig zerfällt, da $K_0^{(l^h)}$ relativ-Galoissch über K_0 ist.

Die Wahl von $\mathfrak{p}$ als primäres Primideal $(\mathrm{mod}\, l^h)$ bot hier zwei Vorteile: Es wurde einmal bewirkt, daß l^h Idealklassen durch Zahlreste α^r $(r = 0, 1, \ldots, l^h - 1)$ repräsentiert werden konnten, dadurch, daß man die Einheiten von K_0 zu l^h-ten Potenzresten $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p})$ machte; weiter wurde durch die Vorschrift, daß alle $\gamma = \mathfrak{j}^{l^h}$ $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p})$ l^h-te Potenzreste sein sollten, die Zahlrestgruppe als direkter Faktor abgespalten[4]).

IV. Konstruktion des zweistufigen Dispositionskörpers.

Die nächste Aufgabe ist jetzt die, über einem gegebenen endlichen Körper K_0 Körper K_2 zu konstruieren, deren Galoissche Gruppe eine Dispositionsgruppe $\mathfrak{G} \triangleright \mathfrak{A} \triangleright E$; $\mathfrak{G} = \{S_1, \ldots S_m; \{A\}_\mathfrak{S}\}$; $\mathrm{Ord}(S_\mu) = l_\mu^{h_\mu}$; $\prod_{\mu=1}^{m} l_\mu^{h_\mu} = \bar{m}$; $\mathrm{Ord}(A) = l^k$ ist. Es sei ein Abelscher Körper K_1 zur Galoisschen Gruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} = \{S_1\mathfrak{A}, \ldots S_m\mathfrak{A}\}$ über K_0 schon konstruiert. Es handelt sich jetzt also darum, auf den Körper K_1 einen Körper K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{A} = \{A\}_\mathfrak{S}$ passend aufzusetzen, so daß also K_2 ein relativ-Galoisscher Körper über K_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ wird. Die Gruppe $\{A\}_\mathfrak{S}$ ist nun ein direktes Produkt von $\bar{m}$ in $\mathfrak{G}$ konjugierten zyklischen Gruppen $\{A^S\}$ der Ordnung l^k, wo S ein vollständiges Restsystem $\mathfrak{S}$ $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{G}$ durchläuft. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß die Konstruktion von K_2 dadurch geleistet werden kann, daß man über K_1 ein Produkt von $\bar{m}$ unabhängigen zyklischen Körpern vom Grade l^k konstruiert, die untereinander in bezug auf K_0 konjugiert sind.

---

[3]) Der Körper $K_0^{(l^h)}$ hängt, wie man unmittelbar sieht, gar nicht davon ab, wie man die Repräsentanten $\varrho_1, \ldots \varrho_e$ der Idealklassen, ebenso $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_r$ auswählt; seine Relativdiskriminante in bezug auf K_0 enthält nur Primidealteiler von l. Die Primidealteiler von $\varrho_1, \ldots \varrho_e$, die man hier außer acht läßt, kann man daher durch eine abgeänderte Auswahl der ϱ_i ebenfalls auf ihr primäres Verhalten prüfen.

[4]) Diese verschärfte Vorschrift für $\mathfrak{p}$ verdanke ich Herrn Ph. Furtwängler.

Man konstruiere nun zuerst über K_1 einen zyklischen Körper K_2' vom Grade l^k, wie im vorigen Kapitel angegeben, als Restkörper zu einem primären Primidealführer $\mathfrak{P} \pmod{l^k}$ in K_1; $\mathfrak{P}$ sei außerdem so gewählt, daß es von allen seinen Konjugierten in bezug auf K_0 verschieden ist, vor allem also den Relativgrad 1 besitzt. Als Klassengruppe für K_2' erhält man wieder eine Gruppe $\frac{\overline{\mathfrak{J}}}{\overline{\mathfrak{C}}}$, deren Klassen durch die Potenzen $\mathsf{A}, \mathsf{A}^2, \ldots, \mathsf{A}^{l^k} \sim 1$ eines l-ten Nichtrestes $\mathsf{A} \pmod{\mathfrak{P}}$ repräsentiert werden können. Man wähle A außerdem als l^k-ten Potenzrest nach den übrigen Konjugierten $\mathfrak{P}^S$ zu $\mathfrak{P}$. Durch Anwendung der Substitutionen $S < \mathfrak{S}$ gelangt man zu folgender Charakterisierung der konjugierten Körper $K_2'^S$: $K_2'^S$ ist Klassenkörper zur Klassengruppe $\left(\frac{\overline{\mathfrak{J}}}{\overline{\mathfrak{C}}}\right)^S = \frac{\overline{\mathfrak{J}}^S}{\overline{\mathfrak{C}}^S}$ über K_1; sein Führer ist $\mathfrak{P}^S$. Die Klassen von $\frac{\overline{\mathfrak{J}}^S}{\overline{\mathfrak{C}}^S}$ können durch die Zahlen $\mathsf{A}^S, (\mathsf{A}^S)^2, \ldots, (\mathsf{A}^S)^{l^k} \sim 1$ repräsentiert werden. Da die Führer $\mathfrak{P}^S$ der Körper $K_2'^S$ paarweise teilerfremd sind, ist jeder Körper $K_2'^S$ zum Produkt der übrigen $K_2'^{S'}$ teilerfremd über K_1, und daher sind die Körper $K_2'^S$ voneinander unabhängig über K_1.

Das Produkt K_2 der Körper $K_2'^S$ ist dann Klassenkörper über K_1 zu einer Klassengruppe, die das absolute Produkt der Klassengruppen $\frac{\overline{\mathfrak{J}}^S}{\overline{\mathfrak{C}}^S}$ ist. Die Hauptklasse oder zu K_2 gehörige Idealgruppe H in K_1 besteht aus den Idealen, die in allen $\overline{\mathfrak{C}}^S$ $(S < \mathfrak{S})$ liegen; sie ist gegenüber den S invariant und enthält alle und nur solche Zahlideale, die l^k-te Potenzreste nach jedem $\mathfrak{P}^S$, also nach $\mathfrak{p} = N_{K_0}(\mathfrak{P})$ sind. Da sich demnach die Zahlideale allein schon auf alle $l^{k\overline{m}}$ Klassen nach H verteilen, ist K_2 ein Restkörper über K_1; sein Führer ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus K_0, das in K_1 vollständig in $(\mathrm{mod}\, l^k)$ primäre Primideale zerfällt. Man sage hierfür: $\mathfrak{p}$ *zerfalle* in K_1 *primär* $(\mathrm{mod}\, l^k)$. Nach der Wahl von A (s. o.) bilden dann die Potenzen $\mathsf{A}^{F(S)}$ ein Repräsentantensystem für die Klassen der Klassengruppe für K_2, wenn $F(S)$ ein vollständiges Restsystem nach dem Dispositionsmodul $\left(l^k, S_1^{l^{h_1}} - 1, \ldots, S_{\overline{m}}^{l^{h_{\overline{m}}}} - 1\right)$ durchläuft.

Man ist jetzt schon so weit gelangt: Es hat nicht nur K_1 über K_0, sondern auch K_2 über K_1, als Produkt von $\overline{m}$ zyklischen Körpern l^k-ten Grades, die geforderte Galoissche Konstitution; außerdem ist K_2 Galoissch über K_0, da die zu K_2 gehörige Idealgruppe H in K_1 gegenüber den S invariant ist. Es bleibt demnach nur noch zu zeigen, daß die Galoissche Gruppe von $\frac{K_2}{K_0}$ eine Dispositionsgruppe ist; dann ist sie eine solche vom vorgeschriebenen Typ. Es ist also in der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{A}$ von $\frac{K_2}{K_1}$

ein Element A zu ermitteln, das mit seinen innerhalb der Gruppe von $\frac{K_2}{K_0}$ Konjugierten die Gruppe $\mathfrak{A}$ erzeugt; da es höchstens $\overline{m}$ verschiedene Konjugierte sind, bilden diese dann eine Basis für die Gruppe.

Dies kann nun einmal lediglich mit Hilfe der Galoisschen Theorie geschehen: Der Körper K_2'', der das Produkt aller $K_2'^S$ außer K_2' ist, gehört als Unterkörper von K_2 zu einer zyklischen Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die durch das Element A erzeugt werden möge. Allgemein gehört dann der Körper $K_2''^S$, der das Produkt aller $K_2'^{S'}$ $(S' < \mathfrak{S})$ außer $K_2'^S$ ist, zur Untergruppe $\{A^S\}$ von $\mathfrak{A}$. Zu der aus allen A^S erzeugten Gruppe gehört dann der größte gemeinsame Teiler der Körper $K_2''^S$, das ist aber K_1 selbst; also erzeugen die A^S die ganze Gruppe $\mathfrak{A}$.

Einen andern Beweis, der zugleich den engen Zusammenhang zwischen Idealgruppe und Galoisscher Gruppe erkennen läßt, erhält man mit Hilfe des Allgemeinen Reziprozitätsgesetzes: Ist A die oben festgelegte Zahl aus K_1, deren symbolische Potenzen ein Repräsentantensystem für die Klassengruppe von $\frac{K_2}{K_1}$ bildeten, und gehört A zur Substitution A der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{A}$ von $\frac{K_2}{K_1}$, gilt also $\omega^{N(\mathfrak{A})} \equiv \omega^A(\mathfrak{A})$ für jedes Primideal $\mathfrak{A} \sim \mathrm{A}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{H})$ aus K_1 und alle ganzen Zahlen ω aus K_2, so erhält man bei Anwendung einer beliebigen Substitution $S < \mathfrak{S}$:

$$(\omega^S)^{N(\mathfrak{A})} \equiv \omega^{AS}(\mathfrak{A}^S),$$

und wenn man ω durch $\omega^{S^{-1}}$ ersetzt:

$$\omega^{N(\mathfrak{A})} \equiv \omega^{S^{-1}AS}(\mathfrak{A}^S),$$

d. h. $\mathfrak{A}^S$, und damit auch A^S, gehört zur Substitution A^S.

Das bedeutet aber, daß die definierte Zuordnung der Elemente der Klassengruppe und der Galoisschen Gruppe von $\frac{K_2}{K_1}$ nicht nur in bezug auf die Multiplikation, sondern auch in bezug auf die Transformation mit den $S < \mathfrak{S}$ (und dann überhaupt in bezug auf die symbolische Potenzierung) einen Isomorphismus ergibt. Das Element $A < \mathfrak{A}$ erzeugt demnach symbolisch die ganze Gruppe $\mathfrak{A}$.

Aus der gewonnenen Zuordnung $\mathrm{A}^{F(S)} \to A^{F(S)}$ ergibt sich zugleich, daß zur Dispositionsfaktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}$; $\mathfrak{H} = \sum_{H < \mathfrak{H}} A^{H(S)}$ derjenige Unterkörper von K_2 gehört, dessen Idealgruppe aus der Idealgruppe von K_2 durch Adjunktion aller $\mathrm{A}^{H(S)}$ entsteht, so daß die $\mathrm{A}^{F(S)}$ ein Repräsentantensystem der Klassengruppe bilden, wenn $F(S)$ ein vollständiges Restsystem $(\mathrm{mod}\,\overline{\mathfrak{H}})$ durchläuft. Im entsprechenden Sinne erhält man auf die Weise überhaupt

für alle auf die Dispositionsgruppe zurückführbaren Gruppen, wenn ein Reduktionsweg bekannt ist, eine Methode, eine Klassengruppe für einen passenden Körper im Zwischenkörper K_1 aufzustellen.

V. Beispiele für die Konstruktion von Körpern, die sich auf Dispositionskörper zurückführen lassen.

Wir wollen jetzt die Körperkonstruktion für die Gruppen besprechen, deren Ordnung ein Primzahlpotenzprodukt der Gestalt $l_1 l_2$, $l_1^2 l_2$, $l_1 l_2 l_3$, l^3, l^4 ist. Dies sind die von Herrn O. Hölder in den Math. Annalen **43**, S. 301—412 behandelten Gruppen; sie lassen sich alle noch auf Dispositionsgruppen zurückführen. Bei ihrer Behandlung können wir gleich von ihrer Zweistufigkeit ausgehen. Denn daß die Gruppen von Primzahlpotenzordnung sogar bis zur fünften Potenz höchstens zweistufig sind, ist durch Burnside[5]) bekannt. Daß die andern hier zur Diskussion stehenden Gruppen höchstens zweistufig sind, liest man unmittelbar aus der Gesamtaufstellung am Schluß der Hölderschen Abhandlung ab.

1. $\mathrm{Ord}(\mathfrak{G}) = l_1 l_2$. Als einziger nicht-Abelscher Fall kommt in Betracht, daß die eine Primzahl l_1 die Ordnung des Kommutatorfaktors $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$, die andere l_2 die Ordnung der Kommutatorgruppe ist; es muß dann $l_2 \equiv 1\,(l_1)$ gelten. Es wird $\mathfrak{G} = \{S; A\}$, wo $\mathfrak{A} = \{A\}$; $\mathrm{Ord}(S_1) = l_1$; $\mathrm{Ord}(A) = l_2$; $A^S = A^a$; $a^{l_1} \equiv 1$, $a \not\equiv 1\,(l_2)$. Die symbolische Ordnung von A ist demnach $(l_2, S - a)$, ein Teiler von $(l_2, S^{l_1} - 1)$. Einen Körper zur Gruppe $\mathfrak{G}$ erhält man, indem man zuerst über dem Grundkörper K_0 einen zyklischen Körper K_1 vom Grade l_1 als Klassenkörper zu einem $(\mathrm{mod}\, l_1)$ primären Primidealführer $\mathfrak{p}_1$ aus K_0 konstruiert und dann in K_1 als Führer ein Primideal $\mathfrak{p}_2$ aus K_0 wählt, das in K_1 primär $(\mathrm{mod}\, l_2)$ zerfällt. Zu diesem Führer würde man nach dem vorigen Kapitel einen Dispositionskörper $\bar{K}_2$ vom Typ $(l_1; l_2)$ über K_0, als Restkörper nach einer Idealgruppe $\bar{\mathrm{H}}$ in K_1 erhalten, deren Zahlideale aus den l_2-ten Potenzresten $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_2)$ bestehen, während die Potenzen $\mathrm{A}^{F(S)}$ (F reduziert mod $(l_2, S^{l_1} - 1)$) einer geeigneten Zahl A aus K_1 die Klassen nach $\bar{\mathrm{H}}$ repräsentieren. Da in der vorgelegten Gruppe $\mathfrak{G}$ nun $A^{S-a} = E$ und auch nur dann $A^{F(S)} = E$ ist, wenn $F(S) \equiv 0\,(l_2, S - a)$ oder $F(a) \equiv 0\,(l_2)$, so erhält man zu $\mathfrak{G}$ einen Körper $K_2 < \bar{K}_2$, der über K_1 Klassenkörper nach einer Idealgruppe H ist, die durch Adjunktion von A^{S-a} (und allen $\mathrm{A}^{F(S)}$, für die $F(a) \not\equiv 0\,(l_2)$) zu H entsteht, deren Zahlen also die Gestalt $\Gamma \equiv \Gamma_1^{l_1} \Gamma_2^{S-a}\,(\mathfrak{p}_2)$ besitzen oder, wie man sagen kann, $(l_2, S - a)$-te Potenzreste $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_2)$ sind.

---

[5]) Proc. of the London Math. Soc. [2] **13** (1914), S. 8.

(Eine einfache Überlegung führt dazu, daß es genügt hätte, den Führer $\mathfrak{p}_2$ so zu wählen, daß jede Zahl, die in K_1 eine l_2-te oder $(S-a)$-te Idealpotenz ist, $(l_2, S-a)$-ter Potenzrest $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}_2)$ ist (und $N(\mathfrak{p}_2) \equiv 1\,(l_2)$ gilt). Von einem solchen Primideal sage man dann, es zerfalle primär $\mathrm{mod}\,(l, S-a)$ in K_1.)

2. $\mathrm{Ord}\,(\mathfrak{G}) = l_1^2 l_2$. Ist $\mathfrak{G}$ nicht Abelsch, so ist die Ordnung der Kommutatorgruppe $\mathfrak{A}$ entweder l_2 oder l_1^2 oder l_1; $l_1 l_2$ kommt nicht in Frage, da der Kommutatorfaktor die Primzahlordnung l_1 hätte, die er nur haben kann, wenn die Ordnung der Kommutatorgruppe zu l_1 prim ist.

a) $\mathrm{Ord}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right) = l_1^2$; $\mathrm{Ord}\,(\mathfrak{A}) = l_2$. Es muß jedenfalls $l_2 \equiv 1\,(l_1)$ sein, damit eine Transformation in $\mathfrak{A}$ überhaupt stattfinden kann. Entweder ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ zyklisch: $\mathfrak{G} = \{S; A\}$; $\mathrm{Ord}\,(S) = l_1^2$; $\mathrm{Ord}\,(A) = l_2$; $A^S = A^a$, wo a zum Exponenten l_1 oder l_1^2 $(\mathrm{mod}\,l_2)$ gehört. Der Exponent l_1^2 kommt nur in Betracht, wenn $l_2 \equiv 1\,(l_1^2)$. Die Körperkonstruktion verläuft hier für beide Gruppentypen so, daß man über dem Grundkörper K_0 einen zyklischen Restkörper K_1 vom Grade l_1^2 zu einem $(\mathrm{mod}\,l_1^2)$ primären Primidealführer $\mathfrak{p}_1$ konstruiert und dann einen Körper K_2 vom Grade l_2 aufsetzt, der über K_1 Restkörper nach einer Idealgruppe ist, deren Zahlideale die $(l_2, S-a)$-ten Potenzreste nach einem Modul $\mathfrak{p}_2$ sind, der in K_1 primär $(\mathrm{mod}\,l_2)$ oder nur $\mathrm{mod}\,(l_2, S-a)$ zerfällt.

Ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ nichtzyklisch von der Ordnung l_1^2, so ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung l_1 und einer nicht-Abelschen Gruppe der Ordnung $l_1 l_2$ (bei Hölder (S. 411) Typ III: $[q, p]\,[q]$).

b) $\mathrm{Ord}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right) = l_1$; $\mathrm{Ord}\,(\mathfrak{A}) = l_2^2$ (l_1 und l_2 vertauscht). Ein Fall ist der, daß $\mathfrak{A}$ zyklisch ist (bei Hölder Typ I 1: $[p, q^2]$). Die Körperkonstruktion verläuft wie bei den Gruppen der Ordnung $l_1 l_2$, nur daß man es hier beim Aufsetzen des zweiten Körpers mit l_2^2-ten Potenzresten zu tun hat.

Für nichtzyklisches $\mathfrak{A}$ existieren nur noch die Gruppentypen I 3 und II nach Hölder. Die Gruppe II, wo also $l_1 \mid l_2 + 1$, kann man auf die Gestalt $\mathfrak{G} = \{S; \{A\}_{\mathfrak{C}}\}$ bringen, wo A als symbolische Ordnung einen Modul $(l_2, F(S))$ hat und $F(S)$ ein (irreduzibler) quadratischer Teiler von $\frac{S^{l_1}-1}{S-1}$ $(\mathrm{mod}\,l_2)$ ist; welcher Teiler, das hängt nur von der Fixierung von S ab. Der Körper K_2 wird hier als Klassenkörper über K_1 nach einer Idealgruppe konstruiert, deren Zahlideale aus den $(l_2, F(S))$-ten Potenzresten eines in K_1 primär zerfallenden Primideals aus K_0 bestehen. — Was die Gruppentypen I 3 $(l_1 \mid l_2 - 1)$ betrifft, so kann man sie auch noch auf

die Gestalt $\mathfrak{G} = \{S; \{A\}_{\mathfrak{S}}\}$ bringen, wo $\mathrm{Ord}(A) = (l_2, (S-\varrho)(S-\varrho^\mu))$ ist und ϱ und μ dieselbe Bedeutung haben wie bei Hölder, wenn nur $\mu \not\equiv 1 (l_2)$. Diese Gruppen erhalten die von Hölder angegebene Gestalt, wenn man setzt: $A^{S-\varrho^\mu} = T_1$; $A^{S-\varrho} = T_2$. Für diese Gestalt $\{S; T_1, T_2\}$ würde K_2 als Produkt zweier Klassenkörper über K_1 erscheinen, während die andere Gestalt $\{S; \{A\}_{\mathfrak{S}}\}$ die Möglichkeit gibt, K_2 in einem Schritt über K_1 als Klassenkörper nach einem Primidealführer aus K_0 zu konstruieren, dessen $(l_2, (S-\varrho)(S-\varrho^\mu))$-te Potenzreste die Zahlen der zugehörigen Idealgruppe bilden. Im Falle $\mu \equiv 1 (l_2)$ dagegen muß man sich auf die Konstruktion von $\frac{K_2}{K_1}$ in zwei Schritten verlassen; denn es läßt sich hier die Kommutatorgruppe $\mathfrak{A}$ nicht durch ein Element A symbolisch erzeugen, da jedes Element aus $\mathfrak{A}$ durch S in seine ϱ-te Potenz übergeht. $\mathfrak{G}$ ist hier über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ das relative Quadrat des nicht-Abelschen Typus der Ordnung $l_1 l_2$.

c) $\mathrm{Ord}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right) = l_1 l_2$; $\mathrm{Ord}(\mathfrak{A}) = l_1$: Es bleibt nur der zerfallende Typ I 2: $[p, q][q]$ bei Hölder.

3. $\mathrm{Ord}(\mathfrak{G}) = l_1 l_2 l_3$. Es existieren hier nur folgende nicht direkt zerfallende Typen:

a) $\mathrm{Ord}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right) = l_1 l_2$; $\mathrm{Ord}(\mathfrak{A}) = l_3$; $l_1 l_2 \mid l_3 - 1$; $\mathfrak{G} = \{S_1, S_2; A\}$; $A^{S_1, S_2} = A^a$, wo a zum Exponenten $l_1 l_2 \pmod{l_3}$ gehört. Die Konstruktion liefert kein anderes Bild als 1.

b) $\mathrm{Ord}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right) = l_1$; $\mathrm{Ord}(\mathfrak{A}) = l_2 l_3$; $l_1 \mid l_2 - 1$, $l_3 - 1$. $\mathfrak{G}$ ist hier über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ relatives Produkt der nicht-Abelschen Gruppentypen $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$: $\mathrm{Ord}(\mathfrak{G}_2) = l_1 l_2$; $\mathrm{Ord}(\mathfrak{G}_3) = l_1 l_3$. Hieraus gehen aber nach Hölder $l_1 - 1$ verschiedene Gruppentypen hervor, dementsprechend, daß $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ selbst $l_1 - 1$ Automorphismen zuläßt, ein deutliches Beispiel dafür, daß sich die Eindeutigkeit der relativen Produktbildung auf eine feste Zuordnung der Elemente der korrespondierenden Faktorgruppen bezieht. Zu den hier aufgestellten Gruppen $\mathfrak{G}$ konstruiert man Körper K_2 als Produkte zweier unter 1. behandelten Körper über K_1, wobei für den einen Körper $(l_2, S - a_2^{h_2})$-te, für den andern $(l_3, S - a_3^{h_3})$-te Potenzreste nach entsprechenden Führern maßgebend sind (a_2 und a_3 gehören zum Exponenten $l_1 \pmod{l_2}$ bzw. $\pmod{l_3}$; h_2 und h_3 sind zu l_1 prim zu wählen und bestimmen den Typus von $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ im Sinne von S. 340). Hier muß dann darauf geachtet werden, daß S wirklich beide Male derselben Substitution der Gruppe von $\frac{K_1}{K_0}$ entspricht; dann ist der Quotient $\frac{h_3}{h_2} \pmod{l_1}$

ausschlaggebend für die Gruppenstruktur des Körpers K_2. Der Körper K_2 kann für diese Gruppen $\mathfrak{G}$ (im Gegensatz zu dem unter 2b) behandelten relativen Quadrat) aber auch als Restkörper über K_1 nach einem Primidealführer $\mathfrak{p}$ aus K_0 konstruiert werden, wenn dieser in K_1 primär $(\mathrm{mod}\, l_2)$ und $(\mathrm{mod}\, l_3)$ zerfällt, d. h. im Körper $K_1^{(l_2)} \cdot K_1^{(l_3)}$ (nach der Bezeichnung von Kap. III) vollständig zerfällt, was erfüllbar ist. Die Zahlen der Idealgruppe von K_2 werden $(l_2 l_3, S-a)$-te Potenzreste $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$ sein, wo a eine der $(l_1-1)^2$ Wurzeln der Kongruenz $\frac{x^{l_1}-1}{x-1} \equiv 0\,(l_2 l_3)$ ist. Zwei Wurzeln a führen dann auf denselben Gruppentyp, wenn sie gegenseitige Potenzen $(\mathrm{mod}\, l_2 l_3)$ sind.

Beispiel. $l_1 = 3$; $l_2, l_3 = 7$, $13 : a \equiv 9^{\pm 1}\,(91)$ führt auf den einen, $a \equiv 16^{\pm 1}\,(91)$ auf den andern Gruppentyp.

Im Anschluß hieran sei gleich auf die Konstruktionsmöglichkeit von Körpern mit beliebig gegebener Gruppe von quadratfreier Ordnung r hingewiesen: Nach Frobenius[6]) sind diese Gruppen stets auflösbar, und sie haben nach Hölder[7]) eine Gestalt $\mathfrak{G} = \{S; T\}$, wo $\mathrm{Ord}\,(S) = m$; $\mathrm{Ord}\,(T) = n$; $mn = r$; $T^S = T^a$; $a^m \equiv 1\,(n)$, sind also zweistufig und wegen $(m, n) = 1$ sicher auf Dispositionsgruppen zurückführbar. Die einfachste Körperkonstruktion ist wieder die, einen zyklischen Körper n-ten Grades auf einen solchen m-ten Grades aufzusetzen in der Weise der letztausgeführten Konstruktion. Die Relativdiskriminante des Körpers erhält hierbei die Gestalt $\mathfrak{p}^{(m-1)n} \cdot \mathfrak{q}^{(n-1)m}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ passend gewählte Primideale des Grundkörpers sind.

Von den Gruppen von Primzahlpotenzordnung will ich nur noch erwähnen, daß sich alle Gruppen einer Ordnung l^3 und l^4 auf Dispositionsgruppen zurückführen lassen, wie ich nachgeprüft habe, während es unter den immer noch zweistufigen Gruppen der Ordnung l^5 für jedes $l > 2$ Gruppen gibt, die sich nicht auf Dispositionsgruppen zurückführen lassen.

Zum Schluß möchte ich noch Herrn Professor I. Schur und Herrn Professor Ph. Furtwängler für ihre freundlichen Ratschläge zur Abfassung dieser Arbeit meinen besonderen Dank aussprechen.

---

[6]) Sitzungsber. d. Berliner Akademie 1893, S. 337–345.

[7]) Göttinger Nachr. 1895, S. 215.

(Eingegangen am 16. Mai 1928.)

Über die monotonen Polynome, welche die minimale Abweichung von Null haben.

Von

W. Břečka und J. Geronimus in Kharkow (Ukraine).

§ 1.

Wir wollen das folgende Problem behandeln:

Man soll in dem Intervall $-1, +1$ *die minimale Abweichung von Null des Polynoms*

$$y_n(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$$

finden, welches in diesem Intervall monoton wachsend ist und dessen zweite Ableitung in diesem Intervall den Wert 1 *erreicht*[1]).

Das gesuchte Polynom läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$y_n(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(x)\, dx,$$

wo $\varphi(x) \geqq 0$ ist für $-1 \leqq x \leqq 1$. Es sei $\varphi'(\eta) = 1$.

Wir wollen zeigen, daß

$$\varphi(x) = u^2(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

ist, wo $\alpha = 0$, $\beta = 0$ *oder* $\alpha = 1$, $\beta = 1$, *wenn* n *ungerade ist, und* $\alpha = 0$, $\beta = 1$ *oder* $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *für gerades* n.

Es sei

$$\varphi(x) = u^2(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta q(x)$$

wo $q(x)$ keine Wurzeln in dem Intervall $-1, +1$ hat. Man setze

$$\bar{\varphi}(x) = u^2(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

---

[1]) Das analoge Problem für die erste Ableitung wurde von Herrn Serge Bernstein gelöst: Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, p. 47. Paris, Gauthier-Villars 1926. (Collection Borel.)

und

$$\bar{y}(x) = \int_{-1}^{x} \bar{\varphi}(x)\,dx = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx.$$

Man betrachte dann das Polynom

$$R(x) = \frac{y_n(x) - \lambda\bar{y}(x)}{y_n''(\eta) - \lambda\bar{y}''(\eta)}\,y_n''(\eta),$$

wo $0 < \lambda < q(x)$, wenn $-1 \leqq x \leqq 1$ und $y_n''(\eta) > \lambda\bar{y}''(\eta)$ für $\bar{y}''(\eta) > 0$. Wir sehen dann, daß $R(x)$ alle Bedingungen unseres Problems erfüllt. Wir haben aber

$$\frac{y_n(1)}{y_n''(\eta)} \leqq \frac{z(1)}{z''(\eta)}$$

für alle Polynome $z(x)$ höchstens n-ten Grades. Hieraus folgt $R(1) \leqq y_n(1)$, womit die Behauptung bewiesen ist[2]).

§ 2.

Es soll nun das Integral

$$L = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta u^2(x)\,dx$$

unter der Nebenbedingung

$$u(\eta)(1-\eta)^{\alpha-1}(1+\eta)^{\beta-1}$$
$$\times\{2u'(\eta)(1-\eta^2) - \alpha u(\eta)(1+\eta) + \beta u(\eta)(1-\eta)\} = 1$$

zum Minimum gemacht werden. Man setze

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x),$$

wo $P_k(x) = P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ das Jacobische Polynom

$$P_k(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\{(1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{k+\beta}\}$$

bedeutet. Dann ist

$$L = \sum_{k=0}^{m} a_k^2 h_k,$$

wo

$$h_k = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta[P_k^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\,dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(k+\alpha)!\,(k+\beta)!}{(2k+\alpha+\beta+1)\,k!\,(k+\alpha+\beta)!}\cdot$$ [3])

---

[2]) Ein ähnlicher Beweis gilt für $\bar{y}''(\eta) < 0$.

[3]) Pólya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2, S. 92

Also soll

$$L = \sum_{k=0}^{m} a_k^2 h_k$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(\eta) \sum_{k=0}^{m} a_k [2P_k'(\eta)(1-\eta^2) - \alpha P_k(\eta)(1+\eta) + \beta P_k(\eta)(1-\eta)] = (1-\eta)^{1-\alpha}(1+\eta)^{1-\beta}$$

oder kürzer

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(\eta) \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{k+1}(\eta) = (1-\eta)^{1-\alpha}(1+\eta)^{1-\beta}$$

zum Minimum gemacht werden, wo

$$(2) \qquad Q_{k+1}(\eta) = 2P_k'(\eta)(1-\eta^2) - \alpha(1+\eta)P_k(\eta) + \beta(1-\eta)P_k(\eta).$$

So erhalten wir die Gleichungen

$$2a_k h_k = \lambda [P_k(\eta) \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{k+1}(\eta) + Q_{k+1}(\eta) \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(\eta)] = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

und hieraus

$$L = \lambda (1-\eta)^{1-\alpha}(1+\eta)^{1-\beta}.$$

Setzt man weiter

$$A_0 = \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k^2(\eta)}{h_k}, \qquad A_1 = \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(\eta) Q_{k+1}(\eta)}{h_k}, \qquad A_2 = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q_{k+1}^2(\eta)}{h_k},$$

so folgt

$$2 \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(\eta) = \lambda A_0 \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{k+1}(\eta) + \lambda A_1 \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(\eta),$$

$$2 \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{k+1}(\eta) = \lambda A_1 \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{k+1}(\eta) + \lambda A_2 \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(\eta);$$

λ ist die kleinere positive Wurzel der Gleichung,

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda A_1 & -\lambda A_0 \\ -\lambda A_2 & 2 - \lambda A_1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$\lambda = \frac{2}{A_1 + \sqrt{A_0 A_2}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$(3) \qquad L = \frac{2(1-\eta)^{1-\alpha}(1+\eta)^{1-\beta}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(\eta) Q_{k+1}(\eta)}{h_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k^2(\eta)}{h_k} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{Q_{k+1}^2(\eta)}{h_k}}},$$

wo $Q_{k+1}(\eta)$ den Wert (2) hat und $P_k(x) = P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ ist.

§ 3.

Es sei nun n ungerade. Dann ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, oder $\alpha = 1$, $\beta = 1$. *Man setze zuerst* $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $n = 2m+1$. Dann wird

$$Q_{k+1}(\eta) = 2P_k'(\eta)(1-\eta^2),$$

wo $P_k(x) = P_k^{\gamma}(x)$ das Legendresche Polynom bedeutet. Wir haben

$$L = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(\eta)P_k'(\eta)}{h_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k^2(\eta)}{h_k} \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k'^2(\eta)}{h_k}}}.$$

Es ist bekannt, daß für Legendresche Polynome (für $|\eta| < 1$)

$$|P_k(\pm 1)| > |P_k(\eta)|, \quad |P_k'(\pm 1)| > |P_k'(\eta)|$$

gilt. So ist es klar, daß L minimum minimorum für $\eta = 1$ ist, weil $P_k(-1)P_k'(-1) < 0$ ist.

Die für Legendresche Polynome gültigen Formeln

$$\sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k^{(i)}(x)P_k^{(l)}(x) = \frac{(m+i+1)(m+l+1)P_m^{(i)}(x)P_m^{(l)}(x) + (1-x^2)P_m^{(i+1)}(x)P_m^{(l+1)}(x)}{i+l+1}$$ [4])

benutzend, finden wir

$$L = \frac{8(\sqrt{12}-3)}{m(m+1)^2(m+2)} = \frac{2^7(\sqrt{12}-3)}{(n-1)(n+1)^2(n+3)}. \tag{4}$$

Man setze nun $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $n = 2m_1 + 3$. Dann ist

$$Q_{k+1}(\eta) = 2P_k^{(1,1)'}(\eta)(1-\eta^2) - 2\eta P_k^{(1,1)}(\eta)$$

und

$$L_1 = \frac{2}{\sum_{k=0}^{m_1} \frac{P_k^{(1,1)}(\eta)Q_{k+1}(\eta)}{h_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{m_1} \frac{[P_k^{(1,1)}(\eta)]^2}{h_k} \sum_{k=0}^{m_1} \frac{[Q_{k+1}(\eta)]^2}{h_k}}}. \tag{5}$$

Die Polynome $P_k^{(1,1)}(x)$ kann man durch die Legendresche ausdrücken[5]):

$$P_{k-1}^{(1,1)}(x) = \frac{2}{k+1}P_k'(x).$$

Wir erhalten daraus

$$Q_k(\eta) = \frac{4}{k+1}[P_k''(\eta)(1-\eta^2) - \eta P_k'(\eta)].$$

---

[4]) J. Geronimus, „Über die minimale mittlere quadratische Abweichung des Polynoms von Null im gegebenen Intervall" (russisch), Communications de la Société Mathématique de Kharkow, série 4, 2 (1928), p. 17.

[5]) Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées (2) **5**, p. 195.

Man setze $\eta = \cos\varphi$. Dann folgt

$$\frac{k+1}{4} Q_k(\eta) = \frac{d}{d\eta}[P_k'(\eta)(1-\eta^2)] + \eta P_k'(\eta)$$
$$= \frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dP_k}{d\varphi}\sin\varphi\right) - \operatorname{ctg}\varphi\frac{dP_k}{d\varphi} = \frac{d^2P_k}{d\varphi^2}.$$

Das Legendresche Polynom läßt sich, wie bekannt, folgendermaßen darstellen:

$$P_k(\cos\varphi) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_s \cos(k-2s)\varphi,$$

wo alle c_s positiv sind. Mithin ist

$$\frac{d^2P_k}{d\varphi^2} = -\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_s (k-2s)^2 \cos(k-2s)\varphi.$$

Wir sehen, daß $|P_k''(\cos\varphi)|$ seinen maximalen Wert für $\varphi = 0$ $(\eta = 1)$ und $\varphi = \pi$ $(\eta = -1)$ erreicht. Also erreichen

$$\sum_{k=0}^{m_1} \frac{[P_k^{(1,1)}(\eta)]^2}{h_k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{m_1} \frac{[Q_{k+1}(\eta)]^2}{h_k}$$

ihren maximalen Wert für $\eta = \pm 1$. Aber es ist $Q_{k+1}(1)P_k^{(1,1)}(1) < 0$ und $Q_{k+1}(-1)P_k^{(1,1)}(-1) > 0$.

Hieraus folgt, daß der Nenner von (5) seinen maximalen Wert für $\eta = -1$ erreicht. Wir haben

$$L_1(-1) = \frac{8}{m_1(m_1+1)^2(m_1+2)} = \frac{2^7}{(n-3)(n-1)^2(n+1)}.$$

Wir sehen, daß $L_1(-1) > L(1)$. *Folglich hat die minimale Abweichung für ungerades n den Wert*

$$L = \frac{2^7(\sqrt{12}-3)}{(n-1)(n+1)^2(n+3)}.$$

Für große Werte von n haben wir

$$L \sim \frac{2^7(\sqrt{12}-3)}{n^4}. \tag{6}$$

Wenn n gerade ist, findet man in der ähnlichen Weise (für $\alpha = 0$, $\beta = 1$), daß L minimum minimorum für $\eta = 1$ ist, wobei

$$L(1) = \frac{24}{(m+1)(m+2)[3(m^2+3m+1)+\sqrt{3(2m^2+6m+1)(2m^2+6m+3)}]}. \tag{7}$$

Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ findet man, daß L minimum minimorum für $\eta = -1$ ist, aber diese Abweichung ist größer als (7). *Für $n = 2m+2$ gibt daher die Formel* (7) *die minimale Abweichung.* Die asymptotische Formel für $n = 2m+2$ ist wieder (6).

§ 4.

Wir werden jetzt unser Problem für den Fall, wenn die zweite Ableitung an der Stelle $|\eta| < 1$ den Wert 1 annimmt, lösen. Um die asymptotische Form von (3) zu finden, wollen wir die Summen

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k^2(\eta)}{h_k}, \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(\eta)\,P_k'(\eta)}{h_k}, \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k'^2(\eta)}{h_k}$$

berechnen. Wir haben für die Jacobischen Polynome

$$(8) \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(x)\,P_k(y)}{h_k} = c_m \frac{P_{m+1}(x)\,P_m(y) - P_m(x)\,P_{m+1}(y)}{x-y} \quad [6]),$$

wo

$$c_m = \frac{(m+1)!\,(m+\alpha+\beta+1)!}{(2m+\alpha+\beta+2)\,(m+\alpha)!\,(m+\beta)!\,2^{\alpha+\beta}}$$

ist. Hieraus folgt:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k^2(x)}{h_k} = c_m [P_m(x)\,P_{m+1}'(x) - P_{m+1}(x)\,P_m'(x)]$$

und

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(x)\,P_k'(x)}{h_k} = \frac{1}{2} c_m [P_m(x)\,P_{m+1}''(x) - P_{m+1}(x)\,P_m''(x)].$$

Durch Differentiation von (8) zuerst nach x und dann nach y erhalten wir (wenn wir $y = x$ setzen)

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k'^2(x)}{h_k} = \frac{c_m}{6} [P_m(x)\,P_{m+1}'''(x) + 3\,P_m'(x)\,P_{m+1}''(x) - 3\,P_m''(x)\,P_{m+1}'(x) - P_m'''(x)\,P_{m+}$$

Die Darbouxsche asymptotische Formel [7]) für die Jacobischen Polynome benutzend, finden wir für große Werte von m

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k^2(\eta)}{h_k} \sim \frac{m}{\pi(1-\eta)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}},$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k(\eta)\,P_k'(\eta)}{h_k} \sim \frac{m}{2\pi} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{(1-\eta)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}}\right],$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{P_k'^2(\eta)}{h_k} \sim \frac{m^3}{3\pi(1-\eta)^{\alpha+\frac{3}{2}}(1+\eta)^{\beta+\frac{3}{2}}}.$$

---

[6]) J. Geronimus, „Über die minimale mittlere quadratische Abweichung von Null des Polynoms (mit gegebenem Gewicht)“ (russisch), Recueil Mathématique de Moscou 35, 1, S. 57.

[7]) Journal de Mathématiques, 3 série, 4 (1878), p. 24.

So haben wir wegen (3)

$$L \sim \frac{\pi\sqrt{3}(1-\eta^2)}{m^2} \sim \frac{2^2\pi\sqrt{3}(1-\eta^2)}{n^2}$$

für $|\eta| < 1-\varepsilon$.

§ 5.

Wir wollen jetzt das folgende Problem betrachten:

Man soll in dem Intervall $-1, +1$ *die minimale Abweichung von Null des Polynoms*

$$y_n(x) = d_0 x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_n$$

finden, welches in diesem Intervall vielfach monoton von der Ordnung $h+1$ *ist und dessen zweite Ableitung in diesem Intervall den Wert* 1 *erreicht.*

Es ist bekannt, daß man ein Polynom vielfach monoton (multiplement monotone) von Ordnung $h+1$ im gegebenen Intervall nennt, wenn seine Ableitungen von $h+1$ ersten Ordnungen nicht negativ in diesem Intervall sind [8]).

Es ist klar, daß der Punkt, wo die zweite Ableitung den Wert 1 erreicht, mit 1 zusammenfällt.

Wir wollen nun, die S. Bernsteinsche Methode anwendend, beweisen, daß *das gesuchte Polynom* $y_n(x)$ *sich folgendermaßen darstellen läßt*:

$$y_n(x) = \int_{-1}^{x} (x-z)^h \varphi(z)\, dz,$$

wo $\varphi(z) \geqq 0$ *für* $-1 \leqq z \leqq 1$.

Wir haben nur zu zeigen, daß

$$y_n^{(k)}(-1) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, h).$$

Es sei $y_n^{(k)}(-1) > 0$. Man betrachte dann das Polynom

$$R(x) = \frac{y_n(x) - Q(x)}{y_n''(1) - Q''(1)}\, y_n''(1),$$

wo

$$Q(x) = \sum_{s=0}^{h} \frac{(x+1)^s y_n^{(s)}(-1)}{s!}.$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß dieses Polynom $R(x)$ alle Bedingungen unseres Problems erfüllt.

---

[8]) S. Bernstein, „Sur les polynomes multiplement monotones, qui s'écartent le moins de zéro". Comptes Rendus 185 (1927), p. 247.

Nun ist

$$\frac{y_n(1)}{y_n''(1)} \leqq \frac{z(1)}{z''(1)}$$

für alle Polynome $z(x)$ höchstens n-ten Grades. Folglich gilt

$$R(1) \leqq y_n(1),$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 6.

Wir wollen jetzt beweisen, daß

$$\varphi(z) = u^2(z)(1+z)^\beta$$

wo $\beta = 0$ *für* $n = 2m+h+1$ *und* $\beta = 1$ *für* $n = 2m+h+2$ *ist.*

Es soll das Integral

$$L = \int_{-1}^{1} (1-z)^h \varphi(z)\, dz$$

zum Minimum gemacht werden unter der Nebenbedingung

$$\int_{-1}^{1} (1-z)^{h-2} \varphi(z)\, dz = \frac{1}{h(h-1)}.$$

Es sei $\varphi(z) = s(z)q(z)$, wo alle Wurzeln von $s(z)$ im Intervall $-1 \leqq z < 1$ liegen. Man setze [9])

$$q_1(z) = q(z) + \delta^2(z-b),$$

wo

$$b = \frac{\int_{-1}^{1} (1-z)^{h-2} z\, s(z)\, dz}{\int_{-1}^{1} (1-z)^{h-2} s(z)\, dz} \qquad (|b| < 1)$$

und δ so gewählt ist, daß $q_1(z) > 0$ für $-1 \leqq z \leqq 1$.

Man betrachte das Polynom

$$\bar{y}_n(x) = \int_{-1}^{x} (x-z)^h s(z) q_1(z)\, dz.$$

Wir sehen, daß

$$\int_{-1}^{1} (1-z)^{h-2} s(z) q_1(z)\, dz = \int_{-1}^{1} (1-z)^{h-2} s(z) q(z)\, dz,$$

d. h. $\bar{y}_n''(1) = y_n''(1)$. Dieses Polynom $\bar{y}_n(x)$ ist auch vielfach monoton

[9]) S. Bernstein, „Sur les polynomes multiplement monotones". Communications de la Société Mathématique de Kharkow, série 4, 1, p. 6.

von Ordnung $h+1$. *Wir wollen beweisen, daß* $\bar{y}_n(1) < y_n(1)$ *ist.* Es sei

$$\bar{L} = \int_{-1}^{1} (1-z)^h s(z) q_1(z)\, dz, \qquad p(z) = (1-z)^{h-2} s(z).$$

Dann gilt

$$\bar{L} - L = \delta^2 \frac{\int_{-1}^{1} p(z) z (1-z)^2\, dz \int_{-1}^{1} p(z)\, dz - \int_{-1}^{1} p(z)(1-z)^2\, dz \int_{-1}^{1} p(z) z\, dz}{\int_{-1}^{1} p(z)\, dz}.$$

Der Zähler läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} p(y) p(z) [z(1-z)^2 + y(1-y)^2]\, dy\, dz$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} p(y) p(z) [y(1-z)^2 + z(1-y)^2]\, dy\, dz$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} p(y) p(z) (z-y)^2 (2-y-z)\, dy\, dz < 0.$$

Also erfüllt $\bar{y}_n(x)$ alle Bedingungen unseres Problems und außerdem gilt $\bar{y}_n(1) < y_n(1)$, was aber unmöglich ist. Folglich muß $q(z)$ eine Konstante sein und $\varphi(z)$ hat wirklich die Form

$$u^2(z)(1+z)^\beta.$$

§ 7.

Nun soll das Integral

$$L = \int_{-1}^{1} (1-z)^h (1+z)^\beta u^2(z)\, dz$$

zum Minimum gemacht werden unter der Nebenbedingung

$$\int_{-1}^{1} (1-z)^{h-2} (1+z)^\beta u^2(z)\, dz = \frac{1}{h(h-1)}.$$

Dann haben wir

$$\int_{-1}^{1} u(z)(1-z)^{h-2}(1+z)^\beta [(1-z)^2 - \lambda^2] z^k\, dz = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Hieraus folgt, daß

$$u(z) = \frac{a P_{m+1}(z) + b P_{m+2}(z)}{(1-z)^2 - \lambda^2}$$

ist, wo $P_k(z) = P_k^{(h-2,\beta)}(z)$ das Jacobische Polynom bedeutet.

Um λ zu finden, haben wir die Gleichungen

$$aP_{m+1}(1-\lambda)+bP_{m+2}(1-\lambda)=0,$$
$$aP_{m+1}(1+\lambda)+bP_{m+2}(1+\lambda)=0,$$

woraus

$$(10)\qquad f(\lambda)=P_{m+1}(1-\lambda)P_{m+2}(1+\lambda)-P_{m+1}(1+\lambda)P_{m+2}(1-\lambda)=0$$

und

$$(11)\qquad L=\frac{\lambda_0^2}{h(h-1)},$$

wo λ_0 die kleinste positive Wurzel von (10) ist.

Es sei $\mu=1-\lambda$. *Wir wollen zeigen, daß* $\mu_0=1-\lambda_0$ *zwischen den zwei größten Wurzeln des Jacobischen Polynoms* $P_{m+1}(z)$ *und gleichzeitig zwischen den zwei größten Wurzeln von* $P_{m+2}(z)$ *liegt.*

Wir haben

$$f(1-\mu)=P_{m+1}(\mu)P_{m+2}(2-\mu)-P_{m+2}(\mu)P_{m+1}(2-\mu).$$

Es ist klar, daß $P_n(2-\mu)>0$ für $0<\mu<1$ ist.

Es seien μ und $\bar{\mu}$ $(\mu<\bar{\mu})$ die zwei größten Wurzeln von $P_{m+1}(z)$ und $\mu_1<\bar{\mu}_1$ dieselben von $P_{m+2}(z)$. Dann gilt

$$f(1-\bar{\mu}_1)=\ \ P_{m+1}(\bar{\mu}_1)P_{m+2}(2-\bar{\mu}_1)>0,$$
$$f(1-\bar{\mu}\ )=-P_{m+2}(\bar{\mu}\ )P_{m+1}(2-\bar{\mu}\ )>0,$$
$$f(1-\mu_1)=\ \ P_{m+1}(\mu_1)P_{m+2}(2-\mu_1)<0,$$
$$f(1-\mu\ )=-P_{m+2}(\mu\ )P_{m+1}(2-\mu\ )<0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 8.

Es sei nun h *endlich und* m *strebe gegen* ∞.

Das Jacobische Polynom $P_{m+1}^{(h-2,\beta)}(\mu)$ läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$P_{m+1}^{(h-2,\beta)}(\mu)=\frac{(m+h-1)!}{(m+1)!\,(h-2)!}F\Big[-(m+1),\ m+h+\beta,\ h-1,\ \frac{\lambda}{2}\Big],$$

wo $F(a,b,c,x)$ die hypergeometrische Funktion ist.

Man setze $\alpha=\frac{m^2\lambda_0}{2}$. Dann ist

$$L\sim\frac{4\alpha^2}{h(h-1)m^4}\sim\frac{2^6\alpha^2}{h(h-1)n^4},$$

wo α zwischen den zwei kleinsten positiven Wurzeln der Funktion

$$1-\frac{z}{h-1}+\frac{z^2}{2!\,(h-1)h}-\frac{z^3}{3!\,(h-1)h(h+1)}+\cdots$$

liegt. *Man kann auch sagen, daß α zwischen den zwei kleinsten positiven Wurzeln der Besselschen Funktion $J_{h-2}(2\sqrt{z})$ liegt.*

Die Shafheitlinsche Ungleichung für die kleinste Wurzel der Besselschen Funktion benutzend[10]), finden wir, daß

$$2\sqrt{\alpha} > \sqrt{h(h-2)}$$

und

$$L > \frac{2^2(h-2)^2}{n^4}. \tag{13}$$

§ 9.

Wir wollen jetzt den genaueren Wert für α finden (für h endlich und $m \to \infty$ strebend).

Wir haben gefunden, daß

$$L = \frac{\lambda_0^2}{h(h-1)}$$

ist, wo λ die kleinste positive Wurzel der Gleichung (10) bedeutet. Man kann diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{P_{m+1}^{(r)}(1)(-\lambda)^r}{r!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{P_{m+2}^{(p)}(1)\lambda^p}{p!} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{P_{m+1}^{(r)}(1)\lambda^r}{r!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{P_{m+2}^{(p)}(1)(-\lambda)^p}{p!} = 0.$$

Wenn $r+p$ gerade ist, so verschwindet der Koeffizient von λ^{r+p}. Also nimmt unsere Gleichung die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$$

an, wobei

$$a_k = \sum_{s=0}^{2k+1} (-1)^s \binom{2k+1}{s} P_{m+1}^{(s)}(1) P_{m+2}^{(2k+1-s)}(1)$$

oder

$$a_k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{2k+1}{s} [P_{m+1}^{(s)}(1) P_{m+2}^{(2k+1-s)}(1) - P_{m+1}^{(2k+1-s)}(1) P_{m+2}^{(s)}(1)].$$

Wir wollen $P_n^{(i)}(1)$ berechnen. Schreiben wir das Jacobische Polynom in der Gestalt

$$P_n^{(h-2,\beta)}(x) = \frac{(n+h-2)!}{n!\,(h-2)!} F\left[-n,\ n+h+\beta-1,\ h-1,\ \frac{1-x}{2}\right]. \tag{14}$$

Durch i-malige Differentiation von (14) erhalten wir (für $x=1$)

$$P_n^{(i)}(1) = \frac{(n+h+\beta+i-2)!\,(n+h-2)!}{2^i (n-i)!\,(n+h+\beta-2)!\,(h+i-2)!}.$$

---

[10]) P. Shafheitlin, „Die Theorie der Besselschen Funktionen“ (1908) S. 117.

Mithin ist

$$a_k = \sum_{s=0}^{k} \Big[(-1)^s \binom{2k+1}{s} \frac{(m+h)!\,(m+h-1)!\,(m+h+\beta+s-1)!\,(m+2k+h+\beta-s}{2^{2k+1}(h+s-2)!\,(h+2k-s-1)!\,(m+h+\beta)!\,(m+h+\beta-1} \times \frac{(2k-2s+1)(2m+h+\beta+2)}{(m-2k+s+1)!\,(m-s+2)!} \Big].$$

Die Stirlingsche Formel anwendend, erhalten wir

$$a_k \sim \frac{m^{2h+4k-3}}{2^{2k}} \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s \binom{2k+1}{s} (2k-2s+1)}{(h+s-2)!\,(h+2k-s-1)!}.$$

Bezeichnet man $z = \frac{\lambda m^2}{2}$, so nimmt unsere Gleichung die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k} = 0$$

an, wo

$$b_k = \frac{1}{(2k+1)!} \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s \binom{2k+1}{s} (2k-2s+1)}{(h+s-2)!\,(2k+h-s-1)!}$$

ist.

Wir wollen diese Summe berechnen. Wir haben

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{2k+1}{s} \frac{2k-2s+1}{(h+s-2)!\,(2k+h-s-1)!} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{2k+1} (-1)^s \binom{2k+1}{s} \frac{2k-2s+1}{(h+s-2)!\,(2k+h-$$

$$= -(2k+1) \sum_{s=1}^{2k+1} (-1)^s \frac{\binom{2k}{s-1}}{(h+s-2)!\,(2k+h-s-1)!} = (2k+1) \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s \binom{2k}{s}}{(h+s-1)!\,(2k+h-}$$

$$= \frac{2k+1}{u!\,(u+1)!} \sum_{s=0}^{2k} (-1)^s \binom{2k}{s} \{u(u-1)\dots(u-s+1)\} \times \{(u+1)\,u(u-1)\dots[u+1-(2k-s)+1]$$

wo $u = h+2k-2$ ist. Man setze

$$A_x^n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) \qquad (A_x^0 = 1).$$

Dann müssen wir

$$\sum_{s=0}^{2k} (-1)^s \binom{2k}{s} A_u^s A_{u+1}^{2k-s}$$

berechnen. Ganz ebenso wie die Formel

$$\sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} A_y^s A_x^{2k-s} = A_{x+y}^{2k}$$ [11])

---

[11]) Pólya und Szegö 1, S. 5.

abgeleitet wird, findet man

$$\sum_{s=0}^{2k}(-1)^s\binom{2k}{s}A_u^s A_{u+1}^{2k-s}=(-1)^k 2k!\binom{u}{k}=\frac{(-1)^k 2k!\,(h+2k-2)!}{k!\,(h+k-2)!},$$

und schließlich erhalten wir

$$b_k=\frac{(-1)^k}{k!\,(h+k-2)!\,(h+2k-1)!}.$$

Also ist

$$L\sim\frac{2^6\alpha^2}{h(h-1)n^4},$$

wo α die kleinste positive Wurzel der ganzen transzendenten Funktion

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\,(h+k-2)!\,(h+2k-1)!} \tag{15}$$

ist. Zum Beispiel ist

$$\text{für } h=2: \quad 6{,}52<\alpha^2<6{,}53;$$
$$\text{für } h=3: \quad 28{,}24<\alpha^2<28{,}25.$$

§ 10.

Wir haben soeben zwei Fälle betrachtet — das monotone Polynom ($h=0$) und das vielfach monotone Polynom ($h\geqq 2$). Es bleibt jetzt nur übrig, den Fall $h=1$ zu betrachten. Statt dessen wollen wir aber das allgemeinere Problem lösen:

Man soll die minimale Abweichung von Null des Polynoms

$$y_n(x)=k_0x^n+k_1x^{n-1}+\ldots+k_n$$

in dem Intervall $-1,+1$ *finden, welches in diesem Intervall vielfach monoton von Ordnung* $h+1$ *ist und dessen* $(h+1)$*-te Ableitung in diesem Intervall den Wert* 1 *erreicht.*

Ganz ebenso wie in § 5 und § 1 kann man beweisen, daß *das gesuchte Polynom sich folgendermaßen darstellen läßt*:

$$y_n(x)=\int_{-1}^{x}(x-z)^h(1-z)^\alpha(1+z)^\beta u^2(z)\,dz;$$

hier ist $\alpha=0$, $\beta=0$ *oder* $\alpha=1$, $\beta=1$ *für gerades* $n-h-1$ *und* $\alpha=0$, $\beta=1$ *oder* $\alpha=1$, $\beta=0$ *für ungerades* $n-h-1$.

Es sei η der Punkt, wo die $(h+1)$-te Ableitung den Wert 1 erreicht. Für $\eta=1$ ist $\alpha=0$, für $\eta=-1$ aber $\beta=0$.

Es soll also das Integral

$$L=\int_{-1}^{1}(1-z)^{h+\alpha}(1+z)^\beta u^2(z)\,dz$$

unter der Nebenbedingung

$$h!\,(1-\eta)^{\alpha}(1+\eta)^{\beta}u^2(\eta)=1$$

oder kürzer

$$u(\eta)=a; \qquad a^2=\frac{1}{h!\,(1-\eta)^{\alpha}(1+\eta)^{\beta}}$$

zum Minimum gemacht werden.

Man setze

$$u(z)=\sum_{k=0}^{m}a_k P_k(z),$$

wo $P_k(z)=P_k^{(h+\alpha,\beta)}(z)$ das Jacobische Polynom k-ten Grades bedeutet. Dann ist

$$L=\sum_{k=0}^{m}a_k^2 h_k. \tag{16}$$

Also soll (16) unter der Nebenbedingung

$$\sum_{k=0}^{m}a_k P_k(\eta)=a$$

zum Minimum gemacht werden.

So folgt

$$2a_k h_k=\lambda P_k(\eta),$$

also

$$2L=\lambda a. \tag{17}$$

Weiter ist

$$2\sum_{k=0}^{m}a_k P_k(\eta)=2a=\lambda\sum_{k=0}^{m}\frac{[P_k(\eta)]^2}{h_k}. \tag{18}$$

Aus (17) und (18) finden wir

$$L=\frac{1}{h!\,(1-\eta)^{\alpha}(1+\eta)^{\beta}\sum_{k=0}^{m}\frac{[P_k^{(h+\alpha,\beta)}(\eta)]^2}{h_k}}. \tag{19}$$

§ 11.

Wir wollen diese Formel untersuchen.

Es sei $\alpha=0$. Aus

$$P_k^{(h,\beta)}(1)>\left|P_k^{(h,\beta)}(\eta)\right|, \quad |\eta|<1, \quad h\geqq\beta\geqq 0$$

sieht man, daß *für* $h\geqq\beta$ *gewiß* L *minimum minimorum für* $\eta=1$ *ist.* Der Fall $h<\beta$ ist nur dann möglich, wenn $h=0$, $\beta=1$ ist. Der Fall $h=0$ wurde aber schon von Herrn Serge Bernstein betrachtet, der be-

wiesen hat, daß in diesem Falle L minimum minimorum für $\eta = \pm 1$ ist[12]). Wir werden deshalb den Fall $h = 0$ beiseite lassen. So ist für $\alpha = 0$ und $\eta = 1$

$$L = \frac{1}{h!\, 2^{\beta} \sum_{k=0}^{m} \frac{[P_k^{(h,\beta)}(1)]^2}{h_k}}. \tag{20}$$

Es sei nun $\alpha = 1$. Man setze

$$v(z) = u(z)(1-z).$$

Dann hat man das Integral

$$L = \int_{-1}^{1} (1-z)^{h-1}(1+z)^{\beta} v^2(z)\, dz \qquad (h \geqq 1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$v(\eta) = a(1-\eta), \qquad v(1) = 0$$

zum Minimum zu machen.

Man setze

$$v(z) = \sum_{k=0}^{m+1} b_k \bar{P}_k(z),$$

wo $\bar{P}_k(z) = P_k^{(h-1,\beta)}(z)$ ist. Dann hat man

$$L = \sum_{k=0}^{m+1} b_k^2 \bar{h}_k$$

zum Minimum zu machen unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{k=0}^{m+1} b_k \bar{P}_k(\eta) = a(1-\eta), \qquad \sum_{k=0}^{m+1} b_k \bar{P}_k(1) = 0.$$

Die Bedingungen des Extremums lauten

$$2 b_k \bar{h}_k = \lambda \bar{P}_k(\eta) + \mu \bar{P}_k(1),$$

woraus

$$2L = \lambda a(1-\eta) \tag{21}$$

folgt. Weiter ist

$$\begin{cases} 2\sum_{k=0}^{m+1} b_k \bar{P}_k(\eta) = 2a(1-\eta) = \lambda A_0 + \mu A_1, \\ 2\sum_{k=0}^{m+1} b_k \bar{P}_k(1) = \quad 0 \quad = \lambda A_1 + \mu A_2, \end{cases} \tag{22}$$

[12]) S. Bernstein, „Leçons sur les propriétés extrémales", p. 48.

wo

$$A_0=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\bar{P}_k^2(\eta)}{\bar{h}_k},\quad A_1=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\bar{P}_k(\eta)\,\bar{P}_k(1)}{\bar{h}_k},\quad A_2=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\bar{P}_k^2(1)}{\bar{h}_k}.$$

Aus (21) und (22) erhalten wir

$$L=\frac{a^2(1-\eta)^2A_2}{A_0A_2-A_1^2}=\frac{(1-\eta)A_2}{h!(1+\eta)^\beta(A_0A_2-A_1^2)}.$$

[Dieser Ausdruck ist mit (19) identisch.] Hieraus folgt

$$L>\frac{(1-\eta)A_2}{h!(1+\eta)^\beta A_0A_2}$$

oder

$$L>\frac{1-\eta}{h!(1+\eta)^\beta\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\bar{P}_k^2(\eta)}{\bar{h}_k}}. \tag{23}$$

Aus (19) und (23) finden wir

$$L^2>\frac{1}{h!^2(1+\eta)^{2\beta}\sum_{k=0}^{m}\frac{P_k^2(\eta)}{h_k}\cdot\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\bar{P}_k^2(\eta)}{\bar{h}_k}}. \tag{24}$$

Für $h-1\geqq\beta$ haben wir aber

$$P_k^{(h-1,\beta)}(1)>\left|P_k^{(h-1,\beta)}(\eta)\right|\quad\text{für}\quad|\eta|<1$$

und folglich

$$L^2>\frac{1}{h!^2\,2^{2\beta}\sum_{k=0}^{m}\frac{P_k^2(1)}{h_k}\cdot\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\bar{P}_k^2(1)}{\bar{h}_k}}. \tag{25}$$

Wir werden (25) mit jener Abweichung, welche die Form

$$u^2(z)(1+z)^{\beta_1}$$

für $\eta=1$ gibt, vergleichen. Diese Form gibt

$$L_1=\frac{1}{h!\,2^{\beta_1}\sum_{k=0}^{m_1}\frac{[P_k^{(h,\beta_1)}(1)]^2}{\bar{h}_k}}. \tag{26}$$

Es sei $\beta=0$. Dann ist

$$n=2m+h+\alpha+\beta+1=2m+h+2$$

und gleichzeitig

$$n=2m_1+h+\alpha_1+\beta_1+1,\quad\text{wo}\quad\alpha_1=0.$$

Hieraus folgt $m_1=m$ und $\beta_1=1$.

Die Formel [6])

$$(27) \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{[P_k^{(p,q)}(1)]^2}{h_k} = \frac{(n+p+q+1)!\,(n+p+1)!}{2^{p+q+1}\,n!\,(1+p)!\,(n+q)!\,p!}$$

benutzend, finden wir, daß $L^2 > L_1^2$ ist.

Wenn $\beta = 1$, so ist $n = 2m + h + 3$ und $n = 2m_1 + h + \beta_1 + 1$, also $m_1 = m + 1$, $\beta_1 = 0$. Wir finden wieder, daß $L^2 > L_1^2$ ist.

Endlich wollen wir den Fall $h - 1 < \beta$ *untersuchen.*

Dann ist

$$h = 1 \quad \text{und} \quad \beta = 1.$$

Aus der Formel

$$P_k^{(0,1)}(z) = \frac{P_k^{(0,0)}(z) + P_{k+1}^{(0,0)}(z)}{1+z}$$

sehen wir, daß

$$2\,P_k^{(0,1)}(1) > (1+\eta)\,|P_k^{(0,1)}(\eta)| \quad \text{für} \quad |\eta| < 1.$$

Deshalb folgt aus (24)

$$L^2 > \frac{1}{2^2 \sum_{k=0}^{m} \frac{[P_k^{(2,1)}(1)]^2}{h_k} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} \frac{[P_k^{(0,1)}(1)]^2}{h_k}}.$$

Wir sehen wieder, daß L^2 größer ist als L_1^2 in (26) für $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $m_1 = m + 1$. *Also ist für* $h \geqq 1$ *die Zahl* L *minimum minimorum für* $\eta = 1$.

§ 12.

Wir wollen nun diese minimale Abweichung finden.

Aus (20) und (27) erhalten wir

$$L(1) = \frac{2^{h+1}(m+\beta)!\;m!\;(h+1)!}{(m+h+1)!\;(m+h+\beta+1)!}.$$

Wenn h endlich ist und m ins Unendliche wächst, so erhalten wir, die Stirlingsche Formel benutzend,

$$(28) \qquad L(1) \sim \frac{2^{h+1}(h+1)!}{m^{2h+2}} \sim \frac{2^{3h+3}(h+1)!}{n^{2h+2}}.$$

Wenn wir unser Problem für den Fall, wo die $(h+1)$-te Ableitung an einer Stelle $|\eta| < 1$ den Wert 1 annimmt, lösen, so erhalten wir

$$L(\eta) = \frac{2^{h+\alpha+\beta}(2m+h+\alpha+\beta+2)\;(m+h+\alpha)!\;(m+\beta)!}{h!\,(1-\eta)^{\alpha}(1+\eta)^{\beta}(m+1)!\;(m+h+\alpha+\beta+1)!\;\{P_m(\eta)\,P'_{m+1}(\eta) - P_{m+1}(\eta)\,P'_m(\eta)\}}.$$

Hieraus finden wir für große Werte von m

$$L(\eta) \sim \frac{\pi(1-\eta)^h\sqrt{1-\eta^2}}{m \cdot h!} \sim \frac{2\pi(1-\eta)^h\sqrt{1-\eta^2}}{n \cdot h!} \quad \text{für} \quad |\eta| < 1-\varepsilon.$$

Endlich ist für $\eta = -1$

$$L(-1) = \frac{2^{h+1}}{h!\,(m+1)\,(m+h+\alpha+1)}$$

und asymptotisch

$$L(-1) = \frac{2^{h+1}}{m^2 \cdot h!} \sim \frac{2^{h+3}}{n^2 \cdot h!}.$$

§ 13.

Wir können also sagen, daß in allen Fällen ($h = 0$, $h = 1$, $h \geqq 2$)

$$L \sim \frac{2^6}{n^4}\,\varphi(h)$$

ist, wo

$$\begin{aligned} &\varphi(0) \sim 0{,}92 \quad [\text{aus } (6)],\\ &\varphi(1) = 2 \quad\;\; [\text{aus } (28)],\\ &\varphi(2) \sim 3{,}26 \quad [\text{aus } (15)],\\ &\varphi(3) \sim 4{,}71 \quad [\text{aus } (15)], \end{aligned}$$

usw.

Wir können behaupten, daß [aus (13)] $\varphi(h) > \left(\frac{h-2}{4}\right)^2$ ist.

Nun wollen wir die erhaltenen Resultate mit Herrn S. Bernsteins analogem Problem für die erste Ableitung vergleichen.

Er hat gefunden (für h endlich und m gegen ∞ strebend):

$$L \sim \frac{2^3}{n^3} \quad \text{für} \quad h = 0,\ ^{1})$$

$$L \sim \frac{2^3 \cdot \alpha}{h\,n^2} \quad \text{für} \quad h \geqq 1,\ ^{8})$$

wo α die kleinste positive Wurzel der Besselschen Funktion $J_{h-1}(2\sqrt{z})$ ist. Wir können auch sagen, daß

$$L \sim \frac{2^2}{n^2}\,\psi(h),$$

wo

$$\frac{h-1}{2} < \psi(h) \leqq h + 2$$

ist [10]).

(Eingegangen am 26. Juni 1928.)

Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen.

Von

Nikola Obreschkoff in Sofia.

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \quad \lim \lambda_n = \infty.$$

Wir setzen bei der Reihe (1) $c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$

$$C_\lambda(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_m, \quad \lambda_m < \omega \leqq \lambda_{m+1},$$

$$C_\lambda^\varkappa(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} c_n(\omega - \lambda_n)^\varkappa = \varkappa \int_0^\omega C_\lambda(\tau)(\omega - \tau)^{\varkappa-1} d\tau, \quad \varkappa > 0,$$

$$C_l^\varkappa(\omega) = \sum_{l_n < \omega} c_n(\omega - l_n)^\varkappa = \varkappa \int_1^\omega C_l(\tau)(\omega - \tau)^{\varkappa-1} d\tau,$$

$$e^{\lambda_n} = l_n, \quad C_l(\tau) = \sum_{l_n < \tau} c_n.$$

Wenn für ein gewisses $\varkappa$ die Zahlen $\frac{C_\lambda^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa}$ gegen einen bestimmten Grenzwert streben, so nennt man die Reihe (1) nach dem Vorgange von M. Riesz[1]) $(R, \lambda, \varkappa)$-summierbar. Wenn $\frac{C_l^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa}$ gegen einen bestimmten Grenzwert strebt, so ist die Reihe (1) $(R, l, \varkappa)$-summierbar. Bekanntlich ist dieses Summierungsverfahren in der Theorie der Dirichletschen Reihen von großer Wichtigkeit.

In dieser Arbeit[2]) wird eine Verallgemeinerung der absoluten Konvergenz gegeben, indem der Begriff der absoluten Summierung[3]) eingeführt

---

[1]) Die vollständige Theorie dieser Summationen findet man bei G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge Tracts **18** (1915)

[2]) Eine vorläufige Mitteilung ist in einer Note des Verf., C. R. **186** (1928), S. 1813 erschienen.

[3]) Die absolute Summierbarkeit mit dem arithmetischen Mittel von Cesàro ist von M. Fekete, Mathematikai és Természettudomanyi Ertessitö **32** (1914), S. 384–425, und E. Kogbetliantz, Bull. Darboux **49** (1925), S. 234–256 behandelt worden.

wird. Man kommt derart in der Theorie der Dirichletschen Reihen zu neuen Ergebnissen, wobei die schon bekannten eine präzisere Form gewinnen.

Die Reihe (1) heißt absolut summierbar von der Ordnung $\varkappa > 0$, oder $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar, wenn das Integral

$$\int_A^\infty \left| \frac{d}{d\omega} \left[\frac{C_\lambda^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} \right] \right| d\omega$$

konvergent ist (A ist eine beliebige positive Zahl). Anderseits, da

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{C_\lambda^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} \right] = \frac{\varkappa}{\omega^{\varkappa+1}} \sum_{\lambda_n < \omega} c_n \lambda_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1} = \varkappa \omega^{-1-\varkappa} D_{\varkappa-1}(\omega)$$

gilt, kann diese Definition auch folgendermaßen abgeändert werden:

Die Reihe (1) ist $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar, wenn das Integral

$$\int_A^\infty \omega^{-\varkappa-1} |D_{\varkappa-1}(\omega)| d\omega$$

konvergiert, worin $D_{\varkappa-1}(\omega)$ das typische Mittel von der Ordnung $\varkappa - 1$ für die Reihe $\sum c_n \lambda_n$ darstellt.

Ist eine Reihe $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar, so ist offenbar auch $(R, \lambda, \varkappa)$-summierbar; aber die Umkehrung trifft nicht immer zu. Z. B. ist die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

wie man sofort ersieht, $(R, n, 1)$-summierbar, nicht aber $|R, n, 1|$-summierbar.

1. Die Eigenschaften der absolut konvergenten Reihen lassen sich auch auf den Fall der absolut summierbaren Reihen übertragen. So z. B., wenn die Reihe (1) absolut summierbar von der Ordnung $\varkappa$ ist, so ist auch die Reihe

$$m_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{2}$$

absolut summierbar von derselben Ordnung. Genauer, es sei $\lambda_0 \geqq 0$ eine beliebige Zahl und $\lambda_0 < \lambda_1$, und setzen wir $\mu_n = \lambda_{n-1}$, dann ist die Reihe (2) $|R, \mu, \varkappa|$-summierbar. In der Tat, wenn $D'_{\varkappa-1}(\omega)$ sich auf die Reihe (2) bezieht, haben wir

$$D'_{\varkappa-1}(\omega) = \mu_1 (\omega - \mu_1)^{\varkappa-1} m_0 + D_{\varkappa-1}(\omega),$$

woraus man ersieht, daß das Integral

$$\int_A^\infty \omega^{-1-\varkappa} |D'_{\varkappa-1}(\omega)| d\omega$$

konvergent ist. Umgekehrt, wenn $\nu_n = \lambda_{n+1}$, so ist, wenn die Reihe (1) $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar ist, auch die Reihe $c_2 + c_3 + \ldots + c_n + \ldots$ $|R, \nu, \varkappa|$-summierbar.

Satz 1. *Wenn die Reihe* (1) *absolut konvergiert, so ist sie auch* $|R, \lambda, \varkappa|$*-summierbar für jedes* $\varkappa > 0$.

Der Einfachheit halber nehmen wir $\lambda_1 > 0$ und $0 < A < \lambda_1$ an, was die Allgemeinheit des Beweises nicht beeinträchtigt. Unter der Voraussetzung, die Reihe (1) sei absolut konvergent, haben wir

$$|D_{\varkappa-1}(\omega)| \leqq \sum_{\lambda_n < \omega} |c_n| \lambda_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1},$$

$$i = \int_A^\infty \omega^{-1-\varkappa} |D_{\varkappa-1}(\omega)| \, d\omega \leqq \int_A^\infty \omega^{-1-\varkappa} \sum_{\lambda_n < \omega} |c_n| \lambda_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1} d\omega.$$

Vertauschen wir in der rechten Seite die Integration mit der Summation, so ergibt sich

$$i \leqq \sum_{n=1}^\infty \int_{\lambda_n}^\infty |c_n| \lambda_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1} \omega^{-1-\varkappa} d\omega = \frac{1}{\varkappa} \sum_{n=1}^\infty |c_n|.$$

Damit ist der Satz bewiesen. Allgemeiner gilt

Satz 2. *Ist die Reihe* (1) $|R, \lambda, \varkappa|$*-summierbar, so ist sie auch* $|R, \lambda, \varkappa_1|$*-summierbar für jedes* $\varkappa_1 > \varkappa$.

Da $D_{\varkappa-1}(\omega)$ das typische Mittel nach Riesz für die Reihe $\sum c_n \lambda_n$ darstellt, so folgt nach einem bekannten Satz, wenn $\varkappa_1 = \varkappa + d$ gesetzt wird,

$$(3) \qquad D_{\varkappa_1-1}(\omega) = T \int_A^\omega D_{\varkappa-1}(u) (\omega - u)^{d-1} du, \quad T = \frac{\Gamma(\varkappa_1)}{\Gamma(\varkappa)\Gamma(d)},$$

woraus mit $X > A$, $A > 0$ offenbar

$$\int_A^X \omega^{-\varkappa-d-1} |D_{\varkappa_1-1}(\omega)| \, d\omega \leqq T \int_A^X \omega^{-\varkappa-d-1} d\omega \int_A^\omega |D_{\varkappa-1}(u)| (\omega - u)^{d-1} du,$$

$$\int_A^X \omega^{-\varkappa-d-1} d\omega \int_A^\omega |D_{\varkappa-1}(u)| (\omega - u)^{d-1} du$$

$$= \int_A^X |D_{\varkappa-1}(u)| \, du \int_u^X \omega^{-\varkappa-d-1} (\omega - u)^{d-1} d\omega$$

$$< \int_A^X |D_{\varkappa-1}(u)| \, du \int_u^\infty \omega^{-\varkappa-d-1} (\omega - u)^{d-1} d\omega$$

folgt. Da aber

$$\int_u^\infty \omega^{-\varkappa-d-1} (\omega - u)^{d-1} d\omega = u^{-1-\varkappa} \frac{\Gamma(\varkappa+1)\Gamma(d)}{\Gamma(\varkappa+d+1)}$$

ist, so erhalten wir

$$\varkappa_1 \int_A^\infty \omega^{-\varkappa_1-1} |D_{\varkappa_1-1}(\omega)| \, d\omega \leqq \varkappa \int_A^\infty u^{-1-\varkappa} |D_{\varkappa-1}(u)| \, du,$$

was nicht nur den Satz beweist, sondern auch zu dem Schlusse führt, daß das Integral

$$\varkappa_1 \int_A^\infty \omega^{-\varkappa_1-1} |D_{\varkappa_1-1}(\omega)| \, d\omega$$

nicht zunehmen kann, wenn $\varkappa_1$ von $\varkappa$ an wächst. Die Formel (3) ist für $\varkappa \geqq 1$ gültig. Für $\varkappa < 1$ wird das einfache Integral wegen des Faktors $(\omega - u)^{\delta-1}$ divergent, aber wegen $\varkappa > 0$, was wir schon angenommen haben, wird das Doppelintegral konvergent sein. Der Beweis bleibt auch in Kraft, wenn zuerst nur

$$I_\alpha = T \int_A^\infty D_{\varkappa-1}(u) (\omega + \alpha - u)^{\delta-1} du, \quad \alpha > 0$$

gesetzt wird. Wir haben dann:

$$\int_A^X \omega^{-\varkappa-\delta-1} |I_\alpha| \, d\omega \leqq T \int_A^X |D_{\varkappa-1}(u)| \, du \int_u^X \omega^{-\varkappa-\delta-1} (\omega + \alpha - u)^{\delta-1} d\omega .$$

Lassen wir α gegen Null streben, so wird die linke Seite, wie man sich leicht überzeugen kann, gegen

$$\int_A^X \omega^{-\varkappa-\delta-1} |D_{\varkappa+\delta-1}(\omega)| \, d\omega$$

streben, und die rechte Seite gegen

$$\int_A^X |D_{\varkappa-1}(u)| \, du \int_A^X \omega^{-\varkappa-\delta-1} (\omega - u)^{\delta-1} d\omega ,$$

so daß die obigen Ergebnisse auch hier gelten, und zwar auch für $1 > \varkappa > 0$.

2. Es seien die Reihen

(A) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(B) $$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

und die Zahlfolgen

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots;$$
$$\lim \lambda_n = \lim \mu_n = \infty$$

gegeben, und die $\nu_n = \mu_\varkappa + \lambda_m$ sollen nach zunehmenden Werten geordnet sein. Unter einem Dirichletschen Produkt beider Reihen versteht man die Reihe:

(C) $$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

mit $c_n = \sum_{\lambda_m + \mu_\varkappa = \nu_n} a_m b_\varkappa$. Bei der Multiplikation nach Cauchy gilt, wenn $(\lambda_n = n, \ \mu_n = n)$ gesetzt wird, der klassische Satz von Mertens: Wenn die

Reihe (A) absolut konvergiert und die Reihe (B) konvergent ist, so konvergiert die Reihe (C) ebenfalls, und ihre Summe ist gleich dem Produkt der beiden Reihen. Die Erweiterung dieses Satzes für $\lambda_n = \mu_n = \log n$ ist von Stieltjes gegeben worden, dessen Beweis aber seine Gültigkeit auch bei der allgemeinen Dirichletschen Multiplikation beibehält. H. Hardy[4]) beweist ferner allgemeiner, daß, wenn die Reihe (A) absolut konvergiert und die Reihe (B) (R, μ, β)-summierbar ist, die Reihe (C) (R, ν, β)-summierbar ist. Mit dem eingeführten Summierungsverfahren erhalten wir den allgemeinen Satz:

Satz 3. *Wenn die Reihe* (A) $|R, \lambda, \alpha|$*-summierbar und ihre* (R, λ, α)*-Summe* A *ist, und wenn die Reihe* (B) (R, μ, β)*-summierbar ist mit der Summe* B*, so ist die Reihe* (C) $(R, \nu, \alpha+\beta)$*-summierbar mit der Summe* AB.

Man ersieht zunächst, daß man die Annahme $A = B = 0$ machen kann. In der Tat ist, wenn wir

$$A_\lambda^\alpha(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n (\omega - \lambda_n)^\alpha, \qquad B_\mu^\beta(\omega) = \sum_{\mu_n < \omega} b_n (\omega - \mu_n)^\beta,$$

$$C_\nu^\gamma(\omega) = \sum_{\nu_n < \omega} c_n (\omega - \nu_n)^\gamma, \qquad \gamma = \alpha + \beta$$

setzen, bekanntlich

$$C_\nu^\gamma(\omega) = D \int_h^\omega A_\lambda^{\alpha-1}(u) B_\mu^\beta(\omega - u)\, du = D_1 \int_h^\omega A_\lambda^\alpha(u) B_\mu^{\beta-1}(\omega - u)\, du,$$

$$D = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}, \qquad D_1 = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}, \qquad 0 < h \leqq \lambda_1, \quad 0 < h \leqq \mu_1.$$

Es sei $E_\mu^\beta(\omega)$ die Summe von Ordnung β für die Reihe

$$(\mathrm{B}') \qquad (-B + b_1) + b_2 + b_3 + \ldots;$$

dann ist offenbar

$$E_\mu^\beta(\omega) = -B(\omega - \mu_1)^\beta + B_\mu^\beta(\omega),$$

$$E_\mu^{\beta-1}(\omega) = -B(\omega - \mu_1)^{\beta-1} + B_\mu^{\beta-1}(\omega), \qquad \lim_{\omega=\infty} \frac{E_\mu^\beta(\omega)}{\omega^\beta} = 0.$$

Es sei $H_\nu^\gamma(\omega)$ das typische Mittel für das Produkt der Reihen (A) und (B'). Dann ist

$$H_\nu^\gamma(\omega) = D_1 \int_h^\omega A_\lambda^\alpha(\omega - u) B_\mu^{\beta-1}(u)\, du - B D_1 \int_h^\omega (u - \mu_1)^{\beta-1} A_\lambda^\alpha(\omega - u)\, du.$$

---

[4]) Hardy and Riesz, loc. cit. S. 65; Hardy and Littlewood, Proc. Math. Soc. 11 (1912), S. 411–476.

Da bekanntlich aus $\frac{A_\lambda^\alpha(\omega)}{\omega^\alpha} \to A$

$$\lim_{\omega\to\infty}\left\{\omega^{-\gamma}\int_h^\omega (u-\mu_1)^{\beta-1}A_\lambda^\alpha(\omega-u)\,du\right\} = A\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)}$$

folgt, so ist

$$\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{C_\nu^\gamma(\omega)}{\omega^\gamma} - \frac{H_\nu^\gamma(\omega)}{\omega^\gamma}\right] = AB.$$

Wenn also der Satz für die Reihe (B′) bewiesen ist, so gilt er auch für die Reihe (B). Aus demselben Grunde können wir uns auf den Fall $A=0$ beschränken.

Wir setzen daher voraus, daß $A=B=0$, d. h.

$$A_\lambda^\alpha(\omega) = o(\omega^\alpha), \qquad B_\mu^\beta(\omega) = o(\omega^\beta)$$

ist. Es sei $\varepsilon>0$ eine beliebige kleine Zahl, und m sei so groß gewählt, daß

$$|A_\lambda^\alpha(\omega)| < \varepsilon\omega^\alpha, \qquad |B_\mu^\beta(\omega)| < \varepsilon\omega^\beta, \qquad \omega \geqq m,$$

$$\int_m^\infty |f(u)|\,du < \varepsilon, \qquad f(u) = \frac{d}{du}\left[\frac{A_\lambda^\alpha(u)}{u^\alpha}\right] = \frac{\alpha u A_\lambda^{\alpha-1}(u) - \alpha A_\lambda^\alpha(u)}{u^{\alpha+1}}$$

gilt, was infolge der Konvergenz des Integrals

$$\int^\infty |f(u)|\,du$$

erreicht werden kann. Weiter haben wir

$$C_\nu^\gamma(\omega) = D\int_h^\omega A_\lambda^{\alpha-1}(u)\,B_\mu^\beta(\omega-u)\,du = D(i_1+i_2),$$

$$|i_1| = \left|\int_h^m A_\lambda^{\alpha-1}(u)\,B_\mu^\beta(\omega-u)\,du\right| < K(\omega-m)^\beta = o(\omega^\gamma),$$

$$i_2 = \alpha^{-1}\int_m^\omega u^\alpha f(u)\,B_\mu^\beta(\omega-u)\,du + \int_m^\omega \frac{A_\lambda^\alpha(u)}{u}\,B_\mu^\beta(\omega-u)\,du = S_1+S_2,$$

$$|S_1| < K\omega^\gamma\int_m^\omega |f(u)|\,du < \varepsilon K\omega^\gamma, \quad |S_2| < \varepsilon K\int_m^\omega u^{\alpha-1}(\omega-u)^\beta\,du < \frac{\varepsilon K}{\alpha}\omega^\gamma,$$

woraus $S_1, S_2 = o(\omega^{\alpha+\beta})$, d. h. $i_2 = o(\omega^\gamma)$, $C_\nu^\gamma(\omega) = o(\omega^\gamma)$ folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

3. Wir betrachten nun eine Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad s=\sigma+it, \tag{4}$$

von der wir keine Einschränkungen bezüglich der Konvergenz oder der Summierbarkeit mit typischen Mitteln machen. Es gilt

Satz 4. *Ist die Reihe* (4) $|R, \lambda, \varkappa|$*-summierbar für* $s_0 = \sigma_0 + i t_0$, *so ist sie für jedes* s *mit* $R(s) > \sigma_0$ *auch* $|R, \lambda, \varkappa|$*-summierbar.*

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $s_0 = 0$ setzen. Es ist dann

$$D_{\varkappa-1}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n \lambda_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1}, \qquad D'_{\varkappa-1}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n e^{-\lambda_n s} (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1} \lambda_n .$$

Wie bekannt[5]), haben wir

$$(5) \qquad D'_{\varkappa-1}(\omega) = -\int_h^\omega D(u) \frac{d}{du} [e^{-su} (\omega - u)^{\varkappa-1}] du, \qquad 0 < h < \lambda_1 .$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) $\varkappa$ *ist ganzzahlig.* Aus (5) erhalten wir durch partielle Integration

$$D'_{\varkappa-1}(\omega) = (-1)^{\varkappa-1} e^{-s\omega} D_{\varkappa-1}(\omega)$$

$$+ \frac{(-1)^\varkappa}{(\varkappa-1)!} \int_h^\omega D_{\varkappa-1}(u) \frac{d^\varkappa}{du^\varkappa} [e^{-su} (\omega - u)^{\varkappa-1}] du = T_1 + T_2 .$$

Nach Voraussetzung ist das Integral

$$\int_h^\infty \omega^{-\varkappa-1} |D_{\varkappa-1}(\omega)| d\omega$$

konvergent. Anderseits gilt für hinreichend große g bei $\omega > g$ offenbar $e^{-\omega} < \omega^{-1-\varkappa}$, und überhaupt für jede ω die Ungleichung $e^{-\sigma\omega} < K \omega^{-1-\varkappa}$, wo K eine endliche Zahl ist. Folglich ist

$$|T_1| \leqq e^{-\sigma\omega} |D_{\varkappa-1}(\omega)|, \qquad \int_h^\infty |T_1| \omega^{-1-\varkappa} d\omega < K \int_h^\infty \omega^{-1-\varkappa} |D_{\varkappa-1}(\omega)| d\omega .$$

Man ersieht leicht, daß

$$\frac{d^\varkappa}{du^\varkappa} [e^{-su} (\omega - u)^{\varkappa-1}] = e^{-su} \sum H_{i,\mu,\nu} s^i \omega^\mu u^\nu$$

gilt. Die $H_{i,\mu,\nu}$ sind Konstanten, $i = \mu + \nu + 1$, $\mu \leqq \varkappa - 1$,

$$|T_2| < \frac{1}{(\varkappa-1)!} \sum |H_{i,\mu,\nu}| \int_h^\omega |D_{\varkappa-1}(u)| e^{-\sigma u} |s|^i \omega^\mu u^\nu du .$$

Offenbar gilt $u^\nu e^{-\sigma u} < K_1 u^{-1-\varkappa}$, wobei K_1 konstant ist, so daß

$$|T_2| < M \omega^{\varkappa-1}$$

ausfällt, woraus folgt, daß das Integral $\int \omega^{-1-\varkappa} |T_2| d\omega$ konvergiert. Damit ist der Satz für jedes ganzzahlige $\varkappa$ bewiesen.

---

[5]) Hardy and Riesz, loc. cit. S. 40.

b) *Es sei* $\varkappa > 1$ *keine ganze Zahl* und $\gamma = [\varkappa - 1]$, $\varkappa = 1 + \gamma + \delta$, $0 < \delta < 1$. Indem wir partiell integrieren, erhalten wir

$$D'_{\varkappa-1}(\omega) = \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma!} \int_h^\omega D_\gamma(u) \frac{d^{\gamma+1}}{du^{\gamma+1}} [e^{-su}(\omega - u)^{\gamma+\delta}] du.$$

Ersetzen wir e^{-su} mit $(e^{-su} - e^{-\omega s}) + e^{-s\omega}$, so wird

$$D'_{\varkappa-1}(\omega) = J_1 + J_2,$$

mit

$$J_1 = \frac{e^{-s\omega}\,\delta(\delta+1)\dots(\delta+\gamma)}{\gamma!} \int_h^\omega D_\gamma(u)(\omega - u)^{\delta-1} du = e^{-s\omega} D_{\varkappa-1}(\omega).$$

Folglich ist

$$\int_h^\infty |J_1|\, \omega^{-1-\varkappa} d\omega \leqq \int_h^\infty \omega^{-1-\varkappa} |D_{\varkappa-1}(\omega)|\, d\omega.$$

Das zweite Integral J_2 liefert nach partieller Integration:

$$J_2 = \frac{(-1)^\gamma}{(\gamma+1)!} \int_h^\omega D_{\gamma+1}(u) \frac{d^{\gamma+2}}{du^{\gamma+2}} [(e^{-su} - e^{-s\omega})(\omega - u)^{\gamma+\delta}] du.$$

Man erhält leicht

$$\begin{aligned} &\frac{d^{\gamma+2}}{du^{\gamma+2}} [(e^{-su} - e^{-s\omega})(\omega - u)^{\gamma+\delta}] \\ &\quad = (\gamma+\delta)\dots\delta(\delta-1)(e^{-su} - e^{-s\omega})(\omega - u)^{\delta-2} \\ &\qquad + (\gamma+\delta)\dots\delta s e^{-su}(\omega - u)^{\delta-1} + \sum_{\mu=0}^{\gamma} \varkappa_\mu s^\mu (\omega - u)^{\delta+\gamma-\mu}, \end{aligned}$$

worin $\varkappa_\mu$ von ω und u unabhängig sind. Das Integral J_2 zerfällt hiernach in eine Summe von dreien. Wir betrachten zuerst

$$\alpha = \int_h^\omega (e^{-su} - e^{-s\omega})(\omega - u)^{\delta-2} D_{\gamma+1}(u) du.$$

Hier ist

$$|e^{-su} - e^{-s\omega}| = \left| s \int_u^\omega e^{-sx} dx \right| \leqq \frac{|s|}{\varepsilon} (\omega - u) e^{-\varepsilon u}, \qquad R(s) \geqq \varepsilon > 0,$$

so daß

$$\begin{aligned} \int_h^X |\alpha|\, \omega^{-\varkappa-1} d\omega &\leqq \frac{|s|}{\varepsilon} \int_h^X \omega^{-\varkappa-1} d\omega \int_h^\omega e^{-\varepsilon u} (\omega - u)^{\delta-1} |D_{\gamma+1}(u)|\, du \\ &= \frac{|s|}{\varepsilon} \int_h^X e^{-\varepsilon u} |D_{\gamma+1}(u)|\, du \int_u^X \omega^{-\varkappa-1} (\omega - u)^{\delta-1} d\omega \\ &< M_1 \int_h^X e^{-\varepsilon u} u^{-\gamma-2} |D_{\gamma+1}(u)|\, du, \end{aligned}$$

worin

$$M_1 = \frac{|s|}{s} \frac{\Gamma(\gamma+2)\,\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta+2)}.$$

Aber bei $u \geqq h$ ist $e^{-su} < K_2 u^{-1}$, so daß

$$\int_h^\infty |\alpha|\,\omega^{-\varkappa-1}\,d\omega < M_1 K_2 \int_h^\infty u^{-\gamma-3}\,|D_{\gamma+1}(u)|\,du.$$

Da die Reihe (4) $|R, \lambda, \gamma+2|$-summierbar ist (infolge $\gamma+2 = \varkappa+1-\delta > \varkappa$), so ist das Integral rechterhand konvergent, woraus die Konvergenz des Integrals linkerhand folgt. Analog für die beiden anderen Teile. In dem Fall $\varkappa < 1$ bleiben die Beweisführungen dieselben, wenn man berücksichtigt, daß die Doppelintegrale einen Sinn haben. — Wir beweisen jetzt

Satz 5. *Ist die Reihe* (4) *für* $s_0 = \sigma_0 + it_0$ $|R, \lambda, \varkappa|$*-summierbar, so gilt für die durch sie dargestellte Funktion* $f(s)$ *bei* $R(s) \geqq \sigma_0 + \varepsilon > \sigma_0$ *die Abschätzung* $f(s) = O(|t|^\varkappa)$.

Man kann $s_0 = 0$ setzen; dann folgt nach bekannten Sätzen

$$f(s) = c s^{\varkappa+1} \int_h^\infty e^{-s\tau} A^\varkappa(\tau)\,d\tau, \qquad A^\varkappa(\tau) = \sum_{\lambda_n < \tau} a_n (\tau - \lambda_n)^\varkappa, \qquad c = \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)}.$$

Wir formen diesen Ausdruck folgendermaßen um:

$$s \int_h^\omega A^\varkappa(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau = -A^\varkappa(\omega)\,e^{-s\omega} + \varkappa \int_h^\omega \frac{A^\varkappa(\tau)}{\tau} e^{-s\tau}\,d\tau + \int_h^\omega \tau^\varkappa e^{-s\tau} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{A^\varkappa(\tau)}{\tau^\varkappa}\right].$$

Da $|A^\varkappa(\omega)| < M_1 \omega^\varkappa$ ist, so strebt das erste Glied für $\omega \to \infty$ gegen Null. Auch das zweite Glied strebt gegen einen bestimmten Grenzwert und das dritte ist seinem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\int_h^\omega \tau^\varkappa e^{-s\tau} \left|\frac{d}{d\tau}\left[\frac{A^\varkappa(\tau)}{\tau^\varkappa}\right]\right| d\tau.$$

Für große τ ist $\tau^\varkappa e^{-s\tau} < 1$. Da das Integral

$$\int_h^\infty \left|\frac{d}{d\tau}\left[\frac{A^\varkappa(\tau)}{\tau^\varkappa}\right]\right| d\tau$$

konvergent ist, so folgt daraus, daß das dritte Glied für $\omega = \infty$ absolut konvergiert. Infolgedessen haben wir

$$f(s) = c s^\varkappa \left(\varkappa \int_h^\infty \frac{A^\varkappa(\tau)}{\tau} e^{-s\tau}\,d\tau + \int_h^\infty \tau^\varkappa e^{-s\tau} \frac{d}{d\tau}\left[\frac{A^\varkappa(\tau)}{\tau^\varkappa}\right] d\tau\right),$$

woraus

$$f(s) = O(|s|^\varkappa)$$

folgt. Es ist aber bekannt, daß bei $\frac{|t|}{\sigma} < g$, wo g endlich ist, $f(s) = O(1)$ und bei $\frac{|t|}{\sigma} > g$ zugleich $f(s) = O(|t|^{\varkappa})$, $|t| > 1$ gilt.

Bei der $(R, \lambda, \varkappa)$-Summierung weiß man, daß $f(s) = o(|t|^{\varkappa+1})$ ist.

Auf Grund des Satzes 5 und nach einem bekannten Satze von Lindelöf[6]) erhalten wir folgendes: Es sei die Reihe (4) für $s = \alpha$ $(R, \lambda, \varkappa)$-summierbar und für $s = \beta$ $|R, \lambda, \varkappa_1|$-summierbar; dann gilt für $\alpha + \varepsilon \leqq R(s) \leqq \beta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, die Abschätzung $f(s) = O(|t|^{\varkappa(\sigma)})$, worin $\varkappa(\sigma)$ eine lineare Funktion bedeutet, die für $\sigma = \alpha + \varepsilon$ gleich $\varkappa + 1$ und für $\sigma = \beta + \varepsilon$ gleich $\varkappa_1$ ist.

Aus dem Satze 4 folgt, daß eine Zahl $l_\varkappa$ existiert, für die die Reihe (4) für jedes s $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar ist, für welches außerdem $\Re(s) > l_\varkappa$ gilt und daß die Reihe für $\Re(s) < l_\varkappa$ nicht mehr $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar ist. Diese Zahl $l_\varkappa$ werden wir als Abszisse der absoluten Summierung von der Ordnung $\varkappa$ bezeichnen. Wenn $\alpha_\varkappa$ die Abszisse der gewöhnlichen Summierung $(R, \lambda, \varkappa)$ ist, so ist $\alpha_\varkappa \leqq l_\varkappa$, $l_\varkappa \geqq l_{\varkappa_1}$ bei $\varkappa \leqq \varkappa_1$. Interessant wäre die Aufsuchung eines expliziten Ausdruckes für diese Abszisse. Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 6. *Die Abszisse $l_\varkappa$ der absoluten Summierbarkeit von der Ordnung $\varkappa$ der Reihe* (4) *wird, wenn sie positiv ist, durch die Formel*

$$l_\varkappa = \overline{\lim_{\omega \to \infty}} \frac{\log \int_h^\omega u^{-\varkappa-1} |D_{\varkappa-1}(u)|\, du}{\omega}, \qquad D_{\varkappa-1}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n \lambda_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1}$$

gegeben.

In der Tat, es sei $l \geqq 0$ der fragliche Limes.

Wenn $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl bedeutet, ist

$$\int_h^\omega u^{-1-\varkappa} |D_{\varkappa-1}(u)|\, du < e^{\omega(l+\varepsilon)}$$

für $\omega > N$. Wir werden beweisen, daß die Reihe (4) für $s = l + 2\varepsilon$ $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar sei. Wenn $\varkappa$ eine ganze Zahl darstellt, so folgt aus der Formel (5)

$$D'_{\varkappa-1}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n(l+2\varepsilon)} (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1}$$

$$= (-1)^{\varkappa-1} e^{-\omega(l+2\varepsilon)} D_{\varkappa-1}(\omega) + \frac{(-1)^\varkappa}{(\varkappa-1)!} \int_h^\omega D_{\varkappa-1}(u)\, v^{(\varkappa)}(u)\, du,$$

worin

$$v(u) = e^{-u(l+2\varepsilon)} (\omega - u)^{\varkappa-1}, \qquad v^{(\varkappa)}(u) = e^{-su} \sum N_{i,\mu,\nu} s^i \omega^\mu u^\nu,$$

$$s = l + 2\varepsilon, \qquad \mu \leqq \varkappa - 1$$

---

[6]) E. Lindelöf, Bull. Darboux 32 (1908), S. 341–356.

ist. Wir betrachten das Integral

$$\beta = \int_h^X \omega^{-1-\varkappa} e^{-\omega s} |D_{\varkappa-1}(\omega)|\, d\omega$$

und setzen

$$U(\omega) = \int_h^\omega u^{-1-\varkappa} |D_{\varkappa-1}(u)|\, du, \qquad U(\omega) < e^{\omega(l+\varepsilon)}.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\beta = e^{-X(l+2\varepsilon)} U(X) + (l+2\varepsilon) \int_h^X e^{-s\omega} U(\omega)\, d\omega < M_1.$$

Für die übrigen Integrale gilt

$$\int_h^X \omega^{-1-\varkappa+\mu}\, d\omega \int_h^\omega u^\nu |D_{\varkappa-1}(u)|\, e^{-su}\, du$$

$$= \int_h^X u^\nu |D_{\varkappa-1}(u)|\, e^{-su}\, du \int_u^X \omega^{-\varkappa-1+\mu}\, d\omega < K_3 \int_h^X u^\nu e^{-su} |D_{\varkappa-1}(u)|\, du,$$

und nach einer Umformung stellen wir wie oben fest, daß die Integrale für $X = \infty$ konvergieren. Nehmen wir umgekehrt an, daß die Reihe $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, $s = \sigma + it$, $|R, \lambda, \varkappa|$-summierbar ist bei $s = l > 0$, wir setzen also

$$D'_{\varkappa-1}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n e^{-\lambda_n l} (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1} \lambda_n.$$

Dann ist das Integral

$$\int_h^\infty \omega^{-1-\varkappa} |D'_{\varkappa-1}(\omega)|\, d\omega$$

konvergent. Mit

$$D_{\varkappa-1}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n (\omega - \lambda_n)^{\varkappa-1} \lambda_n, \qquad D'(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n l}$$

folgt sodann

$$D_{\varkappa-1}(\omega) = -\int_h^\omega D'(u) \frac{d}{du} [e^{lu} (\omega - u)^{\varkappa-1}]\, du$$

$$= (-1)^{\varkappa-1} e^{l\omega} D'_{\varkappa-1}(\omega) + \frac{(-1)^\varkappa}{(\varkappa-1)!} \int_h^\omega D'_{\varkappa-1}(u) \frac{d^\varkappa}{du^\varkappa} [e^{lu} (\omega - u)^{\varkappa-1}]\, du,$$

wenn $\varkappa$ ganzzahlig ist. Setzen wir

$$f(x) = \int_h^x \omega^{-1-\varkappa} |D'_{\varkappa-1}(\omega)|\, d\omega,$$

so ist

$$\int_h^X \omega^{-1-\varkappa} e^{l\omega} |D'_{\varkappa-1}(\omega)|\, d\omega = e^{lX} f(X) - l \int_h^X e^{l\omega} f(\omega)\, d\omega < K_4 e^{lX}.$$

In der anderen Summe treten Integrale von der Form

$$J = \int_h^X \omega^{-1-\varkappa}\,\omega^{\mu}\,d\omega \int_h^{\omega} u^{\nu}\,e^{lu}\,|D'_{\varkappa-1}(u)|\,du, \qquad \mu \leqq \varkappa - 1$$

auf. Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$J = \int_h^X u^{\nu}\,e^{lu}\,|D'_{\varkappa-1}(u)|\,du \int_u^X \omega^{-1-\varkappa+\mu}\,d\omega.$$

Ist $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl, so haben wir für $h \leqq u \leqq \infty$

$$u^{\nu}\,e^{lu} < K_{\varepsilon}\,e^{(l+\varepsilon)u}\,u^{-1-\varkappa},$$

d. h. wir erhalten $J < K_{\varepsilon}\,e^{(l+\varepsilon)X}$, woraus folgt

$$\overline{\lim_{\omega\to\infty}} \frac{\log \int_h^{\omega} u^{-1-\varkappa}\,|D_{\varkappa-1}(u)|\,du}{\omega} \leqq l + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, w. z. b. w. Der Fall nicht ganzzähliger $\varkappa$ wird analog behandelt. Wenn $l_k < 0$ ist, so haben wir

$$l_k = \overline{\lim_{\omega\to\infty}} \frac{\log \int_{\omega}^{\infty} u^{-1-\varkappa}\,|D_{\varkappa-1}(u)|\,du}{\omega}.$$

Die Beweisführung ist dieselbe.

(Eingegangen am 10. August 1928.)

Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Einleitung.

Im Jahre 1906 hat Herr Hilbert auf sehr weiten Umwegen bewiesen, daß mit $\sum_n x_n^2$ stets auch $\sum_{p,q} \frac{x_p x_q}{p+q}$ konvergiert [1]). Für diesen Satz wurden bald neue, aber immer noch sehr tief fundierte Beweise gegeben [2]). Erst im Jahre 1915 zeigte Herr G. H. Hardy, daß mit $\sum_n x_n^2$ stets auch $\sum_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$ konvergiert $(x_\nu \geqq 0)$ und daß dieser Satz mit dem Hilbertschen äquivalent ist; auch gab er auf diesem Wege einen direkten elementaren Beweis des Hilbertschen Satzes [3]). Wesentlich einfachere Beweise stammen erst aus späteren Jahren [4]). Inzwischen waren auch die ver-

[1]) Vgl. H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen, Dissertation Göttingen 1908, S. 83.

[2]) Zunächst von Hilbert selbst (s. Weyl [1])), sodann von F. Wiener (Elementarer Beweis eines Reihensatzes von Herrn Hilbert, Math. Annalen 68 (1910), S. 361–366) und I. Schur (Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 140 (1912), S. 1–28).

[3]) G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus XLI. On the convergence of certain integrals and series, Mess. of Math. 45 (1915), S. 163–166.

[4]) a) G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus LI. On Hilbert's double-series theorem and some connected theorems, Mess. of Math. 48 (1918), S. 107 bis 112. b) G. H. Hardy, Note on a theorem of Hilbert, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 314–317. c) E. Landau, A note on a theorem concerning series of positive terms, Journ. Lond. Math. Soc. 1 (1926), S. 38–39. d) E. B. Elliot, A simple exposition of some recently proved facts as to convergency, ebenda 1 (1926), S. 93–96. e) Th. Kaluza und G. Szegö, Über Reihen mit lauter positiven Gliedern, ebenda 2 (1928), S. 266–272. f) K. Grandjot, On some identities relating to Hardy's convergence theorem, ebenda 3 (1928), S. 114–117. g) K. Knopp, Über Reihen mit positiven Gliedern, ebenda 3 (1928), S. 205–211.

schiedensten Verallgemeinerungen aufgestellt und bewiesen worden [5]). Unter diesen seien zunächst die beiden folgenden genannt, bei denen, wie in allem Folgenden, vorausgesetzt wird, daß die a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sämtlich nicht-negativ, aber nicht alle $= 0$ sind, und daß $\sum a_n$ konvergiert:

I. *Für* $0 < t < 1$ *ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}} \text{ konvergent und } < \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{t}}} \sum a_n .$$

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ *ist konvergent und* $< e \sum a_n$.

Vor kurzem habe ich (s. [4g]) ein in mancher Hinsicht einfacheres Beweisverfahren für diese Sätze mitgeteilt, durch das insbesondere gezeigt wird, daß I auch für $t < 0$ gilt. Dies liefert den Satz

III. *Für* $t > 0$ *ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_1^{-t} + a_2^{-t} + \ldots + a_n^{-t}} \right)^{\frac{1}{t}} \text{ konvergent und } < (1+t)^{\frac{1}{t}} \sum a_n .$$ [6])

In allen drei Sätzen darf die rechts auftretende Konstante durch keine kleinere ersetzt werden.

Durch diese Sätze ist also gezeigt, daß, wenn $\varphi(x)$ eine der Funktionen

$$x^t \text{ mit } 0 < t < 1, \quad \log x, \quad \text{oder} \quad x^{-t} \text{ mit } t > 0$$

bedeutet und $\Phi(x)$ die dazu inverse Funktion ist, die folgenden Sätze gelten:

Satz A. $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi(a_n)}{n} \right)$ *ist konvergent.*

Satz B. *Es gibt eine nur von* $\varphi(x)$ *abhängige Konstante* $K = K(\varphi)$, *so daß die Summe der in* A *genannten Reihe*

$$< K(\varphi) \sum a_n$$

ist.

Satz C. *Die untere Grenze* $K_*(\varphi)$ *der in* B *zulässigen Konstanten* $K(\varphi)$ *ist*

$$K_*(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \right).$$

---

[5]) Vgl. außer den in [4]) genannten Arbeiten: T. Carleman, Sur les fonctions quasi-analytiques, V. Kongreß d. Skand. Math. in Helsingfors (1923), S. 181–186; T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques, Paris 1926, S. 112–115. Hier wird II bewiesen; vereinfachte Beweise bei G. Pólya, Proof of an inequality, Proc. Lond. Math. Soc. [2] **24** (1926), Records of Proc. at Meeting LVII, sowie in den unter [4e]) und [4g]) genannten Arbeiten.

[6]) Ist $a_m = 0$, so hat man $\frac{n}{a_1^{-t} + a_2^{-t} + \ldots + a_n^{-t}}$ für $n \geqq m$ gleich 0 zu setzen.

Im folgenden sollen nun zunächst, nachdem in § 1 die Ausdrücke, die die Glieder der Reihe in A bilden, näher untersucht sind, in § 2 umfassendere Klassen von Funktionen $\varphi(x)$ angegeben werden, für die einer der Sätze A, B oder C gilt.

In den weiteren Paragraphen sollen in Kürze gewisse Verallgemeinerungen und Modifikationen der Sätze I, II und III in analoger Weise behandelt werden. Für die speziellen Funktionen x^t mit $0 < t < 1$ und $\log x$ haben nämlich die Herren G. H. Hardy und G. Pólya weiterhin den Satz bewiesen (wir beschränken uns hier auf die Analoga zu B und C):

Satz D. *Sind* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *irgendwelche positive Zahlen* (>0), *so ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi\left(\frac{\lambda_1 \varphi\left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right) + \ldots + \lambda_n \varphi\left(\frac{a_n}{\lambda_n}\right)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \text{ konvergent und } \leqq K(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$ [7])

Hierbei bedeutet $K(\varphi)$ *eine nur von* φ *abhängige Konstante, für die die untere Grenze wieder die in Satz* C *angegebene Konstante* $K_*(\varphi)$ *ist.*

Schließlich sind — besonders in den Arbeiten von Hardy — für die spezielle Funktion x^t, $0 < t < 1$, neben den Reihensätzen die analogen Sätze für Integrale betrachtet worden. Bedeutet $\varphi(x)$ eine dieser Funktionen und ist $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, nicht negative integrierbare Funktion, für die

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

existiert und >0 ist, so gilt u. a. der

Satz E. *Es existiert auch das Integral*

$$\int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} \varphi f(x)\,dx\right)dx \quad \text{und ist} \leqq K(\varphi) \cdot \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Hierbei bedeutet $K(\varphi)$ *eine nur von* φ *abhängige Konstante, für die die untere Grenze durch*

$$K_*(\varphi) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\log y} \int_0^{y} \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} \varphi\left(\frac{1}{u}\right)du\right)dx$$

geliefert wird (so daß sie bei der jetzigen Bedeutung von $\varphi(x)$ *mit der in Satz* C *genannten übereinstimmt)* [8]).

---

[7]) Vgl. die in Fußnote [4b]) genannte Arbeit sowie die Note von G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus LX. An inequality between integrals, Mess. of Math. **54** (1925), S. 150—156.

[8]) Vgl. hierzu weiter unten Fußnote [15]).

Im letzten Paragraphen (§ 3) wird die Gültigkeit auch dieser Sätze D und E in analoger Weise wie die der Sätze A, B, C auf umfassendere Klassen von Funktionen $\varphi(x)$ ausgedehnt[9]).

§ 1.

Soll einer der Sätze A, B oder C für alle unsere konvergenten Reihen $\sum a_n$ gelten, so muß man zunächst voraussetzen, daß $\varphi(x)$ für alle $x > 0$ definiert ist und eine eindeutige inverse Funktion besitzt, also *stetig* und *im engeren Sinne monoton* ist[10]).

Die Klasse dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$. Gehört nun $\varphi(x)$ zu dieser Klasse, so gehört offenbar auch $\varphi_1(x) = c\varphi(x) + c'$ für beliebiges $c \gtrless 0$ und beliebiges c' zur Klasse $\mathfrak{M}$. Sind Φ und Φ_1 die zu φ und φ_1 inversen Funktionen, so ist überdies für beliebige positive x_ν

$$(1) \qquad \Phi\left(\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}\right) = \Phi_1\left(\frac{\varphi_1(x_1)+\varphi_1(x_2)+\ldots+\varphi_1(x_n)}{n}\right).$$

Wir können uns also c (etwa $= \pm 1$) und c' immer so gewählt denken, daß $\varphi_1(x)$ *monoton wächst* und daß

$$\lim_{x \to +0} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{oder} \quad = -\infty$$

ist. Wir sagen dann kurz, $\varphi_1(x)$ sei eine zu $\varphi(x)$ gehörige normierte Funktion, und nennen $\varphi(x)$ von der *ersten* oder *zweiten Art*, je nachdem dieser Grenzwert $= 0$ oder $= -\infty$ ist. Bei den Funktionen erster Art setzen wir natürlich $\varphi_1(0) = 0$ und bei denen zweiter Art in sinngemäßer Übertragung der in Fußnote [6]) gemachten Bemerkung den gemeinsamen Wert der beiden Seiten von (1)

$$(2) \qquad \Phi\left(\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}\right) = 0,$$

---

[9]) Einer freundlichen Mitteilung des Herrn G. H. Hardy entnehme ich, daß auch er die Frage aufgeworfen hat, für welche Funktionen $\varphi(x)$ außer x^t, $0 < t < 1$, und $\log x$ die Sätze A, B, C noch gelten mögen, und daß er insbesondere, unserem späteren Beispiel § 1, Beispiel 8 entsprechend, gefunden hat, daß die Sätze für die Funktionen $\gamma(x^t)$, $0 < t < 1$, gelten, wenn $\gamma(x)$ die Bedeutung aus § 1, Beispiel 7 hat. Auf seine Anregung hin und im Anschluß an die Arbeit [4a]) hat sich auch Herr L. S. Bosanquet mit diesen Fragen beschäftigt und u. a. Resultate erhalten, die mit den unsrigen in Berührung stehen. — Endlich möchte ich hervorheben, daß ich der regen Mitarbeit des Herrn H. Späth † an dem Problemenkreis manche wertvolle Anregung verdanke; insbesondere rühren die Bemerkungen § 2, A_2, A_3 und in der Hauptsache die Bemerkung B_1 von ihm her.

[10]) D. h. für $0 < x_1 < x_2$ soll unter Ausschluß der Gleichheit stets $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ oder stets $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ sein.

wenn eines der Argumente $x_\nu = 0$ ist. Dann gilt (1) für beliebige nichtnegative x_ν. Allgemein setzen wir, wenn $\varphi(x)$ von der zweiten Art ist, $\varphi(0) = \pm\infty$, $\Phi(\pm\infty) = 0$, wobei das obere Zeichen für eine wachsende, das untere für eine fallende Funktion gelten soll.

Für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$ gilt nun der folgende einfache, aber für alles Folgende grundlegende

Satz 1. *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$, $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ ihre Inversen, so ist die Ungleichung*

$$\Psi\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right) \leqq \Phi\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \tag{2}$$

dann und nur dann für beliebige x, y eines abgeschlossenen Intervalles (a, b) mit $0 \leqq a < b$ stets erfüllt, wenn

$$\psi_1(\Phi(x)) \text{ in } (\varphi(a), \varphi(b)) \text{ von oben konvex}^{11})$$

ist. Hierbei soll $\psi_1(x)$ eine zu $\psi(x)$ gehörige normierte Funktion (oder diejenige der beiden Funktionen $\pm\psi(x)$, welche monoton wächst) bedeuten.

Der Beweis ist überaus einfach. Setzt man $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$, so sind x' und y' beliebige Zahlen aus $(\varphi(a), \varphi(b))$, und wegen (1) lautet die Bedingung (2)

$$\Psi_1\left(\frac{\psi_1\Phi(x')+\psi_1\Phi(y')}{2}\right) \leqq \Phi\left(\frac{x'+y'}{2}\right)$$

oder also, da $\psi_1(x)$ monoton wächst,

$$\frac{\psi_1\Phi(x')+\psi_1\Phi(y')}{2} \leqq \psi_1\Phi\left(\frac{x'+y'}{2}\right).$$

Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß $\psi_1\Phi$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ von oben konvex ist[12]).

Da nun bekanntlich, wenn eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall (a', b') von oben konvex ist, für beliebige Werte $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ dieses Intervalles

$$\frac{f(x_1')+f(x_2')+\ldots+f(x_n')}{n} \leqq f\left(\frac{x_1'+x_2'+\ldots+x_n'}{n}\right)$$

ist, so haben wir noch den folgenden

Zusatz. *Unter den Bedingungen des Satzes 1 ist für beliebige $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus (a, b) stets*

$$\Psi\left(\frac{\psi(x_1)+\psi(x_2)+\ldots+\psi(x_n)}{n}\right) \leqq \Phi\left(\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}\right). \tag{3}$$

---

[11]) Dieser Ausdruck ist im folgenden stets im Sinne von „nicht-konkav" gebraucht.

[12]) Analog zeigt man, daß es für die Gültigkeit von (2) notwendig und hinreichend ist, wenn $\varphi_1\Psi$ in $(\psi(a), \psi(b))$ *von unten* konvex ist und hierbei $\varphi_1(x)$ die wachsende der beiden Funktionen $\pm\varphi(x)$ bedeutet.

Da wir mit dieser Beziehung zwischen zwei Funktionen weiterhin beständig zu tun haben, legen wir sie durch eine besondere Definition fest.

Definition. *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$ und $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ die dazu inversen Funktionen, so soll $\psi(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) tiefer als $\varphi(x)$ heißen, in Zeichen*

$$\psi(x) < \varphi(x) \quad in \quad (a, b),^{13})$$

wenn — unter den Bezeichnungen des Satzes 1 — $\psi_1(\Phi(x))$ *in* $(\varphi(a), \varphi(b))$ *von oben konvex oder* $\varphi_1(\Psi(x))$ *in* $(\psi(a), \psi(b))$ *von unten konvex ist.*

Hiernach können wir Satz 1 auch in folgender Form aussprechen:

Satz 1′. *Die Beziehungen* (2) *und* (3) *sind für zwei Funktionen φ und ψ der Klasse $\mathfrak{M}$ dann und nur dann für beliebige Argumente eines Intervalls (a, b) stets erfüllt, wenn in diesem Intervall $\psi < \varphi$ ist*[13a]).

Ist $f(x)$ in (a', b') von oben konvex, so ist es auch in jedem Teilintervall (a'', b'') von (a', b') von oben konvex. Ist ferner $f(x)$ in (a', b') und $g(x)$ in $(f(a'), f(b'))$ von oben konvex, und $g(x)$ überdies *monoton wachsend*, so ist offenbar auch $g(f(x))$ in (a', b') von oben konvex: denn es ist

$$\frac{gf(x')+gf(y')}{2} \leqq g\left(\frac{f(x')+f(y')}{2}\right) \leqq gf\left(\frac{x'+y'}{2}\right).$$

Dies liefert den

Satz 2. *Ist $\psi < \varphi$ in (a, b), so gilt diese Beziehung auch in jedem Teilintervall (a_1, b_1) von (a, b). Ist überdies $\chi < \psi$ in (a, b), so ist auch $\chi < \varphi$ in (a, b).*

Denn nach Voraussetzung ist $\psi_1 \Phi$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ und $\chi_1 \Psi_1$ in $(\psi_1(a), \psi_1(b))$ von oben konvex und die letztere Funktion überdies monoton wachsend. Nach der Vorbemerkung ist also $\chi_1 \Psi_1 \psi_1 \Phi = \chi_1 \Phi$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ von oben konvex. Hierbei sollen χ_1 und ψ_1 natürlich zu χ und ψ gehörige normierte Funktionen bedeuten.

---

[13]) In der Beziehung $\psi < \varphi$ darf $\varphi(x)$ offenbar durch jede Funktion $c\varphi(x) + c'$ mit $c \gtrless 0$ ersetzt werden, und Analoges gilt für $\psi(x)$.

[13a]) Die in (2) und (3) auftretenden Ausdrücke sind als eine (im allgemeinen *nicht-lineare*) *Mittelbildung* aus x und y bzw. aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ anzusprechen. Wird φ oder ψ der Reihe nach $= x$, $\log x$, $\frac{1}{x}$ genommen, so erhält man das arithmetische, geometrische, harmonische Mittel. Nennen wir den Ausdruck rechts in (3) kurz das φ-Mittel aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so kann Satz 1′ auch so ausgesprochen werden: *Das ψ-Mittel von n Größen aus (a, b) ist dann und nur dann niemals größer als ihr φ-Mittel, wenn in diesem Intervall $\psi < \varphi$ ist.* Hiernach ist also z. B. das geometrische Mittel aus n nicht-negativen Größen deswegen nicht größer als deren arithmetisches Mittel, weil $\log x$ in $(0, +\infty)$ von oben konvex ist.

Beispiele. 1. Für $0 < \alpha \leqq \beta$ ist $x^\alpha \subset x^\beta$ in $(0, +\infty)$, denn $x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ ist wegen $0 < \frac{\alpha}{\beta} \leqq 1$ in $(0, +\infty)$ von oben konvex.

2. Auch für $\alpha \leqq \beta < 0$ ist $x^\alpha \subset x^\beta$ in $(0, +\infty)$, denn jetzt ist $-x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ wegen $\frac{\alpha}{\beta} \geqq 1$ wieder in $(0, +\infty)$ von oben konvex.

3. Für $\alpha > 0$ ist $\log x \subset x^\alpha$ in $(0, +\infty)$, denn $\log x^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \log x$ ist wegen $\alpha > 0$ in $(0, +\infty)$ von oben konvex.

4. Für $\alpha < 0$ ist $x^\alpha \subset \log x$ in $(0, +\infty)$, weil $-(e^x)^\alpha$ wegen $\alpha < 0$ in $(-\infty, +\infty)$ von oben konvex ist.

5. Sind α und β von 0 verschieden und $\alpha \leqq \beta$, so ist $x^\alpha \subset x^\beta$ in $(0, +\infty)$, wie sich aus 1. bis 4. nach Satz 2 sofort ergibt.

6. Man prüft leicht nach, daß z. B.

a) $\operatorname{loglog}(1+x) \subset \log x$ in $(0, +\infty)$;

b) $\log x \subset \operatorname{loglog} \frac{1}{x}$ in $(0, 1)$ und $\operatorname{loglog} \frac{1}{x} \subset x^\alpha$ in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, falls $\alpha > 0$ ist[14]);

c) $\left(\log \frac{1}{x}\right)^\alpha \subset x^\varepsilon$ in $(0, 1)$, falls $\alpha \geqq 1$, $\varepsilon > 0$;

d) $x^{-\varepsilon} \subset \left(\log \frac{1}{x}\right)^\alpha$ in $(0, 1)$, falls $\alpha \leqq 1$, $\alpha \gtrless 0$, $\varepsilon > 0$;

e) $(1 - e^{-x})^\alpha \subset x^\alpha$ in $(0, +\infty)$, falls $\alpha > 0$;

f) $x^\beta \subset (1 - e^{-x})^\alpha$ in $(0, \delta)$, falls $0 < \alpha < 1$, $\beta \gtrless 0$, $\beta < \alpha$ und falls $\delta = \delta(\beta) > 0$ hinreichend klein ist;

g) $x^2 \subset e^x$ in $(e, +\infty)$;

h) $e^{\frac{1}{x}} \subset \frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$;

i) $\frac{1}{x^\alpha} \subset e^{\frac{1}{x}}$ in $\left(\frac{1}{\alpha - 1}, +\infty\right)$, falls $\alpha > 1$;

k) $x \subset e^{-x^2}$ in $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$;

l) $x \subset e^{-\frac{1}{x}}$ in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

m) $\frac{1}{\log \frac{1}{x}} \subset x^\varepsilon$ in $\left(0, e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)$ und in $(1, +\infty)$, falls $\varepsilon > 0$.

---

[14]) Daß hier $\operatorname{loglog} \frac{1}{x}$ nur für $0 < x < 1$ definiert ist, ändert offenbar an den Aussagen nichts. Entsprechend würde es genügen, statt $\mathfrak{M}$ die Klasse $\mathfrak{M}'$ derjenigen Funktionen zu betrachten, die in einem festen Intervall der Form $0 < x < A$ definiert und dort stetig und monoton sind, wofern man sich auch weiterhin auf dieses Intervall bzw. auf $0 \leqq x < A$ beschränkt.

7. Ist $\gamma(x)$ irgend eine in (a, b) definierte, monoton wachsende und von oben konvexe (oder monoton fallende und von unten konvexe) stetige Funktion, so ist

$$\gamma(x) \subset x \quad \text{in} \quad (a, b).$$

Umgekehrt besagt „$\gamma(x) \subset x$ in (a, b)" nichts anderes, als daß $\gamma(x)$ die eben genannten Eigenschaften hat.

8. Ist $\gamma(x) \subset x$ in (a, b) und $\alpha \gtrless 0$, so ist auch

$$\gamma(x^\alpha) \subset x^\alpha \quad \text{in} \quad (a, b),$$

denn $\gamma_1\left(\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha\right) = \gamma_1(x)$ ist in (a, b) von oben konvex, wenn γ_1 eine zu γ gehörige normierte Funktion bedeutet.

9. Ist $\gamma(x) \subset x$ in (a, b), vgl. 7., und $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{M}$, so ist

$$\gamma\varphi(x) \subset \varphi(x) \quad \text{in} \quad (a, b),$$

wie die Prüfung von $\gamma\varphi\Phi(x) = \gamma(x)$ zeigt.

10. Es ist

$$\sqrt{(1+x^2)-1} \subset x^{\frac{3}{2}} \quad \text{in} \quad (0, \delta)$$

bei geeignetem $\delta > 0$. Denn die zweite Ableitung von $\sqrt{\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}$ ist negativ für alle hinreichend kleinen positiven x.

11. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ normierte Funktionen erster Art und ist $\psi \subset \varphi$ in (a, b), $0 \leqq a < b$, so ist für $\alpha > 1$ auch

$$\psi^\alpha \subset \varphi^\alpha \quad \text{in} \quad (a, b).$$

Beweis. Der Satz besagt offenbar nur, daß, wenn die Funktion $y = f(x) = \psi\Phi(x)$ in (a', b') mit $0 \leqq a' < b'$ von oben konvex ist, so ist dort für $\alpha > 1$ auch die Funktion

$$y = F(x) = \left(f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^\alpha$$

von oben konvex. Nun ist für

$$a' \leqq x_1 < x_2 \leqq b', \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2 \tag{4}$$

nach Voraussetzung

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leqq \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{d. h.} \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 \leqq 0. \tag{5}$$

Wir halten jetzt x_1 und x_2 fest und bilden den Bereich

$$(\mathfrak{B}) \qquad \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \leqq y \leqq f(x) \end{cases}$$

vermöge

$$x' = x^a, \quad y' = y^a$$

auf den Bereich

$$(\mathfrak{B}') \qquad \begin{cases} x_1^a \leqq x \leqq x_2^a, \\ \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x^{\frac{1}{a}} - x_1\right) + y_1\right]^a \leqq y \leqq F(x) \end{cases}$$

ab. Dann wird $F(x)$ sicher die behaupteten Konvexitätseigenschaften haben, wenn schon die untere Begrenzung von $\mathfrak{B}'$ von oben konvex ist. Es genügt also zu zeigen, daß unter der Bedingung (4) für $x_1^a \leqq x \leqq x_2^a$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x^{\frac{1}{a}} - x_1\right) + y_1\right]^a \leqq 0$$

ist. Diese zweite Ableitung ist aber, von wesentlich positiven Faktoren abgesehen,

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 - y_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1},$$

was nach (5) nicht positiv ist.

§ 2.

Auf Grund von § 1 lassen sich nun die bisherigen Gültigkeitsbereiche der Sätze A, B, C erheblich erweitern. Es gilt zunächst der

Satz 3. *Gilt Satz* A *für eine Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{M}$, *so gilt er auch für jede Funktion* $\psi(x)$ *aus* $\mathfrak{M}$, *die in einem Intervall* $(0, \delta)$, $\delta > 0$, *tiefer als* $\varphi(x)$ *ist.*

Beweis. Wir denken uns die beiden Funktionen φ und ψ normiert. Ist dann $\sum a_n$ eine beliebige unserer konvergenten Reihen, so strebt wegen $a_n \to 0$

$$\psi(a_n) \to 0 \quad \text{oder} \quad \to -\infty,$$

je nachdem ψ von der ersten oder zweiten Art ist. Dasselbe Verhalten hat dann auch $\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}$, so daß in beiden Fällen

$$\Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right) \to 0$$

strebt. Wir wählen nun p so groß, daß für $n \geqq p$ dieser Ausdruck und auch a_n selbst $< \delta$ ist. Setzen wir speziell

$$\Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \ldots + \psi(a_p)}{p}\right) = a,$$

so ist also $a < \delta$ und für $n \geqq p$

$$\Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right) = \Psi\left(\frac{p\,\psi(a) + \psi(a_{p+1}) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right).$$

Da hier rechts alle Argumente von ψ in $0 \ldots \delta$ liegen, so ist dies wegen $\psi \subset \varphi$ in $(0, \delta)$ nach dem Zusatz zu Satz 1 weiterhin

$$\leqq \Phi\left(\frac{p\,\varphi(a) + \varphi(a_{p+1}) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right).$$

Da aber die Reihe $\overbrace{a + a + \ldots + a}^{p\text{-mal}} + a_{p+1} + \ldots + a_n + \ldots$ konvergiert und für $\varphi(x)$ der Satz A gelten soll, so steht hier das n-te Glied einer konvergenten Reihe. Also ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right)$$

konvergent.

Nun gilt Satz A für die Funktion x^t, $0 < t < 1$. Wir haben daher speziell den

Satz 4. *Satz* A *gilt für jede Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{M}$, *die in einem Intervall* $(0, \delta)$ *mit* $\delta > 0$ *tiefer ist als eine der Funktionen* x^t *mit* $0 < t < 1$. *Insbesondere gilt also der Satz* A *für alle Funktionen der Form* $\gamma(x^t)$, *bei denen* $0 < t < 1$ *und* $\gamma(x) \subset x$ *in* $(0, \delta)$ *ist* (vgl. § 1, Beispiele 7 bis 9).

Der Satz ist weit davon entfernt, die von $\varphi(x)$ zu erfüllenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, unter denen Satz A gilt. In dieser Hinsicht seien folgende Bemerkungen eingefügt:

A_1. Für die Gültigkeit von Satz A ist es nicht notwendig, daß die zu $\varphi(x)$ gehörige normierte Funktion $\varphi_1(x)$ in einem Intervall der Form $0 < x < \delta$ von oben konvex ist. In der Tat kann man leicht eine stetige Funktion $\varphi_1(x)$ konstruieren, die monoton wächst, in keinem Intervall der Form $0 < x < \delta$ ständig von oben konvex ist und die stets zwischen $\sqrt{x}$ und $2\sqrt{x}$ liegt. Aus $\sqrt{x} < \varphi_1(x) < 2\sqrt{x}$ folgt dann $\frac{1}{4}x^2 < \Phi_1(x) < x^2$ und

$$\Phi_1\left(\frac{\varphi_1(a_1) + \ldots + \varphi_1(a_n)}{n}\right) < \left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right)^2 < 4\left(\frac{\sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n}}{n}\right)^2.$$

Wegen I (siehe Einleitung) gelten für eine solche Funktion also die Sätze A und B.

A_2. Damit für eine Funktion $\varphi(x)$ erster Art der Klasse $\mathfrak{M}$ der Satz A gelte, ist *notwendig*, daß $\sum_n \Phi_1\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ für ein $\alpha > 0$ konvergiert. Denn soll $\sum_n \Phi_1\left(\frac{\varphi_1(a_1) + \ldots + \varphi_1(a_n)}{n}\right)$ konvergieren, so muß, da $\Phi_1(x)$ monoton wächst und $\varphi_1(a_\nu) \geqq 0$ ist, a fortiori $\sum_n \Phi_1\left(\frac{\varphi_1(a_p)}{n}\right)$ konvergieren. Hierbei ist p irgendein Index, für den $a_p > 0$.

A_3. Es gibt wachsende Funktionen $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$, die in $(0, \delta)$ *im engeren Sinne* von oben konvex sind (d. h. $\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} < \varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, mit Ausschluß der Gleichheit) und für die der Satz A *nicht* gilt. Ein Beispiel liefert jede Funktion $\varphi(x)$, für die in hinreichender Nähe von 0

$$\Phi(x) = \frac{x}{\log\frac{1}{x}}$$

ist. Denn für diese ist

$$\sum_n \Phi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \sum_n \frac{\alpha}{n \log\frac{n}{\alpha}}$$

bei jedem $\alpha > 0$ divergent.

Eine analoge Erweiterung gestattet nun auch der Satz B; doch ist für den Wert der Konstanten K natürlich nicht nur das Verhalten der Funktionen φ und ψ in der Nähe des Nullpunkts, sondern das auf der ganzen positiven x-Achse von Einfluß. Die Sätze lauten daher:

Satz 5. *Gilt Satz* B *für eine Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{M}$, *so gilt er auch für jede Funktion* $\psi(x)$ *aus* $\mathfrak{M}$, *die in* $(0, +\infty)$ *tiefer als* $\varphi(x)$ *ist, wofern* $K(\psi) = K(\varphi)$ *genommen wird.*

Satz 6. *Der Satz* B *gilt für jede Funktion* $\varphi(x)$ *aus* $\mathfrak{M}$, *die in* $(0, +\infty)$ *tiefer ist als eine der Funktionen* x^t *mit* $0 < t < 1$, *wofern* $K(\varphi) = (1-t)^{\frac{1}{t}}$ *genommen wird.*

Noch weniger als im Falle des Satzes A sind hiermit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Satzes B erfaßt. In dieser Richtung gilt die folgende Bemerkung:

B_1. Es gibt Funktionen $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$ und sogar solche, die in $(0, +\infty)$ von oben konvex sind, für die zwar Satz A, aber nicht Satz B gilt. — Ein Beispiel bietet die Hyperbel

$$\varphi(x) = \sqrt{(1+x)^2 - 1}, \qquad \Phi(x) = \sqrt{x^2+1} - 1,$$

die für $x \to +0$ sich wie $\sqrt{x}$, für $x \to +\infty$ wie x verhält. In der Tat gilt nach § 1, Beispiel 10 für diese Funktion der Satz A. Ist andererseits

$$a_1 = k, \quad a_2 = a_3 = \ldots = 0,$$

so ist $\sum a_n = k$ und $\sum_n \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n}\right) = \sum_n \Phi\left(\frac{\varphi(k)}{n}\right)$. Da nun

$\Phi(x) > x - 1$ ist für $x \geqq 1$, so ist dies

$$\geqq \sum_{n=1}^{[\varphi(k)]} \left(\frac{\varphi(k)}{n} - 1 \right) > \varphi(k) \, (\log [\varphi(k)] - 1).$$

Der Quotient der Summe der transformierten Reihe durch die Summe der ursprünglichen Reihe ist also

$$> \frac{\varphi(k) \, (\log [\varphi(k)] - 1)}{k}$$

und folglich wegen $\frac{\varphi(k)}{k} \to 1$, $\varphi(k) \to +\infty$ für $k \to +\infty$ beliebig großer Werte fähig: Satz B gilt nicht für diese Funktion.

Da bei Satz 5 $K(\psi) = K(\varphi)$ genommen werden durfte, so folgt daraus in Richtung auf Satz C sofort der

Satz 7. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 6 *ist*

$$K_*(\psi) \leqq K_*(\varphi).$$

Um im übrigen den Gültigkeitsbereich des Satzes in analoger Weise auszudehnen, wie den des Satzes B, werden wir den Kreis der zugelassenen Funktionen $\varphi(x)$ noch weiter verengern müssen: Wir betrachten nur solche Funktionen $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$, die für jedes $t \gtrless 0$ mit der Funktion x^t im Sinne der Definition des § 1 vergleichbar sind, so daß also entweder $\varphi(x) < x^t$ oder $x^t < \varphi(x)$ in $(0, +\infty)$ ist. *Die Klasse dieser Funktionen bezeichnen wir mit* $\mathfrak{M}_0$.

Ist nun $\varphi(x)$ eine bestimmte Funktion dieser Klasse $\mathfrak{M}_0$, so sei t_1 die obere Grenze der t, für die $x^t < \varphi(x)$ und t_2 die untere Grenze der t, für die $\varphi(x) < x^t$ ist in $(0, +\infty)$. Man überzeugt sich sofort, daß $t_1 = t_2$ sein muß. Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Wert mit t_φ, so gilt der

Satz 8. *Ist* $\varphi(x)$ *eine Funktion der Klasse* $\mathfrak{M}_0$, *so gilt Satz* C (*und auch Satz* B) *für diese Funktion dann und nur dann, wenn* $t_\varphi < 1$ *ist, und es ist in diesem Falle*

$$K_*(\varphi) = (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}},$$

ein Wert, unter dem für $t_\varphi = 0$ *die Zahl* e, *für* $t_\varphi = -\infty$ *die Zahl* 1 *verstanden werden soll.*

Beweis. Ist $t_\varphi < 1$ und $t_\varphi < t < 1$, $t \gtrless 0$, so ist $\varphi(x) < x^t$ in $(0, +\infty)$ und demgemäß $K_*(\varphi) \leqq (1 - t)^{-\frac{1}{t}}$, also auch $K_*(\varphi) \leqq (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}}$. Da man ebenso leicht beweist, daß $K_*(\varphi)$ auch $\geqq$ dem rechtsstehenden Werte sein muß, so ist

$$K_*(\varphi) = (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}}.$$

Weiter ist nun für $t_\varphi < t < 1$, $t \gtrless 0$, wegen $\varphi(x) \subset x^t$

$$\Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right) \leqq \left(\frac{1^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

und also

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)$$

$$\leqq \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

d. h.

$$\leqq (1-t)^{-\frac{1}{t}}$$

Analog ist für $t < t_\varphi$, $t \gtrless 0$, wegen $x^t \subset \varphi(x)$

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right) \geqq (1-t)^{-\frac{1}{t}}.$$

Also existiert der in Satz C auftretende Grenzwert und ist

$$= (1-t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}} = K_*(\varphi).$$

Damit ist der eine Teil des Satzes 8 bewiesen.

Gilt andererseits der Satz C für eine Funktion $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}_0$, so gilt für sie auch der Satz B. Es sei $K(\varphi)$ eine dabei zulässige Konstante und t in $0 < t < 1$ so gewählt, daß $(1-t)^{-\frac{1}{t}} > K(\varphi)$ ist. Nach Satz 7 muß dann $\varphi(x) \subset x^t$ sein in $(0, +\infty)$. Wegen $t < 1$ ist daher auch $t_\varphi < 1$.

Dieser Satz läßt sich noch etwas verfeinern; doch soll darauf nicht näher eingegangen werden, sondern der Sachverhalt nur an zwei Beispielen erläutert werden:

1. Es sei $0 < t_0 < 1$ und

$$\varphi(x) = (1-e^{-x})^{t_0}$$

und $\Phi(x)$ dazu invers. Dann zeigt man ganz direkt (vgl. § 1, Beispiel 6e und f), daß einerseits für jedes $t > t_0$

$$\varphi(x) \subset x^t \text{ in } (0, +\infty)$$

und andererseits für jedes $t < t_0$, $t \gtrless 0$

$$x^t \subset \varphi(x) \text{ in } (0, \delta)$$

ist, wenn $\delta = \delta(t) > 0$ passend gewählt wird. Aus dem ersten folgt nach Satz 7

$$K_*(\varphi) \leqq (1-t_0)^{-\frac{1}{t_0}}. \tag{6}$$

Wir wählen nun t in $0 < t < t_0$ fest und m so groß, daß $\frac{1}{m} < \delta(t)$ ist, und setzen für ein $p > m$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0, \quad a_{m+1} = \frac{1}{m+1}, \quad \ldots, \quad a_p = \frac{1}{p}, \quad a_{p+1} = \ldots = 0.$$

Wegen $t < t_0$ und $x^t < \varphi(x)$ in $(0, \delta)$ ist dann

$$\frac{1}{\log p} \sum_{n=1}^{p} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n}\right) \geqq \frac{1}{\log p} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{a_1^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Der Ausdruck rechts strebt für $p \to +\infty$ gegen $(1-t)^{-\frac{1}{t}}$. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich also p, d. h. also die Reihe $\sum a_n$ so wählen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n}\right) \geqq \left((1-t)^{-\frac{1}{t}} - \varepsilon\right) \cdot \sum a_n$$

ist. Daher ist $K_*(\varphi) \geqq (1-t)^{-\frac{1}{t}} - \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $0 < t < t_0$ gilt, so folgt hieraus und aus (6), daß für unsere Funktion $\varphi(x) = (1-e^{-x})^{t_0}$

$$K_*(\varphi) = (1-t_0)^{-\frac{1}{t_0}}$$

ist. Es gilt also unter den bisherigen Voraussetzungen über $\sum a_n$ der

Satz 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-\left(\frac{(1-e^{-a_1})^{t_0}+\ldots+(1-e^{-a_n})^{t_0}}{n}\right)^{1:t_0}}$ *ist konvergent und* $\leqq (1-t_0)^{-\frac{1}{t_0}} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} a_n$. *Hierbei darf die rechtsstehende Konstante durch keine kleinere ersetzt werden.*

2. Wenn $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ gewählt wird, so ist (vgl. § 1, Beispiel 6 h und i) einerseits

$$\varphi(x) < \frac{1}{x} \text{ in } (0, +\infty)$$

und andererseits für jedes $t > 1$

$$\frac{1}{x^t} < \varphi(x) \text{ in } \left(\frac{1}{t-1}, +\infty\right). \tag{7}$$

Aus dem ersten folgt nach Satz 7, daß

$$K_*(\varphi) \leqq 2 \tag{8}$$

ist. Wählen wir andererseits $t > 1$ und $\varepsilon > 0$ fest, aber sonst beliebig, so können wir m so groß machen, daß

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{1^t+2^t+\ldots+n^t} \right)^{\frac{1}{t}} > (1+t)^{\frac{1}{t}} - \varepsilon$$

ausfällt. Wählen wir nun $c > 0$ so groß, daß $\frac{c}{m} > \frac{1}{t-1}$ ist, so ist nach (7) für die Reihe $\sum a_n$, deren Glieder

$$a_1 = c, \quad a_2 = \frac{c}{2}, \quad \ldots, \quad a_m = \frac{c}{m}, \quad a_{m+1} = \ldots = 0$$

sind,

$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n} \right) \geqq \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n} \right)$$

$$\geqq \frac{1}{c+\frac{c}{2}+\ldots+\frac{c}{m}} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{\left(\frac{1}{c}\right)^t+\left(\frac{2}{c}\right)^t+\ldots+\left(\frac{n}{c}\right)^t} \right)^{\frac{1}{t}} > (1+t)^{\frac{1}{t}} - \varepsilon.$$

Daher ist für $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$K_*(\varphi) \geqq (1+t)^{\frac{1}{t}} - \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $t > 1$ gilt, so folgt hieraus zusammen mit (8), daß $K_*(\varphi) = 2$ ist. Es gilt also unter den bisherigen Voraussetzungen über $\sum a_n$ der

Satz 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log\left(\frac{e^{1:a_1}+\ldots+e^{1:a_n}}{n} \right)}$ *ist konvergent und* $\leqq 2 \sum a_n$.

Hierbei darf die Konstante 2 *durch keine kleinere ersetzt werden.*

§ 3.

Die analoge Behandlung der Sätze D und E der Einleitung macht nun keine Schwierigkeiten: Ist $F(x)$ in (a, b) von oben konvex, so ist für beliebige x_ν aus (a, b) und beliebige positive λ_ν bekanntlich auch

$$\frac{\lambda_1 F(x_1)+\ldots+\lambda_n F(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} \leqq F\left(\frac{\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} \right).$$

Ist weiter $f(x)$ irgendeine über $x_1 \ldots x_2$ integrierbare Funktion, deren dortige Werte dem Definitionsintervall von F angehören, so ist auch

$$\frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} F(f(x))\,dx \leqq F\left(\frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right).$$

Dem Satz 1 bzw. 1′ entsprechend gilt daher der

Satz 11. *Sind φ und ψ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$, so ist für beliebige x_ν aus (a, b) mit $0 \leqq a < b$ und beliebige positive λ_ν die Beziehung*

$$\Psi\left(\frac{\lambda_1 \psi(x_1) + \ldots + \lambda_n \psi(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \leqq \Phi\left(\frac{\lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right)$$

sowie für eine beliebige nicht-negative integrierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\Psi\left(\frac{1}{x}\int_0^x \psi f(x)\,dx\right) \leqq \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^x \varphi f(x)\,dx\right)$$

dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\psi \prec \varphi \quad \text{in} \quad (a, b)$$

ist[15]).

Hiernach gelten, den Sätzen 5 bis 8 entsprechend und mit genau analog verlaufenden Beweisen die folgenden Sätze:

Satz 12. *Gilt Satz* D *oder* E *— von der Aussage über die untere Grenze der $K(\varphi)$ noch abgesehen — für eine Funktion $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$, so gilt er auch für jede Funktion $\psi(x)$ aus $\mathfrak{M}$, die in $(0, +\infty)$ tiefer als $\varphi(x)$ ist, wofern $K(\psi) = K(\varphi)$ angenommen wird.*

Satz 13. *Die Sätze* D *und* E *gelten — von der Aussage über die untere Grenze der $K(\varphi)$ noch abgesehen — für jede Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{M}$, die in $(0, +\infty)$ tiefer ist als eine der Funktionen x^t mit $0 < t < 1$, wofern $K(\varphi) = (1-t)^{-\frac{1}{t}}$ genommen wird.*

Satz 14. *Sind, unter den Voraussetzungen des Satzes* 12, *$K_*(\varphi)$ und $K_*(\psi)$ die unteren Grenzen der dort zulässigen Konstanten $K(\varphi)$ bzw. $K(\psi)$, so ist*

$$K_*(\psi) \leqq K_*(\varphi).$$

Satz 15. *Ist $\varphi(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{M}_0$ und hat t_φ dieselbe Bedeutung wie in Satz* 8, *so gelten die (vollständigen) Sätze* D *und* E *dann und nur dann für diese Funktion $\varphi(x)$, wenn $t_\varphi < 1$ ist, und es ist in diesem Falle*

$$K_*(\varphi) = (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}}.$$

Natürlich hat auch die Situation der Sätze 9 und 10 ihr genaues Analogon. So gelten z. B. die folgenden Sätze:

---

[15]) Der hier bei den Funktionen zweiter Art etwa auftretende Wert $\pm\infty$ macht offenbar keine Schwierigkeiten.

Satz 16. *Die Sätze* D *und* E *gelten auch für die Funktion*

$$\varphi(x) = (1 - e^{-x})^{t_0}, \qquad 0 < t_0 < 1,$$

und für sie ist

$$K_*(\varphi) = (1 - t_0)^{-\frac{1}{t_0}}.$$

Satz 17. *Die Sätze* D *und* E *gelten auch für die Funktion*

$$\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

und für sie ist

$$K_*(\varphi) = 2.$$

Diesen Sätzen ließen sich beliebig viele ähnliche an die Seite stellen.

Tübingen, den 5. Oktober 1928.

(Eingegangen am 7. Oktober 1928.)

Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme.

Von

Eberhard Hopf in Berlin-Dahlem.

Die zweimal stetig differenzierbaren Lösungen $u = u(x, y)$ des regulären zweidimensionalen Variationsproblems

$$(1) \qquad \delta \iint_B F(x, y, u, p, q)\, dx\, dy = 0; \quad F''_{pp} F''_{qq} - (F''_{pq})^2 > 0$$

sind bei analytisch von x, y, u, p, q abhängendem F bekanntlich analytische Funktionen von x, y (Hilbertsches Theorem); denn unter diesen Voraussetzungen genügt $u(x, y)$ der analytischen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dx} F'_p + \frac{d}{dy} F'_q - F'_u \equiv F''_{pp} u''_{xx} + 2 F''_{pq} u''_{xy} + F''_{qq} u''_{yy} + \ldots = 0$$

(Lagrangesche Gleichung des Variationsproblems). Wie Herr L. Lichtenstein [1]) gezeigt hat, sind deren zweimal stetig derivierbare Lösungen notwendig dreimal stetig derivierbar, somit nach dem Satz vom analytischen Charakter der (dreimal stetig derivierbaren) Lösungen [2]) elliptischer Differentialgleichungen notwendig analytisch. Die Voraussetzung der zweimaligen stetigen Derivierbarkeit kann durch geringere ersetzt werden. Ich beweise im folgenden auf eine Anregung von Herrn Lichtenstein hin den schärferen

Satz. *Jede Lösung $u = u(x, y)$ von (1), deren erste Ableitungen p, q einer Hölder-Bedingung genügen, ist analytisch,*

---

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Über den analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme, Bull. de l'Ac. des Science de Cracovie 1913, S. 915–941.

[2]) Vgl. den Encyklopädieartikel von Herrn L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus (II C 12), S. 1320–1324.

indem ich zeige, daß jede derartige Lösung zweimal stetig differenzierbar ist. In speziellen Fällen reicht die Voraussetzung der bloßen Stetigkeit von p, q aus, etwa wenn F ein Polynom zweiten Grades in p, q ist, oder, wie Herr T. Radó gezeigt hat, für $F = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. [3])

Es bedeutet eine für die folgenden Überlegungen nur unwesentliche Einschränkung, wenn aus Durchsichtigkeitsgründen F zum Beweise als unabhängig von x, y, u angenommen wird. Jede einmal stetig derivierbare Lösung $u(x, y)$ von

$$\delta \iint_B F(p, q)\, dx\, dy = 0;\quad F''_{pp} F''_{qq} - (F''_{pq})^2 > 0 \tag{1a}$$

genügt dann bei passender Hilfsfunktion $v(x, y)$ im Innern des Bereiches B dem System simultaner elliptischer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$v'_x = -F'_q(u'_x, u'_y), \qquad v'_y = F'_p(u'_x, u'_y), \tag{1b}$$ [4])

das bei zweimaliger Derivierbarkeit von u identisch mit der Lagrange-Gleichung zweiter Ordnung ist. Es genügt also, den obigen Satz für die Lösungen u, v von (1b) zu beweisen.

Es darf vielleicht noch bemerkt werden, daß die im folgenden entwickelte Methode — auf sie hoffe ich bei späterer Gelegenheit zurückzukommen — von den Existenzsätzen der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen (Grundlösung, Greensche Funktion) keinerlei Gebrauch macht.

§ 1.

Systeme linearer elliptischer Differentialgleichungen erster Ordnung. Integralgleichungen für die ersten Ableitungen der Lösungen.

$$L(u, v) \equiv a(x, y)\, u'_x + b(x, y)\, u'_y - v'_y,$$
$$M(u, v) \equiv b(x, y)\, u'_x + c(x, y)\, u_y + v'_x,$$
$$a(x, y)\, c(x, y) - b^2(x, y) > 0,\ a(x, y) > 0$$

sei ein *elliptisches* System linearer Differentialausdrücke erster Ordnung Unser Ziel ist die Aufstellung gewisser Integralgleichungen für die ersten Ableitungen u'_x, u'_y der Lösungen u, v des elliptischen Gleichungssystems

$$L(u, v) = f, \qquad M(u, v) = g.$$

---

[3]) Vgl. loc. cit [1]), S. 936–941. Für die Analytizität der mit einer stetigen Normale versehenen Minimalflächen gibt Herr T. Radó einen kurzen Beweis; vgl. Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 321–327.

[4]) Vgl. A. Haar, Über die Variation der Doppelintegrale. Crelles Journal **149** (1919), S. 1–18.

1. Wir betrachten vorerst den Fall konstanter Koeffizienten a, b, c. Setzt man dann

$$R(u,v) = a u_x' + b u_y' + b v_x' + c v_y'$$
$$S(u,v) = v_x' - u_y',$$

so gilt, wie leicht zu sehen, die (Greensche) Identität

$$\begin{aligned} &\iint_B [u^* L(u,v) + v^* M(u,v) + u R(u^*, v^*) + v S(u^*, v^*)]\, dx\, dy \\ &= \int_C [v u^* - u(b u^* + c v^*)]\, dx + [v v^* + u(a u^* + b v^*)]\, dy \end{aligned} \tag{2}$$

für vier willkürliche, im Bereiche B und auf seinem (positiv durchlaufenen) Rande C einmal stetig derivierbare Funktionen u, v, u^*, v^*.

Die Funktionen

$$\Omega(x,y;\xi,\eta) = a(y-\eta)^2 - 2b(y-\eta)(x-\xi) + c(x-\xi)^2$$
$$\Gamma(x,y;\xi,\eta) = -\frac{\log \Omega(x,y;\xi,\eta)}{4\pi\sqrt{ac-b^2}}$$

besitzen bekanntlich wegen des elliptischen Charakters folgende einfache Eigenschaften. Die quadratische Form Ω ist positiv definit; bei passender Konstante $\omega > 0$ ist daher $\Omega \geqq \omega r^2$,[5]

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Wie leicht zu sehen, gelten Ungleichungen der Form

$$|\Gamma_\xi'|, |\Gamma_\eta'| < \gamma_1 r^{-1}; \quad |\Gamma_{\xi\xi}''|, |\Gamma_{\xi\eta}''|, |\Gamma_{\eta\eta}''| < \gamma_2 r^{-2}.\ ^{5}) \tag{3}$$

Ferner ist

$$R(\Gamma_\xi', \Gamma_\eta') = a\Gamma_{\xi\xi}'' + 2b\Gamma_{\xi\eta}'' + c\Gamma_{\eta\eta}'' = 0, \quad S(\Gamma_\xi', \Gamma_\eta') = \Gamma_{\xi\eta}'' - \Gamma_{\xi\eta}'' = 0. \tag{3a}$$

Für jedes im Bereiche B und auf dessen Rande C einmal stetig derivierbares Funktionenpaar u, v gilt in jedem inneren Punkte (x, y) von B die Integralformel

$$u(x,y) = \begin{cases} \iint_B [L(u,v)\Gamma_\xi' + M(u,v)\Gamma_\eta']\, d\xi\, d\eta \\ -\int_C [v\Gamma_\xi' - u(b\Gamma_\xi' + c\Gamma_\eta')]\, d\xi + [v\Gamma_\eta' + u(a\Gamma_\xi' + b\Gamma_\eta')]\, d\eta \end{cases} \tag{4}$$

(Im Integranden ist $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ zu setzen.) Man weiß, daß das Bereichintegral absolut konvergiert, da der Integrand wegen (3) an

---

[5]) Bekanntlich ist ω gleich der kleinsten Wurzel der charakteristischen Gleichung $\begin{vmatrix} a-\omega & b \\ b & c-\omega \end{vmatrix} = 0$; sie ist sicher $\geqq \frac{ac-b^2}{a+c}$. Betreffs der Konstanten γ_1 und γ_2 ist für später die Bemerkung von Wichtigkeit, daß sie nur von einer oberen Schranke für $a, |b|, c$ und einer unteren Schranke für die Diskriminante $ac - b^2$ abhängen.

der singulären Stelle $\xi = x$, $\eta = y$ höchstens von erster Ordnung unendlich wird. Die Formel (4) ergibt sich in geläufiger Weise, indem man (2) — man ersetze dort die Buchstaben x, y durch ξ, η — mit

$$u^*(\xi, \eta) = -\Gamma'_\xi, \qquad v^* = -\Gamma'_\eta$$

auf den Bereich $B - (\varrho)$ anwendet, unter (ϱ) das Innere der die singuläre Stelle (x, y) ausschließenden Ellipse $\Omega = \varrho^2$ verstanden und nachträglich diese Ellipse auf den Punkt (x, y) zusammenzieht $(\varrho \to 0)$.

2. Wir gehen nun zum allgemeinen Fall variabler Koeffizienten über. Die Elliptizitätsbedingung $a(x, y)\, c(x, y) - b^2(x, y) > 0$ und $a(x, y) > 0$ sei in einem Bereiche B und auf seinem Rande C erfüllt. Wir verlangen im folgenden nur, daß a, b, c, f, g in B einer Hölder-Bedingung, etwa vom Exponenten α, $0 < \alpha \leqq 1$,

$$|a(x, y) - a(\xi, \eta)| \leqq \text{konst.}\, r^\alpha, \ldots, \qquad 0 < \alpha \leqq 1,$$

genügen.

Wir schreiben dann das Gleichungssystem

$$L(u, v) = f, \qquad M(u, v) = g$$

in der Form[5a])

$$L_0(u, v) = a_0 u'_x + b_0 u'_y - v'_y = f - (a - a_0) u'_x - (b - b_0) u'_y,$$
$$M_0(u, v) = b_0 u'_x + c_0 u'_y + v'_x = g - (b - b_0) u'_x - (c - c_0) u'_y,$$
$$a_0 = a(x_0, y_0), \ldots,$$

unter (x_0, y_0) einen inneren Punkt von B verstanden, und wenden hierauf die Formel (4) mit $a = a_0, \ldots, L = L_0$, $M = M_0$ an. Dann ergibt sich

$$u(x, y) = \iint_B (f\Gamma'_\xi + g\Gamma'_\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$(5) \quad - \iint_B \{[(a - a_0)\Gamma'_\xi + (b - b_0)\Gamma'_\eta] u'_\xi + [(b - b_0)\Gamma'_\xi + (c - c_0)\Gamma'_\eta] u'_\eta\}\, d\xi\, d\eta$$
$$- \int_C [v\Gamma'_\xi - u(b_0\Gamma'_\xi + c_0\Gamma'_\eta)]\, d\xi + [v\Gamma'_\eta + u(a_0\Gamma'_\xi + b_0\Gamma'_\eta)]\, d\eta.$$

Unser Ziel ist hier die Bildung der ersten Ableitungen u'_x, u'_x. Daß beim Randintegral in jedem inneren Punkte (x, y) von B unter dem Integralzeichen differenziert werden darf, ist selbstverständlich. Betreffs der Bereichintegrale bemerken wir zunächst, daß

$$\iint_B (f\Gamma'_\xi + g\Gamma'_\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$(5a) \quad = \iint_B [(f - f_0)\Gamma'_\xi + (g - g_0)\Gamma'_\eta]\, d\xi\, d\eta + f_0 \int_C \Gamma\, d\eta - g_0 \int_C \Gamma\, d\xi,$$

$$f_0 = f(x_0, y_0), \qquad g_0 = g(x_0, y_0)$$

[5a]) Einer ähnlichen Zerlegung hatte sich bei anderer Gelegenheit bereits Herr A. Korn bedient. Vgl. Schwarz-Festschrift 1914, S. 215–229.

ist. Die einzelnen Terme in den Integranden der Bereichintegrale sind nunmehr im wesentlichen von gleicher Gestalt. Differentiation unter dem Integralzeichen wird hier im allgemeinen nicht gestattet sein, da dann die Integranden, z. B. $[a(\xi,\eta)-a(x_0,y_0)]\,u'_\xi\,\Gamma''_{\xi x}$, für $\xi=x$, $\eta=y$ im allgemeinen von zweiter Ordnung unendlich werden. Jedoch ist sie an der Stelle $x=x_0$, $y=y_0$ erlaubt, da dann nach der Differentiation der Integrand als Funktion von x, y, ξ, η für $\xi=x$, $\eta=y$ höchstens von $(2-\alpha)$-ter Ordnung unendlich wird (a, b, c, f, g sind Hölder-stetig!) [6]. Führen wir die Differentiation $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ aus, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Beziehungen $\Gamma'_x=-\Gamma'_\xi$, $\Gamma'_{\xi x}=-\Gamma'_{\xi\xi}$ usw. aus (5) und (5a) — wir gestatten uns, statt x_0, y_0 nachträglich wieder x, y zu schreiben — die Relationen

$$
(6)\quad
\begin{cases}
\underline{u'_x(x,y)=B_1(x,y)+B_2(x,y)+C(x,y),}\\
B_1(x,y)=\iint\limits_B [u'_\xi H(x,y;\xi,\eta)+u'_\eta G(x,y;\xi,\eta)]\,d\xi\,d\eta,\\
B_2(x,y)=-\iint\limits_B \{[f(\xi,\eta)-f(x,y)]\,\Gamma''_{\xi\xi}+[g(\xi,\eta)-g(x,y)]\,\Gamma''_{\xi\eta}\}\,d\xi\,d\\
C(x,y)=\int\limits_C [v\Gamma''_{\xi\xi}-u(b\Gamma''_{\xi\xi}+c\Gamma''_{\xi\eta})+g\Gamma'_\xi]\,d\xi\\
\qquad\qquad +[v\Gamma''_{\xi\eta}+u(a\Gamma''_{\xi\xi}+b\Gamma''_{\xi\eta})-f\Gamma'_\xi]\,d\eta,\ [7]
\end{cases}
$$

mit den Abkürzungen

$$
(6a)\quad
\begin{aligned}
H(x,y;\xi,\eta)&=[a(\xi,\eta)-a(x,y)]\,\Gamma''_{\xi\xi}+[b(\xi,\eta)-b(x,y)]\,\Gamma''_{\xi\eta},\\
G(x,y;\xi,\eta)&=[b(\xi,\eta)-b(x,y)]\,\Gamma''_{\xi\xi}+[c(\xi,\eta)-c(x,y)]\,\Gamma''_{\xi\eta},
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma(x,y;\xi,\eta)=-\frac{\log[c(x,y)(x-\xi)^2-2b(x,y)(x-\xi)(y-\eta)+a(x,y)(y-\eta)^2]}{4\pi\sqrt{a(x,y)\,c(x,y)-b^2(x,y)}}.
$$

Eine ganz analoge Formel ergibt sich natürlich für u'_y. Ersichtlich erhält man die Formel für u''_y, indem man in (6) und (6a) Γ'_ξ durch Γ'_η, $\Gamma''_{\xi\xi}$ durch $\Gamma''_{\xi\eta}$, $\Gamma''_{\xi\eta}$ durch $\Gamma''_{\eta\eta}$ ersetzt. Diese beiden Formeln bilden offenbar ein System von zwei linearen Integralgleichungen für die zwei Funktionen u'_x und u'_y, wenn u, v irgendwelche in B einmal stetig derivierbare Lösungen des elliptischen Systems $L(u,v)=f$, $M(u,v)=g$ bedeuten [8].

---

[6]) Natürlich ist das nur eine Plausibilitätsbetrachtung. Zur Vermeidung störender Zwischenbetrachtungen haben wir den strengen Beweis für die Derivierbarkeit unter dem $\int$-Zeichen unterdrückt; er ist indessen leicht nach potentialtheoretischem Muster zu erbringen.

[7]) In dem Randintegral ist genauer $a=a(x,y)$, ..., $g=g(x,y)$ zu schreiben.

[8]) Zu diesen bemerkenswerten Integralgleichungen gibt es Analoga bei allen übrigen linearen elliptischen Problemen (Systeme höherer Ordnung, eine einzige

§ 2.

Anwendung auf die Bestimmung von Schranken für die Beträge der ersten Ableitungen der Lösungen.

Die Voraussetzungen des vorigen Paragraphen seien beibehalten. Mit $H_\alpha[a], H_\alpha[b], \ldots, H_\alpha[g]$ seien die „Hölder-Konstanten" von $a, b, \ldots, g$, d.h. die oberen Grenzen von $r^{-\alpha}|a(x,y)-a(\xi,\eta)|, \ldots, r^{-\alpha}|g(x,y)-g(\xi,\eta)|$ in B bezeichnet. Wir wenden die Integralgleichungen (6), (6a) usw. an auf den Beweis einiger Ungleichungen bezüglich der Lösungen u, v des Gleichungssystems

$$L(u,v)=f, \qquad M(u,v)=g.$$

Bezeichnet man mit $[u], [v], [f], [g]$ die oberen Grenzen von $|u|, |v|, |f|, |g|$ im Bereiche B, so gilt das

Lemma. Es gibt drei positive Konstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ von der Beschaffenheit, daß für alle im Bereiche B einmal stetig derivierbaren Lösungen u, v von $L=f$, $M=g$

$$|u_x'|, |u_y'| \leqq \beta_1 R^{-1}([u]+[v]) + \beta_2([f]+[g]) + \beta_3 R^\alpha (H_\alpha[f]+H_\alpha[g])$$

bei beliebigem $R \leqq d$ gilt, unter d den Abstand des Punktes (x,y) vom Rande C von B verstanden; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ können so gewählt werden, daß die Ungleichungen bestehen bleiben, wenn die Koeffizientenfunktionen a, b, c in genügend engen Grenzen stetig abgeändert werden, jedoch so, daß dabei die Hölder-Konstanten $H_\alpha[a], H_\alpha[b], H_\alpha[c]$ unter einer festen Grenze liegen.

Beweis. Ersetzt man die Koeffizienten $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ durch irgendwelche neue, von ihnen in ganz B genügend wenig differierende, so werden aus Stetigkeitsgründen die Ungleichungen (3) mit festen Konstanten γ bestehen bleiben (man beachte die Fußnote [5]). Bleiben überdies bei der stetigen Abänderung der Koeffizienten deren Hölder-Konstanten durchweg unter einer festen Grenze, so gelten nach (6a) in B Ungleichungen der Form

$$|H(x,y;\xi,\eta)|, \ |G(x,y;\xi,\eta)| < \text{konst.}\, r^{\alpha-2}. \tag{7}$$

Differentialgleichung beliebiger Ordnung); sie sind in jedem Falle Integralgleichungen für die höchsten vorkommenden Ableitungen. Auch der Weg, auf dem man zu ihnen gelangt, ist in allen Fällen derselbe (Übergang von konstanten zu variablen Koeffizienten, Differentiation bis zur höchsten in Frage kommenden Ordnung in der oben geschilderten Art und Weise). Sie scheinen zur Behandlung der feineren Fragen der Theorie — Eigenschaften der Lösungen unter geringsten Stetigkeitsvoraussetzungen — besonders geeignet zu sein. Ich hoffe darauf noch bei späterer Gelegenheit zurückzukommen.

Infolgedessen werden alle folgenden, lediglich auf (3) und (7) basierenden Abschätzungen gültig bleiben, wenn a, b, c den obigen Bedingungen gemäß variiert werden.

Um irgendeinen vorgegebenen inneren Punkt von B als Zentrum denke man sich eine ganz im Innern von B gelegene, sonst beliebige Kreisscheibe K_0, etwa mit dem Radius R_0. Offenbar ist das Lemma bewiesen, wenn wir die zu beweisende Ungleichung im Mittelpunkt von K_0 und mit $R = R_0$ als gültig erkannt haben. Wir beschränken uns auf die Punkte von K_0 und verstehen jetzt unter d den Abstand eines Punktes (ξ, η) von der Peripherie von K_0. Da nun u_x' und u_y' auf der abgeschlossenen Kreisscheibe K_0 stetig sind, wird das Maximum

$$M = \operatorname*{Max}_{(\xi,\eta) \text{ in } K_0} [d\,|u_\xi'|,\ d\,|u_\eta'|] \tag{8}$$

in einem inneren Punkte (x, y) von K_0 erreicht; d_0 sei der Abstand dieses nunmehr festgehaltenen Punktes von der Peripherie. Wir betrachten eine neue Kreisscheibe $r \leqq R_1$ mit $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$, $R_1 < d_0$; sie ist offenbar ganz in K_0 gelegen. Da nun für jeden Punkt (ξ, η) dieser Kreisscheibe $R_1 + d \geqq r + d \geqq d_0$ gilt, ist wegen (8)

$$|u_\xi'|,\ |u_\eta'| \leqq \frac{M}{d_0 - R_1} \text{ für } r \leqq R_1; \quad \operatorname{Max}\{|u_x'(x,y)|,\ |u_y'(x,y)|\} = \frac{M}{d_0}. \tag{8a}$$

Wir wenden jetzt die Integralformeln (6), (6a) und die analogen Formeln für u_y' auf die Kreisscheibe $r \leqq R_1$ an. Zunächst ergibt sich im Punkte (x, y) wegen (8a)

$$M \leqq d_0\{|B_1(x,y)| + |B_2(x,y)| + |C(x,y)|\}. \tag{9}$$

Für $|B_1|$ ergibt sich nun nach (7) und (8a)

$$|B_1(x,y)| \leqq \text{konst.} \frac{M}{d_0 - R_1} \cdot \iint\limits_{r \leqq R_1} r^{\alpha-2}\, d\xi\, d\eta = \text{konst.} \frac{M R_1^\alpha}{d_0 - R_1}. \tag{9a}$$

Weiter erhält man wegen (3) nach gleichem Muster

$$|B_2(x,y)| \leqq \text{konst.}\,(H_\alpha[f] + H_\alpha[g])\, R_1^\alpha. \tag{9b}$$

Was endlich das Peripherieintegral $C(x, y)$ betrifft, so ist auf dem Integrationswege $r = R_1$, $\xi = x + R_1 \cos\varphi$, $\eta = y + R_1 \sin\varphi$, somit nach (3)

$$|C(x,y)| \leqq \text{konst.}\, R_1^{-1}([u] + [v]) + \text{konst.}\,([f] + [g]). \tag{9c}$$

Setzt man noch $R_1 = \vartheta d_0$ $(\vartheta < 1)$, so folgt aus (9), (9a), (9b), (9c) und wegen $R_1 < d_0 \leqq R_0$

$$\begin{aligned} M \leqq \text{konst.} \frac{\vartheta^\alpha}{1-\vartheta} M &+ \text{konst.}\, R_0^{1+\alpha}(H_\alpha[f] + H_\alpha[g]) \\ &+ \text{konst.}\, \vartheta^{-1}([u] + [v]) + \text{konst.}\, R_0([f] + [g]). \end{aligned} \tag{10}$$

Hier kann man der Zahl ϑ einen solchen (festen) Wert erteilen, daß der erste Summand der rechten Seite $\leqq \frac{1}{2} M$ ausfällt. Durch Hinüberschaffen auf die linke Seite ergibt sich somit eine Ungleichung für M, die formal mit (10) übereinstimmt, wenn man dort rechts den ersten Summanden wegläßt. Bedenkt man endlich, daß im Mittelpunkte von K_0

$$|u'_x|, |u'_y| \leqq \frac{M}{R_0}$$

nach (8) ist, so ergibt sich in diesem Mittelpunkte die zu beweisende Ungleichung[8a]). Die schließlichen Konstanten β_ν hängen offenbar nur von den γ_ν in (3) und der konst. in (7) ab.

§ 3.

Beweis des Satzes über die Lösungen von (1).

Es sei $F(p, q)$ an der Stelle $p = p_0$, $q = q_0$ analytisch; u, v sei ein Lösungspaar des elliptischen Gleichungssystems (1b) mit $u'_x(x_0, y_0) = p_0$, $u'_y(x_0, y) = q_0$; die Funktionen u'_x, u'_y mögen in der Umgebung von x_0, y_0 einer Hölder-Bedingung mit dem Exponenten $\alpha \leqq 1$ genügen. Es ist dann zu zeigen, daß in der Umgebung dieses Punktes $u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$ existieren und stetig sind. Es seien K_0 und K_1 zwei hinreichend kleine Kreisscheiben um x_0, y_0 als Zentrum mit

$$K_1 < K_0.$$

1. Wir zeigen zuerst, daß u'_x, u'_y in K_1 beschränkte Differenzenquotienten haben; zur Abkürzung werde

$$(11) \qquad U_h(x, y) = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \qquad V_h(x, y) = \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}$$

gesetzt. Wir zeigen zunächst, daß U_h, V_h einem *linearen* elliptischen Gleichungssystem genügen. Es ist nämlich

$$(12) \qquad \begin{aligned} a_h(x, y)\frac{\partial U_h}{\partial x} + b_h(x, y)\frac{\partial U_h}{\partial y} - \frac{\partial V_h}{\partial y} &= 0, \\ b_h(x, y)\frac{\partial U_h}{\partial x} + c_h(x, y)\frac{\partial U_h}{\partial y} + \frac{\partial V_h}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

mit

$$(12a) \qquad \begin{aligned} a_h(x, y) &= \int_0^1 F''_{pp}(\vartheta p_2 + (1-\vartheta) p_1, \vartheta q_2 + (1-\vartheta) q_1)\, d\vartheta, \\ b_h(x, y) &= \int_0^1 F''_{pq}(\vartheta p_2 + (1-\vartheta) p_1, \vartheta q_2 + (1-\vartheta) q_1)\, d\vartheta, \\ c_h(x, y) &= \int_0^1 F''_{qq}(\vartheta p_2 + (1-\vartheta) p_1, \vartheta q_2 + (1-\vartheta) q_1)\, d\vartheta \end{aligned}$$

[8a]) Bezüglich dieser Abschätzungsweise durch „Hinüberschaffen" vgl. auch M. Gevrey, Ann. de l'École Normale **35** (1918), S. 129–190, insbes. S. 145–148.

und den Abkürzungen

$$(12b)\qquad \begin{aligned} p_1 &= u_x'(x,y), \quad & p_2 &= u_x'(x+h,y),\\ q_1 &= u_y'(x,y), \quad & q_2 &= u_y'(x+h,y). \end{aligned}$$

Zum Beweise ersetze man in (1b) x durch $x+h$ und ziehe die beiden so erhaltenen Gleichungen von den Gleichungen (1b) ab; mit Rücksicht auf die Abkürzungen (12b) ergibt sich dann

$$h\frac{\partial V_h}{\partial y} = F_p'(p_2,q_2) - F_p'(p_1,q_1) = \varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\vartheta)\,d\vartheta;$$
$$\varphi(\vartheta) = F_p'(\vartheta p_2 + (1-\vartheta)p_1,\ \vartheta q_2 + (1-\vartheta)q_1).$$

Mit Rücksicht auf die Abkürzungen (12a) ist nun

$$\int_0^1 \varphi'(\vartheta)\,d\vartheta = (p_2-p_1)a_h + (q_2-q_1)b_h,$$

woraus wegen $p_2-p_1 = h\frac{\partial U_h}{\partial x}$, $q_2-q_1 = h\frac{\partial U_h}{\partial y}$ die erste der Gleichungen (12) — die zweite ergibt sich natürlich analog — unmittelbar folgt.

Das System (12) ist formal für $h=0$ vom elliptischen Typ im Kreise K_0. Zufolge der Voraussetzung werden die Hölder-Konstanten H_α der Funktionen a_h, b_h, c_h (bezogen auf den Bereich K_0) für alle hinreichend kleinen $|h|$ unter einer festen Schranke gelegen sein. Infolgedessen ist das Lemma von § 2 auf alle Punkte x, y des kleineren Kreises K_1 anwendbar — man nehme für R etwa die Differenz der Radien von K_0 und K_1 — mit $f=g=0$. Dann ergibt sich alles in allem, daß u_x' und u_y' in K_1 einer Lipschitz-Bedingung genügen.

2. Wir wenden nun auf die Gleichungen (12) die Integralrelationen (6), (6a) an,

$$\frac{\partial U_h}{\partial x} = B_1(x,y;h) + C(x,y;h),$$

$$(13)\qquad B_1(x,y;h) = \iint_{K_1}\Big(\frac{\partial U_h}{\partial \xi}H_h + \frac{\partial U_h}{\partial \eta}G_h\Big)\,d\xi\,d\eta,$$

$$C(x,y;h) = \oint [V_h\Gamma_{\xi\xi}'' - U_h(b_h\Gamma_{\xi\xi}'' + c_h\Gamma_{\xi\eta}'')\,d\xi + [V_h\Gamma_{\xi\eta}'' + U_h(a_h\Gamma_{\xi\xi}'' + b_h\Gamma_{\xi\eta}'')]\,d\eta,$$
$$\Gamma = \Gamma_h(x,y;\xi,\eta).$$

Wegen des obigen Resultates existieren nach einem bekannten Lebesgueschen Satze $u_{\xi\xi}'' = \lim_{h=0}\frac{\partial U_h}{\partial \xi}$, $u_{\xi\eta}'' = \lim_{h=0}\frac{\partial U_h}{\partial \eta}$, ... fast überall in K_1. Die zweiten Ableitungen u'' sind ferner beschränkt in K_1. Nun werden $\frac{\partial^2\Gamma_h}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial^2\Gamma_h}{\partial\xi\,\partial\eta}$, ..., H_h, G_h

für alle hinreichend kleinen $|h|$ festen Ungleichungen der Form (3) und (7) genügen. Infolgedessen ist der Integrand von B_1 dem Betrage nach für alle hinreichend kleinen $|h|$ unter einer festen summierbaren Funktion konst. $r^{\alpha-2}$ gelegen. Ferner konvergiert der Integrand für $h \to 0$ fast überall in K_1. Man erhält daher nach einem bekannten Lebesgueschen Satze

$$\lim_{h=0} B_1(x, y; h) = B_1(x, y; 0) = \iint_{K_1} (u''_{\xi\xi} H_0 + u''_{\xi\eta} G_0)\, d\xi\, d\eta.$$ [9])

Nach geläufigen potentialtheoretischen Überlegungen erkennt man aus dieser Integraldarstellung, daß $B_1(x, y; 0)$ in K_1 stetig ist. Daß $C(x, y; 0) = \lim_{h=0} C(x, y; h)$ existiert, ist selbstverständlich, da $\lim_{h=0} V_h = v'_\xi$, $\lim_{h=0} U_h = u'_\xi$ nach Voraussetzung vorhanden und stetig sind. Ebenso ist klar, daß das Randintegral $C(x, y; 0)$ eine in K_1 stetige Funktion ist. Somit existieren nach (13) $\lim_{h=0} \frac{\partial U_h}{\partial x} = u''_{xx}$, ebenso natürlich u''_{xy} und u''_{yy} überall in K_1, und sie sind in K_1 stetig, w. z. b. w.

Anmerkung. Will man den Beweis im allgemeineren Falle (1) durchführen, so sind geringe Modifikationen erforderlich. An die Stelle des Gleichungssystems (1b) ist dann etwa das System

$$v'_x = -F'_q(x, \ldots, u'_y), \qquad v'_y = F'_p(x, \ldots, u'_y) - \Phi(x, y),$$

$$\Phi(x, y) = \int^{x} F'_u(x, \ldots, u'_y(x, y))\, dx \tag{1c}$$

zu setzen. Geht man hier zu den Differenzenquotienten (11) über, so erhält man statt des homogenen Gleichungssystems (12) ein inhomogenes, etwa mit den rechten Seiten f_h, g_h. Man erkennt leicht, daß f_h und g_h in K_0 einer Hölder-Bedingung genügen, und daß überdies ihre Hölder-Konstanten unter einer von h unabhängigen Schranke liegen. Bei der Anwendung der Integralgleichungen (6) mit (6a) bekommt man in (13) noch das entsprechende Glied $B_2(x, y; h)$. Analog wie bei B_1, jedoch einfacher, ergibt sich die Existenz von $\lim_{h=0} B_2 = B_2(x, y; 0)$. Ebenso ist diese letztere Funktion als stetig in K_1 zu erkennen. Alle übrigen Beweiseinzelheiten bleiben im wesentlichen unverändert.

---

[9]) Das Integral ist im Lebesgueschen Sinne zu verstehen.

(Eingegangen am 1. November 1928.)

Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung.

Von

J. A. Schouten in Delft und V. Hlavatý in Prag.

Einleitung.

Die allgemeinste lineare Übertragung wird bekanntlich erhalten[1]), indem man in den Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta v^\nu &= dv^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \\ \delta w_\lambda &= dw_\lambda - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} w_\lambda dx^\mu \end{aligned} \tag{1}$$

die Parameter $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ für die Ableitung der kovarianten Vektoren vollständig unabhängig von den für die Ableitung der kontravarianten Vektoren maßgebenden Parametern $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ wählt. Ein solcher Ansatz ist natürlich stets erlaubt, er ist aber zwecklos, wenn man die übliche Definition der kovarianten Vektoren beibehält, d. h. wenn man davon ausgeht, daß sich die Bestimmungszahlen der kontravarianten und kovarianten Vektoren beim Übergang von den Koordinaten $\overset{\nu}{x}$ zu den neuen Koordinaten $\overset{k}{x}$ folgendermaßen transformieren:

$$\begin{aligned} v^k &= A^k_\nu v^\nu; & w_i &= A^\lambda_i w_\lambda; \\ A^k_\nu &= \frac{\partial \overset{k}{x}}{\partial \overset{\nu}{x}}; & A^\lambda_i &= \frac{\partial \overset{\lambda}{x}}{\partial \overset{i}{x}}; \quad ^2) \\ \alpha, \ldots, \omega &= a_1, \ldots, a_n; & h, i, \ldots, m &= 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1]) J. A. Schouten, Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 56—81; Der Ricci-Kalkül, Julius Springer 1924 (hier weiter zitiert als R. K.), S. 62 u. f.

[2]) Es ist zu beachten, daß sowohl $a_1, \ldots, a_n$ als $1, \ldots, n$ Reihen fester unter sich verschiedenen Zeichen sind, dagegen $\alpha, \ldots, \omega$ und $h, \ldots, m$ *laufende* Indizes, die alle Zeichen der Reihe $a_1, \ldots, a_n$ bzw. $1, \ldots, n$ durchlaufen können. Es ist also z. B. niemals $a_1 = a_2$ oder $a_1 = 1$ und eine Gleichung von dieser Form hat gar keinen Sinn.

Denn in diesem Falle bestimmen n beliebige linear unabhängige kontravariante Vektorfelder $\overset{i}{v}$, $i = 1, \ldots, n$, in eineindeutiger Weise n kovariante Vektorfelder $\overset{k}{w}$, deren Bestimmungszahlen man bekanntlich erhält, indem man die zu den einzelnen Reihen in der Matrix der n Vektoren v gehörigen Minoren dividiert durch die Determinante. In der Tat transformieren sich diese Bestimmungszahlen wie (2) es verlangt. Geometrisch wird $\overset{k}{w}$ dargestellt durch die beiden begrenzenden E_{n-1} des Parallelepipeds der Vektoren v, die den Vektor $\overset{k}{v}$ schneiden. Bei der zur Übertragung gehörigen pseudoparallelen Bewegung der Vektoren v werden die Vektoren w mitgenommen und durch die zugrunde gelegte Übertragung, sagen wir A, der kontravarianten Vektoren ist also gleichzeitig eine Übertragung B der kovarianten Vektoren mitbestimmt, die bekanntlich dieselben Parameter $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ hat und analytisch durch die Forderung

$$d(v^\mu w_\mu) = (\delta v^\mu) w_\mu + v^\mu \delta w_\mu \tag{3}$$

eindeutig festgelegt ist. Der in (3) links auftretende Ausdruck $v^\lambda w_\lambda$ ist ein Skalar, d. i. eine bei (2) invariante Zahlgröße. Setzen wir fest, daß die formale Regel für die kovariante Differentiation eines Produktes auch für das Produkt eines Skalars mit einem Vektor gelten soll, so folgt daraus, daß das kovariante Differential eines Skalars mit dem gewöhnlichen Differential identisch ist, also

$$\delta(v^\mu w_\mu) = d(v^\mu w_\mu), \tag{4}$$

und es ergibt sich demnach aus (3) und (4)

$$\delta(v^\mu w_\mu) = (\delta v^\mu) w_\mu + v^\mu \delta w_\mu, \tag{5}$$

so daß die formalen Regeln für die Differentiation von Produkten jetzt auch für die kovariante Differentiation von Überschiebungen gelten. Führt man jetzt eine Übertragung B' der kovarianten Vektoren ein mit beliebigen anderen Parametern $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$, die natürlich ebenso eine Übertragung A' der kontravarianten Vektoren mit diesen selben Parametern mitbestimmt, so gibt es im ganzen vier Übertragungen A, B, A' und B'. Nun wäre es im höchsten Grade unpraktisch, gerade A und B' zusammenzufassen und als eine einzige Übertragung anzusehen, viel einfacher ist es hier, zu sagen, daß zwei voneinander unabhängige Übertragungen A, B mit $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ und A', B' mit $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ eingeführt sind. Die Verwendung von $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ neben $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ in einer einzigen Übertragung kommt also prinzipiell nur dort in Frage und ist auch tatsächlich nur dort eingeführt, wo die Überschiebung ihre Invarianz bei (2) verliert, indem an Stelle von (2) als Definitionsgleichung der kontravarianten und kovarianten Vektoren die Gleichung tritt[3])

[3]) R. K. S. 57, 66.

$$(6) \qquad v^k = A^k_\nu v^\nu; \qquad w_i = \tau^{-1} A^\nu_i w_\lambda,$$

wo τ eine beliebige Ortsfunktion ist[4]). Geht man von (6) aus, so lassen sich aus n kontravarianten Vektoren keine kovarianten Vektoren mehr bilden und die Übertragung der ersten bestimmt also keine Übertragung der letztgenannten mehr. Außerdem ist die Überschiebung $v^\mu w_\mu$ jetzt kein Skalar mehr, da die Invarianz bei (2) verloren gegangen ist. Wenn man nun folgende Voraussetzungen macht:

1. Eine gewöhnliche Größe (Skalar, Vektor, Affinor) und ihr kovariantes Differential sind Größen derselben Art;

2. das kovariante Differential ist eine lineare Funktion des Linienelementes;

3. für das kovariante Differential einer Summe und eines allgemeinen Produktes gelten die gewöhnlichen Regeln;

4. das kovariante Differential jeder Zahlgröße (auch der Größen der Art von $v^\mu w_\mu$) ist dem gewöhnlichen Differential gleich,

so läßt sich bekanntlich zeigen[5]), daß die allgemeinste lineare Übertragung durch Gleichungen von der Form (1) festgelegt werden kann. Dabei treten nun aber verschiedene Übelstände auf. Erstens verliert die kovariante Ableitung in bezug auf eine Überschiebung ihre einfachen formalen Eigenschaften, es ist z. B.

$$(7) \qquad \delta(v^\mu w_\mu) = (\delta v^\mu) w_\mu + v^\mu \delta w_\mu - C_{\mu\lambda}{}^\nu v^\lambda w_\nu dx^\mu,$$

$$(7a) \qquad C_{\mu\lambda}{}^\nu = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu}.$$ [6])

Zweitens folgt aus (7), daß $v^\mu w_\mu$ und $\delta(v^\mu w_\mu)$ sich nicht mehr in derselben Weise transformieren. Drittens lassen sich Größen konstruieren, die kovariante Vektoren *im alten Sinne* sind, und für welche also schon eine Übertragung mit $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ existiert, die aber dennoch ihre Ableitungen nicht mit den $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, sondern mit den $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ bilden. In der Tat ist z. B. $u_\lambda = \frac{w_\lambda}{v^\mu w_\mu}$ eine solche Größe, denn es ist

$$(8) \qquad \delta u_\lambda = \delta\{w_\lambda (v^\mu w_\mu)^{-1}\} = (\delta w_\lambda)(v^\mu w_\mu)^{-1} + w_\lambda d(v^\mu w_\mu)^{-1}$$
$$= du_\lambda - \Gamma'^\nu_{\lambda\mu} u_\nu dx^\mu.$$

Eigentlich treten also die neuen kovarianten Vektoren *neben* den gewöhnlichen kovarianten Vektoren auf, letztere haben aber nicht mehr die durch

---

[4]) Der Physiker könnte das Auftreten von τ etwa dahin deuten, daß man sich das Recht vorbehält, die kovarianten Maßeinheiten in einer von den kontravarianten Maßeinheiten unabhängigen und mit dem Ort wechselnden Weise abzuändern.

[5]) R. K. S. 63.

[6]) R. K. S. 67.

die Übertragung der kontravarianten Vektoren bestimmte Ableitung. Für die kontravarianten Vektoren gilt dasselbe. Diese Übelstände finden nun ihre Ursache darin, *daß von den nicht invarianten Zahlgrößen wie* $v^\mu w_\mu$ *vorausgesetzt wurde, daß ihr kovariantes Differential wie bei eigentlichen Skalaren dem gewöhnlichen Differential gleich ist.*

Läßt man diese Voraussetzung fallen, so ist es möglich eine kovariante Differentiation zu definieren, die in bezug auf Addition, Multiplikation und Überschiebung die gewöhnlichen formalen Eigenschaften besitzt und bei der überdies die erste der obengenannten Voraussetzungen nicht nur für gewöhnliche Größen, sondern für alle vorkommenden Größen zutrifft. Es zeigt sich, daß alles sich dabei zurückführen läßt auf die bekannte kovariante Differentiation der gewöhnlichen Größen und die kovariante Differentiation einer neuen Art von Größen, die wir *Pseudoskalare* nennen, und die eine einzige Bestimmungszahl haben, die sich folgendermaßen transformiert

$$\bar{\mathfrak{p}} = \tau(x)\,\mathfrak{p}. \tag{9}$$

Im § 3 werden die Beziehungen zur früheren Methode aufgedeckt und es wird gezeigt, daß die genannten Übelstände jetzt tatsächlich verschwunden sind. In den folgenden Paragraphen wird gezeigt, wie die Analysis sich auf verschiedene Weisen spezialisieren läßt. Von den zahlreichen hier vorliegenden Möglichkeiten sind nur solche gewählt, die sich an interessante, schon in der Literatur vorgekommene, Fragestellungen anknüpfen. In § 5 wird gezeigt, wie die Weylsche Geometrie entsteht bei Festlegung eines Pseudotensors und der Übertragung der Pseudoskalare. Geht τ über in die Funktionaldeterminante der Transformation der $\overset{\nu}{x}$ oder deren Absolutwert, so entsteht die Analysis der Dichten im Veblen-Thomasschen bzw. Weylschen Sinne, wie in den § 6 und 7 ausgeführt ist. § 8 bringt die Beziehungen der projektiven Parameter von T. Y. Thomas zur Übertragung bestimmter Vektordichten, während der letzte Paragraph dem Falle gewidmet ist, wo die Dichten neben den Pseudoskalaren auftreten.

§ 1.

Definition der Größen.

Ausgangspunkt bilden die Urvariablen $\overset{\nu}{x}$, $\nu = a_1, \ldots, a_n$, einer X_n und eine von diesen *unabhängige zusätzliche Variable* $\overset{a_0}{x}$, die sich folgendermaßen transformieren mögen:

$$\overset{k}{x} = \overset{k}{f}(\overset{\nu}{x}); \qquad \left|\frac{\partial \overset{k}{f}}{\partial \overset{\lambda}{x}}\right| \neq 0; \tag{10a}$$

$$\overset{0}{x} = \tau(\overset{\nu}{x})\,\overset{a_0}{x}; \qquad \tau(\overset{\nu}{x}) \neq 0. \tag{10b}$$

Die Funktionen $\overset{k}{f}$ und τ hängen nur von den Urvariablen $\overset{\nu}{x}$ ab, nicht von $\overset{a_0}{x}$. Die Funktion τ kann von den f unabhängig oder durch letztere bestimmt sein. Wir betrachten vorläufig nur den ersten Fall. In der X_{n+1} von $\overset{\nu}{x}$ und $\overset{a_0}{x}$ stellt (10) eine Transformation besonderer Art dar, (10a) ist in den X_n mit den Gleichungen $\overset{a_0}{x} = \text{konst.}$ die Gleichung einer allgemeinen Koordinatentransformation, während (10b) die Gleichung ist einer Änderung des längs der Parameterlinien von $\overset{a_0}{x}$ durch $\overset{a_0}{x}$ gegebenen Maßes mit einem Faktor, der für jede Parameterlinie einen bestimmten nur von den $\overset{\nu}{x}$ abhängigen Wert hat[7]).

Wir betrachten folgende über X_n definierten Systeme von Zahlen, die wir *Größen* nennen:

A. *Gewöhnliche Größen.*

1. Eine Größe mit n Bestimmungszahlen v^ν bzw. w_λ, die sich bei (10) folgendermaßen transformieren:

$$\bar{v}^k = A^k_\nu v^\nu, \tag{11}$$

bzw.

$$\bar{w}_i = A^\lambda_i w_\lambda, \tag{12}$$

heißt (gewöhnlicher) *kontravarianter* bzw. *kovarianter* Vektor.

2. Eine Größe mit einer einzigen bei (10) invarianten Bestimmungszahl heißt (gewöhnlicher) *Skalar*:

$$\bar{p} = p. \tag{13}$$

3. (Gewöhnliche) *kovariante, kontravariante* und *gemischte Affinoren* werden in bekannter Weise aus Vektoren aufgebaut. Ein Vektor ist ein Affinor ersten Grades, ein Skalar ein Affinor nullten Grades.

B. *Pseudogrößen.*

4. Eine Größe mit n Bestimmungszahlen $\mathfrak{v}^\nu$ bzw. $\mathfrak{w}_\lambda$, die sich bei (10) folgendermaßen transformieren:

$$\bar{\mathfrak{v}}^k = \tau^{\mathfrak{k}} A^k_\nu \mathfrak{v}^\nu \qquad (\mathfrak{k} \neq 0)\ [8]) \tag{14}$$

bzw.

$$\bar{\mathfrak{w}}_i = \tau^{\mathfrak{k}} A^\lambda_i \mathfrak{w}_\lambda \qquad (\mathfrak{k} \neq 0), \tag{15}$$

heißt *kontravarianter* bzw. *kovarianter Pseudovektor* von der Klasse $\mathfrak{k}$.

---

[7]) Die Gleichungen (10) liegen dem Wesen nach (es tritt nur $\log \overset{a_0}{x}$ auf statt $\overset{a_0}{x}$) den mit fünf Koordinaten arbeitenden modernen physikalischen Theorien zugrunde. Auch treten Gleichungen dieser Form auf bei T. Y. Thomas, A projective theory of affinely connected manifolds, Math. Ztschr. 25 (1926), S. 723—733, allerdings mit einem τ, das von den f abhängig ist. Vgl. auch Hlavatý, ebenda 28 (1928), S. 142—146

[8]) Der in $\tau^{\mathfrak{k}}$ auftretende Index $\mathfrak{k}$ ist ein Exponent.

5. Eine Größe mit einer einzigen Bestimmungszahl $\mathfrak{p}$, die sich bei (10) folgendermaßen transformiert:

$$\bar{\mathfrak{p}} = \tau^{\mathfrak{k}}\mathfrak{p} \qquad (\mathfrak{k} + 0)\ ^{9}), \tag{16}$$

heißt *Pseudoskalar* von der Klasse $\mathfrak{k}$ [10]).

6. *Kovariante, kontravariante und gemischte Pseudoaffinoren* entstehen aus den Pseudovektoren in derselben Weise, wie gewöhnliche Affinoren aus gewöhnlichen Vektoren. Sie unterscheiden sich also von den gewöhnlichen Affinoren durch das Auftreten eines Faktors bei der Transformation.

Gewöhnliche Affinoren bekommen *lateinische Kernbuchstaben*, Pseudogrößen *gotische Kernbuchstaben*, während gewöhnliche Skalare mit lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet werden. Ausdrücke, die *oben rechts* oder *unten rechts* Indizes tragen, aber sich nicht wie die Bestimmungszahlen einer Größe transformieren (z. B. $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$), werden stets mit *griechischen Kernbuchstaben* bezeichnet. Soll aus irgendeinem Grunde die Klasse mit angegeben werden, so geschieht dies durch einen Index *über* dem Buchstaben, z. B. $\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}$. Dementsprechend wird die $\mathfrak{k}$-te Potenz eines Pseudoskalars $\mathfrak{p}$ geschrieben $\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{p}}$, was in Übereinstimmung damit ist, daß $\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{p}}$ tatsächlich ein Pseudoskalar von der Klasse $\mathfrak{k}$ ist.

Die Gleichungen

$$(11\text{a})\quad v^k = A^k_{\nu} v^{\nu}; \qquad (11\text{b})\quad \bar{v}^k = v^k;$$

$$(12\text{a})\quad w_i = A^{\lambda}_{i} w_{\lambda}; \qquad (12\text{b})\quad \bar{w}_i = w_i;$$

$$(14\text{a})\quad \mathfrak{v}^k = A^k_{\nu} \mathfrak{v}^{\nu}; \qquad (14\text{b})\quad \bar{\mathfrak{v}}^k = \tau^{\mathfrak{k}} \mathfrak{v}^k;$$

$$(15\text{a})\quad \mathfrak{w}_i = A^{\lambda}_{i} \mathfrak{w}_{\lambda}; \qquad (15\text{b})\quad \bar{\mathfrak{w}}_i = \tau^{\mathfrak{k}} \mathfrak{w}_i$$

---

[9]) Im Ricci-Kalkül hat es sich als notwendig erwiesen, den Unterschied zwischen zwei Bezugssystemen nicht durch bloßen *Wechsel des Kernbuchstabens* ($\overset{\nu}{x} \to \overset{\nu}{y}$) oder durch Akzente ($\overset{\nu}{x} \to {}'\overset{\nu}{x}$), sondern durch den *Unterschied in der Art der Indizes* anzugeben ($\overset{\nu}{x} \to \overset{k}{x}$). Auf diesem Wege ist es möglich, Inkonsequenzen in der Bezeichnung der Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors zu vermeiden. Hält man an diesem Prinzip fest, so ist stets an der Art der Indizes zu sehen, zu welchem Bezugssystem die Bestimmungszahlen einer Größe gehören. Auch hier, wo wir $n+1$ Variablen haben, ließe sich dieses Prinzip durchführen, an Stelle von (16) erschiene dann aber $\mathfrak{p}^0 = \tau^{\mathfrak{k}}\mathfrak{p}^{a_0}$, eine vollkommen konsequente und berechtigte Schreibweise, die uns aber zwingen würde, durch die ganze Rechnung den Index a_0 mitzuschleppen, ein Index, der im Gegensatz z. B. zum Index ν in v^{ν}, nicht doch aus anderen Gründen notwendig ist. Wir haben also hier, wo es sich um einen Index handelt, der nur *einen* Wert annehmen kann, die einfachere Bezeichnung (16) eingeführt, die uns den weiteren Vorteil bringt, daß die Transformationen (11), (12), (14), (15) sich später in einfacher Weise zerlegen lassen in (11ab), (12ab), (14ab), (15ab).

[10]) Es ist zu beachten, daß ein Pseudoskalar, wie jede Größe, einen *invarianten* Begriff darstellt, sie hat aber *eine veränderliche* Bestimmungszahl, so wie jeder Vektor *mehrere veränderliche* Bestimmungszahlen hat.

zeigen, wie jede der Transformationen (11), (12), (14), (15) in dem hier betrachteten Falle, wo τ von der Koordinatentransformation unabhängig ist, sich zusammensetzt aus einer Transformation, die nur von (10a), und einer, die nur von (10b) abhängt. (Diese Zerlegung hat natürlich *nur* Sinn für den Fall, daß τ von den $\overset{k}{f}$ unabhängig ist.) Es ist aber zu beachten, daß alle Größen definiert sind in bezug auf (10a, b), nicht etwa *nur* in bezug auf (10a) oder *nur* in bezug auf (10b). Es soll bemerkt werden, daß (10a) und (10b) Spezialfälle von (10) darstellen, die entstehen, indem τ der Einheit bzw. die Transformation der $\overset{\nu}{x}$ der Identität gleich wird.

Zu jedem System von Variablen $\overset{\nu}{x}$, $\overset{a_0}{x}$ gehört ein System von n kontravarianten und n kovarianten gewöhnlichen Vektoren $\underset{\lambda}{e}^{\nu}$ bzw. $\overset{\nu}{e}_{\lambda}$, die *Maßvektoren*, die bei dieser Wahl der Urvariablen gerade die Bestimmungszahlen $1, 0, \ldots, 0; 0, 1, 0, \ldots, 0$ usw. haben:

$$\underset{a_i}{e}^{a_j} = \overset{a_j}{e}_{a_i} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{17}$$

und ein Pseudoskalar $\mathfrak{e}$ von der Klasse 1, der *Maßskalar*, dessen Bestimmungszahl bei dieser Wahl der $(n+1)$-ten Variablen gerade den Wert 1 hat. Bei der Transformation (10) treten andere Maßvektoren $\underset{i}{e}$, $\overset{k}{e}$ auf, deren neue Bestimmungszahlen $1, 0, \ldots, 0; 0, 1, 0, \ldots, 0$ usw. sind, und ein anderer Maßskalar mit der neuen Bestimmungszahl $'\bar{\mathfrak{e}} = 1$, alles in bezug auf das neue System, so daß

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{e}} &= \tau\, \mathfrak{e} = \tau, \\ '\mathfrak{e} &= \tau^{-1}\, '\bar{\mathfrak{e}} = \tau^{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Die zu $\overset{\nu}{x}$ gehörigen Maßvektoren sind gewöhnliche Vektoren, d. h. bei (10) bleiben sie fest und ihre Bestimmungszahlen transformieren sich in der üblichen Weise. Der Übergang von den $\underset{\lambda}{e}$, $\overset{\nu}{e}$ zu den neuen zu $\overset{k}{x}$ gehörigen Maßvektoren $\underset{i}{e}$, $\overset{k}{e}$ ist ein ganz anderer Prozeß, bei der sich die *Vektoren* ändern und die *Bestimmungszahlen* konstant (1 oder 0) bleiben. Ebenso bleibt der zu $\overset{a_0}{x}$ gehörige Pseudoskalar $\mathfrak{e}$ mit der Bestimmungszahl 1 bei (10) fest und bekommt die Bestimmungszahl τ; der Übergang zu dem neuen Pseudoskalar $'\mathfrak{e}$, der zu $\overset{0}{x}$ gehört, bei welchem Übergang die Bestimmungszahl gleich 1 bleibt, ist auch hier ein ganz anderer Prozeß.

Mit Hilfe von $\mathfrak{e}$ läßt sich jedem Pseudoaffinor der gewöhnliche Affinor zuordnen, der in bezug auf $\overset{\nu}{x}$, $\overset{a_0}{x}$ dieselben Bestimmungszahlen hat, z. B.:

$$v_{\lambda_\mu}^{\cdots\nu} = \bar{\mathfrak{e}}^{-t}\, \mathfrak{v}_{\lambda_\mu}^{\cdots\nu}. \tag{19}$$

Die in dieser Weise erhaltenen Größen, die sich natürlich beim Übergang von $\mathfrak{e}$ zu $'\mathfrak{e}$ ändern, sind manchmal bei der Rechnung nützlich als Hilfsgrößen.

Daß Summierung von zwei gleichartigen Größen und Multiplikation von zwei Größen wiederum zu einer Größe führt, ist evident. Auch ist es klar, daß jeder Pseudoaffinor der Klasse $\mathfrak{k}$ sich als Produkt einer gewöhnlichen Größe mit einem Pseudoskalar von der Klasse $\mathfrak{k}$ schreiben läßt. Wird in einem Produkt zweier Größen über einen oberen und einen unteren rechten Index summiert, so entsteht wiederum eine Größe. Eine durch einfache oder mehrfache Anwendung dieses Verfahrens entstehender Ausdruck heißt eine *Überschiebung*. Eine Überschiebung ist also eine *invariante Verknüpfung*[11]). Ordnen wir den gewöhnlichen Größen die Klasse 0 zu, so gilt offenbar die Regel, daß sowohl das Produkt wie die Überschiebung einer Größe von der Klasse $\mathfrak{k}$ mit einer Größe von der Klasse $\mathfrak{l}$ stets eine Größe von der Klasse $\mathfrak{k} + \mathfrak{l}$ ist.

§ 2.

Die allgemeine lineare Übertragung.

Es soll jetzt eine Übertragung hergestellt werden, die folgenden Forderungen genügt:

F_1. Für die im vorigen Paragraphen definierten Größen gibt es eine Differentiation, deren Resultat bei (10) invariant ist und die *kovariante Differentiation* genannt wird. (Als Symbol des kovarianten Differentiales benutzen wir das Zeichen δ.)

F_2. Die Bestimmungszahlen einer Größe und die ihres kovarianten Differentiales transformieren sich bei (10) in derselben Weise.

F_3. Das kovariante Differential ist eine homogene lineare nichtgebrochene Funktion des Linienelementes.

F_4. Für das kovariante Differential einer Summe und eines Produktes gelten die gewöhnlichen formalen Regeln.

F_5. Auch für das kovariante Differential einer Überschiebung gelten die gewöhnlichen formalen Regeln[12]).

Daß das kovariante Differential eines gewöhnlichen Skalars mit dem gewöhnlichen Differential identisch ist, braucht nicht vorausgesetzt zu werden; es folgt, wie wir weiter unten sehen werden, aus den aufgestellten Bedingungen.

---

[11]) Vgl. Fußnote [10]).

[12]) Statt F_5 kann man auch fordern, daß das kovariante Differential des Einheitsaffinors verschwindet: $\delta A_\lambda^\nu = 0$. Aus F_1 bis F_4 folgt nur, daß $A_\nu^\lambda \delta A_\lambda^\nu = 0$.

Ist v^ν ein beliebiger gewöhnlicher Vektor, so ist δv^ν infolge (F_2) und (F_3) von der Form

$$\delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu, \tag{20}$$

wo die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ n^3 beliebige, nur von den $\overset{\nu}{x}$ und nicht von der differenzierten Größe abhängigen, Parameter sind, die sich in der bekannten Weise transformieren. Ist jetzt α ein beliebiger gewöhnlicher Skalar, so ist infolge (20) und (F_4)

$$(\delta\alpha) v^\nu + \alpha \delta v^\nu = \delta(\alpha v^\nu) = d(\alpha v^\nu) + \alpha \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda dx^\mu = (d\alpha) v^\nu + \alpha \delta v^\nu, \tag{21}$$

und es geht daraus zunächst hervor, daß das kovariante Differential eines gewöhnlichen Skalars dem gewöhnlichen Differential gleich ist. Wendet man diese Eigenschaft auf eine Überschiebung $v^\mu w_\mu$ an, so folgt unter Berücksichtigung von (F_5) nach Umrechnung

$$\delta w_\lambda = dw_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} w_\nu dx^\mu. \tag{22}$$

Die Analysis der gewöhnlichen Affinoren, die zusammen mit den gewöhnlichen Skalaren ein in bezug auf Addition, Multiplikation, Überschiebung und Differentiation abgeschlossenes System bilden, wäre damit aus den aufgestellten Bedingungen abgeleitet.

Wir wenden uns jetzt zu den Pseudoaffinoren und Pseudoskalaren. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Pseudoskalar von der Klasse 1, so folgt aus (F_2) und (F_3), daß $\delta\mathfrak{p}$ sich jedenfalls auf die Form

$$\delta\mathfrak{p} = d\mathfrak{p} - \Gamma_\mu dx^\mu \mathfrak{p} \text{ [13]} \tag{23}$$

bringen läßt. Aus der zweiten Forderung ergibt sich die Transformation der Γ_μ bei (10)

$$\overline{\Gamma}_i = A^\lambda_i \Gamma_\lambda + \partial_i \log\tau; \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial \overset{i}{x}}, \tag{24}$$

die sich zusammensetzt aus

$$\Gamma_i = A^\lambda_i \Gamma_\lambda; \tag{24a}$$

$$\overline{\Gamma}_i = \Gamma_i + \partial_i \log\tau. \tag{24b}$$

(Diese Zerlegung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn τ von den f unabhängig ist.) Die $-\Gamma_\mu$ sind den Bestimmungszahlen in bezug auf $\overset{a_0}{x}, \overset{\nu}{x}$ des Vektors $e_\mu = \overset{-1}{e}(\partial_\mu \mathfrak{e} - \Gamma_\beta \overset{\beta}{e}_\mu \mathfrak{e})$ numerisch gleich. Zu $\overset{0}{x}$ gehört ein anderer Vektor $'e_\mu = \overset{-1}{'e}(\partial_\mu {}'\mathfrak{e} - \Gamma_\beta \overset{\beta}{e}_\mu {}'\mathfrak{e})$, dessen Bestimmungszahlen in bezug auf $\overset{0}{x}, \overset{k}{x}$ gleich $-\overline{\Gamma}_i = -A^\lambda_i \overline{\Gamma}_\lambda$ sind. Aus (24b) folgt

$$'e_i = e_i - \partial_i \log\tau. \tag{24c}$$

[13]) Das $-$-Zeichen ist nur verwendet, um später formale Übereinstimmung mit der Analysis der Dichten herbeizuführen.

Aus (F_4) folgt

$$\delta \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{p}} = d\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{p}} - \mathfrak{k}\,\Gamma_\mu\, dx^\mu \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{p}}, \tag{25}$$

die Differentiationsgleichung eines Pseudoskalars der Klasse $\mathfrak{k}$. Da, wie wir voraussetzten, die Überschiebung unabhängig ist von der Koordinatentransformation, so lassen sich die Γ_μ beliebig wählen, und es bestimmen dann die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ und Γ_μ zusammen die Übertragung. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Übertragung allen aufgestellten Forderungen genügt. Wir geben hier nur als Beispiel die Differentiale einiger Größen der Klasse $\mathfrak{k}$ an:

$$\begin{aligned}
\delta \mathfrak{v}^\nu &= d\mathfrak{v}^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,\mathfrak{v}^\lambda\, dx^\mu - \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}^\nu\,\Gamma_\mu\, dx^\mu;\\
\delta \mathfrak{w}_\lambda &= d\mathfrak{w}_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,\mathfrak{w}_\nu\, dx^\mu - \mathfrak{k}\,\mathfrak{w}_\lambda\,\Gamma_\mu\, dx^\mu;\\
\delta \mathfrak{U}_\lambda{}^\nu &= d\mathfrak{U}_\lambda{}^\nu + \Gamma^\nu_{\beta\mu}\,\mathfrak{U}_\lambda{}^\beta\, dx^\mu - \Gamma^\beta_{\lambda\mu}\,\mathfrak{U}_\beta{}^\nu\, dx^\mu - \mathfrak{k}\,\mathfrak{U}_\lambda{}^\nu\,\Gamma_\mu\, dx^\mu.
\end{aligned} \tag{26}$$

Zur Ableitung dieser Formeln kann man die Größen als Produkt einer gewöhnlichen Größe mit einem Pseudoskalar der Klasse $\mathfrak{k}$ schreiben und sodann (20), (22) und (25) anwenden. Ist einmal das kovariante Differential festgelegt, so ergibt sich der kovariante Differentialquotient aus der Forderung

$$\delta = dx^\mu \nabla_\mu, \tag{27}$$

und es ist also z. B.

$$\nabla_\mu \mathfrak{U}_\lambda{}^\nu = \partial_\mu \mathfrak{U}_\lambda{}^\nu + \Gamma^\nu_{\beta\mu}\,\mathfrak{U}_\lambda{}^\beta - \Gamma^\beta_{\lambda\mu}\,\mathfrak{U}_\beta{}^\nu - \mathfrak{k}\,\mathfrak{U}_\lambda{}^\nu\,\Gamma_\mu; \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{28}$$

Bilden wir die kovarianten Ableitungen der Maßvektoren

$$\nabla_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda = \partial_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\overset{\alpha}{e}_\lambda; \qquad \nabla_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda = \partial_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda - \Gamma^\gamma_{\lambda\mu}\overset{\nu}{e}_\gamma, \tag{29}$$

so stellt sich heraus, daß die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ nicht nur Parameter der Übertragung sind, sondern außerdem den Bestimmungszahlen der $2n$ dem Bezugssystem $\overset{\nu}{x}$ zugeordneten Affinoren $\nabla_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda$ und $-\nabla_\mu \overset{\nu}{e}_\lambda$ eben in bezug auf dieses System selbst numerisch gleich sind. In derselben Weise lehrt

$$\nabla_\mu \mathfrak{e} = \partial_\mu \mathfrak{e} - \Gamma_\beta \overset{\beta}{e}_\mu \mathfrak{e} = \mathfrak{e}\, e_\mu, \tag{30}$$

daß die $-\Gamma_\mu$ den Bestimmungszahlen des zu $\overset{a_0}{x}$ gehörigen Pseudovektors $\nabla_\mu \mathfrak{e}$ in bezug auf das System der $\overset{\nu}{x}$ numerisch gleich sind. Dies ist aber nichts Neues, derselbe Unterschied in der Auffassung tritt z. B. auf, wenn man die n Systeme von Bestimmungszahlen $1, 0, \ldots, 0$; $0, 1, 0, \ldots, 0$ usw. das eine Mal als Bestimmungszahlen der kontravarianten Maßvektoren $\overset{\nu}{e}_\lambda$ auffaßt, die für jede Wahl des Koordinatensystems eine nur von dieser Wahl abhängende Richtung und Größe haben, ein anderes Mal als Bestimmungszahlen der ebenso von der Wahl des Koordinatensystems abhängenden kovarianten Maßvektoren $\overset{\nu}{e}_\lambda$, ein drittes Mal als Bestimmungszahlen des festen Einheitsaffinors A^ν_λ, oder gar schließlich als n Systeme von konstanten Skalaren, die nichts mit gerichteten Größen zu tun haben. Hier wie dort

sind sämtliche Auffassungen gleichberechtigt, und es hängt von dem zufällig verfolgten Spezialzweck ab, welche vorzuziehen ist. Jedenfalls ist aber auf die Transformationsweise dieser Systeme streng zu achten, damit die verschiedenen Fälle nicht miteinander verwechselt werden.

§ 3.

Vergleichung mit der Übertragung mit $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ und $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$.

Vergleichen wir jetzt die durch $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ und Γ_{μ} festgelegte Übertragung mit der früheren aus (4), (5) und (6) abgeleiteten in der Einleitung angedeuteten. Die kovarianten Vektoren dort treten auch jetzt auf, heißen aber jetzt kovariante Pseudovektoren von der Klasse -1, sie stehen wie dort *neben* den gewöhnlichen kovarianten Vektoren, letztere haben aber jetzt die durch die Übertragung der kontravarianten Vektoren bestimmte Ableitung. An Stelle der Differentiationsgleichungen (1) tritt jetzt

$$\begin{aligned} \delta v^{\nu} &= d v^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} v^{\lambda} dx^{\mu}, \\ \delta \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\lambda} &= d \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\nu} dx^{\mu} + \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\lambda} \Gamma_{\mu} dx^{\mu}, \end{aligned} \tag{31}$$

so daß $A^{\nu}_{\lambda} \Gamma_{\mu}$ dieselbe Rolle spielt wie $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ in (7). Aus der Voraussetzung (4) folgte nun früher notwendig (7), also für $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \neq \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ die Ungültigkeit von (F_5). Läßt man aber, wie es jetzt geschehen ist, (4) fallen, so kann man (F_5) fordern und an Stelle von (7) tritt dann

$$\delta (v^{\mu} \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\mu}) = (\delta v^{\mu}) \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\mu} + v^{\mu} \delta \overset{-1}{\mathfrak{w}}_{\mu}. \tag{32}$$

Nebenbei hat sich herausgestellt, daß $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ nur die besondere Form $A^{\nu}_{\lambda} \Gamma_{\mu}$ haben kann[14]). Dies bedeutet, daß nur der inzidenzinvariante Fall[15]) übrigbleibt und der allgemeinere Fall überhaupt ausscheidet. Daß im R. K. $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ allgemeinere Werte annehmen konnte, liegt nur daran, daß dort (F_5) nicht vorausgesetzt wurde. Daß die Möglichkeiten für $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ durch (F_5) eine Einschränkung erfahren müssen, ist ja auch geometrisch leicht einzusehen. Die in der Einleitung erwähnten Vektoren $\overset{i}{v}$ bestimmen zwar keine n kovarianten Pseudovektoren von der Klasse -1, sie bestimmen aber die $(n-1)$-Richtungen dieser Pseudovektoren. Die pseudoparallele Verschiebung

---

[14]) Es ist zu beachten, daß im R. K. die $C^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$, die sich nicht wie die Bestimmungszahlen eines Affinors transformieren, als Bestimmungszahlen eines „uneigentlichen" Affinors aufgefaßt sind. Dementsprechend erscheinen dort auch die C_{μ}, die gemäß (24) genau mit unseren Γ_{μ} korrespondieren, als Bestimmungszahlen eines uneigentlichen Vektors. In unserer Auffassung sind die C_{μ} Bestimmungszahlen eines den Variablen $\overset{a_0}{x}$ zugeordneten Vektors $-e_{\mu}$, der beim Übergang zu $\overset{0}{x}$ durch einen anderen Vektor $-{}'e_{\mu}$ ersetzt wird, oder auch eines Pseudovektors $-\nabla_{\mu} e$, der bei demselben Übergang durch $-\nabla_{\mu}{}' e$ ersetzt wird (vgl. § 2, Schluß).

[15]) R. K. S. 67.

der kontravarianten Vektoren bestimmt also jedenfalls eine pseudoparallele Verschiebung der $(n-1)$-Richtungen dieser Pseudovektoren, d. h. die Übertragung wird bei Voraussetzung von (F_5) jedenfalls inzidenzinvariant.

Wir haben in dieser Weise den Ausdruck $C_{\mu\,\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\nu}$, allerdings unter einschränkenden Bedingungen, zurückgewonnen, aber nur um denselben jetzt *endgültig zu bannen*. Es ist ja jetzt, wo die $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ sowohl für gewöhnliche kovariante als für gewöhnliche kontravariante Vektoren gelten, zwecklos, die für kovariante Pseudovektoren von der Klasse -1 sowie für kontravariante Pseudovektoren von der Klasse $+1$ gültigen Parameter $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - A_{\lambda}^{\nu}\Gamma_{\mu}$ extra mit $\Gamma_{\lambda\mu}^{\prime\nu}$ zu bezeichnen, man könnte ebensogut ein neues Zeichen einführen für die zu den Pseudovektoren von der Klasse $+\mathfrak{k}$ bzw. $-\mathfrak{k}$ gehörigen Parameter. Es verschwinden also nicht nur die nicht inzidenzinvarianten Übertragungen ($C_{\mu\,\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\nu}$ = allgemein), sondern auch die inzidenzinvarianten nicht überschiebungsinvarianten ($C_{\mu\,\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\nu} = C_{\mu} A_{\lambda}^{\nu}$) als gesondert zu behandelnde Fälle aus der Theorie der linearen Übertragungen, denn überall wo letztere scheinbar auftreten, bedeutet dies nur, daß *neben* den gewöhnlichen kovarianten und kontravarianten Vektoren noch Pseudovektoren zu unterscheiden sind. Die Theorie dieser Pseudovektoren läßt sich aber in viel einfacherer Weise mit Hilfe von (26) behandeln. Jede lineare Übertragung ist also fortan überschiebungsinvariant, d. h. das distributive Gesetz der kovarianten Differentiation gilt uneingeschränkt, auch für Überschiebungen.

§ 4.

Der integrable Fall.

Für die Größe $(\overset{1}{\delta}\overset{2}{\delta} - \overset{2}{\delta}\overset{1}{\delta})\,\mathfrak{p}$ ergibt sich aus (23)

$$(\overset{1}{\delta}\overset{2}{\delta} - \overset{2}{\delta}\overset{1}{\delta})\,\mathfrak{p} = -2\mathfrak{p}\,\overset{1}{d}x^{\omega}\,\overset{2}{d}x^{\mu}\,\partial_{[\omega}\Gamma_{\mu]}, \tag{33}$$

woraus hervorgeht, daß

$$W_{\omega\mu} = 2\partial_{[\omega}\Gamma_{\mu]} \tag{34}$$

ein gewöhnlicher Bivektor ist. Man überzeugt sich leicht, daß

$$2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]}\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}\,W_{\omega\mu} + 2S_{\omega\,\mu}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}\nabla_{\alpha}\mathfrak{p}, \qquad S_{\omega\,\mu}^{\cdot\,\cdot\,\alpha} = \Gamma_{[\omega\mu]}^{\alpha}, \tag{35a}$$

$$\nabla_{[\xi}W_{\omega\mu]} = 0. \tag{35b}$$

Das Verschwinden dieses Bivektors $W_{\omega\mu}$ bedeutet, daß sich $\mathfrak{p}$ bei pseudoparalleler Verschiebung im Sinne der durch (23) definierten Übertragung (d. h. also Verschiebung mit $\delta\mathfrak{p} = 0$) *längs einer geschlossenen Kurve nicht ändert*. Stetigkeit aller in Betracht kommenden Funktionen ist dabei natürlich wie immer vorausgesetzt. In dem erwähnten Falle gibt es also *„konstante"* Pseudoskalarfelder. Es ist zu beachten, daß für ein solches konstantes Feld $\mathfrak{p}$ zwar $\delta\mathfrak{p} = 0$, aber im allgemeinen $d\mathfrak{p} \neq 0$ ist.

§ 5.
Die Weylsche Übertragung.

Wir führen einen kovarianten Pseudotensor $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ n-ten Ranges von der Klasse $+1$ ein, fordern, daß die Übertragung symmetrisch sei und daß

$$V_\omega \mathfrak{g}_{\lambda\mu} = 0, \tag{36}$$

und legen überdies in irgendeiner Weise die Übertragung der Pseudoskalare, d. h. also die Γ_μ fest. Dann folgt aus (36), (22) und (23)

$$\partial_\omega \mathfrak{g}_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\lambda\omega}\mathfrak{g}_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\omega}\mathfrak{g}_{\lambda\nu} - \Gamma_\omega \mathfrak{g}_{\lambda\mu} = 0, \tag{37}$$

[16])

woraus man leicht ableitet

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathfrak{g}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \mathfrak{g}_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2}(\Gamma_\mu A^\nu_\lambda + \Gamma_\lambda A^\nu_\mu - \mathfrak{g}^{\nu\alpha}\Gamma_\alpha \mathfrak{g}_{\lambda\mu}), \tag{38}$$

wo $\mathfrak{g}^{\alpha\nu}$ durch die Forderung

$$\mathfrak{g}^{\alpha\nu}\mathfrak{g}_{\lambda\alpha} = A^\nu_\lambda \tag{39}$$

bestimmt ist. Bei der Transformation (10) wird infolge (15) und (24)

$$\bar{\mathfrak{g}}_{ij} = \tau A^{\lambda\mu}_{ij}\mathfrak{g}_{\lambda\mu}, \tag{40a}$$

$$\overline{\Gamma}_i = A^\lambda_i \Gamma_\lambda + \partial_i \log\tau. \tag{40b}$$

Wir verwenden jetzt den zu $\overset{a_0}{x}$ gehörigen Maßskalar $\mathfrak{e}$ und bilden aus $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ den gewöhnlichen Tensor $g_{\lambda\mu}$, der in bezug auf $\overset{a_0}{x}$ dieselben Bestimmungszahlen hat wie $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$

$$\mathfrak{g}_{\lambda\mu} = \mathfrak{e} g_{\lambda\mu}. \tag{41}$$

Beim Übergang zu dem zu $\overset{0}{x}$ gehörigen Maßskalar $'\mathfrak{e}$ folgt für den neuen gewöhnlichen Tensor $'g_{\lambda\mu}$, der in bezug auf $\overset{0}{x}, \overset{k}{x}$ dieselben Bestimmungszahlen hat wie $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$,

$$'g_{\lambda\mu} = \tau g_{\lambda\mu}. \tag{42}$$

Aus (36) und (41) folgt

$$V_\omega g_{\lambda\mu} = V_\omega \mathfrak{e}^{-1}\mathfrak{g}_{\lambda\mu} = -\mathfrak{e}^{-2}(V_\omega \mathfrak{e})\mathfrak{g}_{\lambda\mu} = \Gamma_a \overset{a}{e}_\omega g_{\lambda\mu}, \tag{43}$$

während aus (40b) hervorgeht, daß beim Übergang von $g_{\lambda\mu}$ zu $'g_{\lambda\mu}$

$$\overline{\Gamma}_\lambda = \Gamma_\lambda + \partial_\lambda \log\tau. \tag{44}$$

Nun lassen sich die $-\Gamma_\lambda$, wie wir auf S. 422 sahen, auffassen als die Bestimmungszahlen eines zu $\overset{a_0}{x}$ gehörigen gewöhnlichen Vektors Q, der beim

---

[16]) Eben in dieser Weise tritt die Weylsche Übertragung auf bei M. A. H. Newman, A gauge-invariant tensorcalculus, Proc. Roy. Soc. **116** (1927), p. 603–623, 614. Allgemeiner geht Newman aus von einer Finslerschen Maßbestimmung und deutet (10b) als Gleichung einer lokal für alle Richtungen gleichen Maßänderung.

Übergang zu $\overset{0}{x}$ ersetzt wird durch den Vektor $'Q$ mit den Bestimmungszahlen $-{}'\Gamma_\lambda$, so daß (44) gleichbedeutend ist mit

$$'Q_\lambda = Q_\lambda - \partial_\lambda \log \tau, \tag{45}$$

(43) mit

$$\nabla_\omega g_{\lambda\mu} = -Q_\omega g_{\lambda\mu}, \tag{46}$$

und (37) und (38) mit

$$\partial_\omega g_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\lambda\omega} g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\omega} g_{\lambda\nu} + Q_\omega g_{\lambda\mu} = 0, \tag{37a}$$

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{1}{2}(Q_\mu A^\nu_\lambda + Q_\lambda A^\nu_\mu - g^{\nu\alpha} Q_\alpha g_{\lambda\mu}), \tag{38a}$$

da die gewöhnlichen Differentialquotienten des Faktors ε in (41) verschwinden. (37a), (38a), (45) und (46) sind aber die Gleichungen einer Weylschen Übertragung, und es gilt also der Satz:

Wird ein Pseudotensor $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ n-ten Ranges von der Klasse $+1$ eingeführt, wird gefordert, daß

$$\nabla_\omega \mathfrak{g}_{\lambda\mu} = 0,$$

und werden überdies die Parameter Γ_μ der Übertragung der Pseudoskalare in irgendeiner Weise vorgegeben, so ist hierdurch eine Übertragung bestimmt, die für die gewöhnlichen Größen eine Weylsche ist.

Betrachten wir jetzt die Grundgleichungen (10) einmal von einem anderen Gesichtspunkt aus. Zunächst sei nur (10a) eingeführt und vorübergehend, nur zum Zwecke dieser Betrachtung seien Skalare, Vektoren und Affinoren definiert in bezug auf (10a). Sodann betrachten wir neben diesen *festen* Größen auch *veränderliche* Größen, deren Veränderung darin besteht, daß sie alle zugleich einen Faktor τ^t bekommen. Die Bestimmungszahlen dieser veränderlichen Größen verhalten sich nun genau so wie die der Pseudogrößen von der Klasse $\mathfrak{k}$, die auftreten würden, wenn wir (10) zugrunde gelegt hätten. Die Bestimmungszahlen einer Pseudogröße von der Klasse $\mathfrak{k}$ lassen sich also auffassen als Bestimmungszahlen einer veränderlichen gewöhnlichen Größe unter Zugrundelegung von (10a) allein. Von diesem Gesichtspunkte aus sind die $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ die Bestimmungszahlen eines veränderlichen gewöhnlichen Tensors, die $-\Gamma_\lambda = Q_\lambda$ die eines (in anderer Weise) veränderlichen gewöhnlichen Vektors und die Gleichungen (37a), (38a), (45) und (46) werden unmittelbar gleichbedeutend mit (37), (38), (44) und (43).

§ 6.

Analysis der Dichten.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, wo $\tau(x)$ von den $\overset{k}{f}(x)$ abhängt. Die Zerlegungen (14a, b), (15a, b) und (24a, b) haben von jetzt an keinen Sinn mehr. Es sei zunächst der Fall betrachtet, wo

$$\tau(x) = \Delta^{-1}; \quad \Delta = |A^k_\nu| \neq 0. \tag{47}$$

Ist $\tau(x)$ in dieser Weise spezialisiert, so wollen wir die Pseudoaffinoren bzw. Pseudoskalare *Affinordichten* bzw. *Dichten* nennen und das Wort Klasse durch das übliche Wort *Gewicht* ersetzen. Dies sind die Dichten im Veblenschen Sinne. Ist $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ ein kovarianter n-Vektor, so ist

$$w_{i_1 \dots i_n} = A^{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{[i_1 \dots i_n]} w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}, \tag{48}$$

so daß

$$w_{1 \dots n} = n!\, A^{a_1 \dots a_n}_{[1 \dots n]} w_{a_1 \dots a_n} \quad \text{(nicht summieren!)}^{16a}), \tag{49}$$

und die Bestimmungszahl $w_{a_1 \dots a_n}$ ist also auch Bestimmungszahl einer Dichte vom Gewicht $+1$ im Veblenschen Sinne. In dieser Weise korrespondieren also kovariante n-Vektoren mit Dichten vom Gewicht $+1$, kontravariante in derselben Weise mit solchen vom Gewicht -1. Nun ist

$$\begin{aligned} \delta w_{\lambda_1 \dots \lambda_n} &= dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - n\, \Gamma^a_{[\lambda_n | \mu |}\, w_{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}]a}\, dx^\mu \\ &= dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} - \Gamma^a_{a\mu}\, w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}\, dx^\mu, \end{aligned} \tag{50}$$

und die pseudoparallele Verschiebung des n-Vektors $w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ ist also festgelegt durch die Gleichung

$$dw_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \Gamma^a_{a\mu}\, w_{\lambda_1 \dots \lambda_n}\, dx^\mu, \tag{51a}$$

woraus für die Bestimmungszahl $w_{a_1 \dots a_n}$ folgt

$$dw_{a_1 \dots a_n} = \Gamma^a_{a\mu}\, w_{a_1 \dots a_n}\, dx^\mu. \tag{51}$$

Da aber $w_{a_1 \dots a_n}$ auch Bestimmungszahl einer Dichte vom Gewicht $+1$ ist, ist hierdurch eine pseudoparallele Verschiebung für solche Dichten bestimmt, die analytisch durch die Gleichung

$$d\mathfrak{p} = \Gamma^a_{a\mu}\, \mathfrak{p}\, dx^\mu \tag{52}$$

festgelegt werden kann.

Die zugehörige Übertragung ist durch die Gleichungen (20), (22) zusammen mit

$$\delta\mathfrak{p} = d\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\, \Gamma^a_{a\mu}\, dx^\mu \tag{53}$$

charakterisiert. Der Vergleich mit (23) lehrt, daß hier also

$$\Gamma_\mu = \Gamma^a_{a\mu} \tag{54}$$

ist.

Wählt man statt (47)

$$\tau(x) = |\Delta|^{-1}, \tag{55}$$ [16b])

[16a]) $w_{a_1 \dots a_n}$ ist eine einzige Zahl; vgl. Fußnote [2]).

[16b]) Die $|\ |$ bedeuten hier, daß der Absolutwert zu bilden ist.

so gelangt man zu den Dichten im Weylschen Sinne. Da

$$|w_{1\ldots n}| = |\Delta|^{-1} |w_{a_1\ldots a_n}|, \tag{56}$$

ist $|w_{a_1\ldots a_n}|$ eine solche Dichte vom Gewicht $+1$. Wir betrachten nun ein Gebiet der X_n, wo der n-Vektor $E_{\lambda_1\ldots\lambda_n} = \overset{a_1}{e}_{(\lambda_1}\ldots\overset{a_n}{e}_{\lambda_n)}$ überall denselben Schraubsinn hat[17]). Da $\Delta \neq 0$ ist, bleibt diese Eigenschaft bei allen Koordinatentransformationen erhalten. Das Hilfsfeld $w_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ wählen wir nun so, daß es in allen Punkten des betrachteten Gebietes denselben Schraubsinn als $E_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ hat. $w_{a_1\ldots a_n}$ ist dann in allen Punkten >0, es kann aber Koordinatentransformationen geben, wodurch $w_{1\ldots n}$ in allen Punkten *gleichzeitig* <0 wird. Für *alle* Koordinatensysteme bleibt aber gelten, daß die pseudoparallele Verschiebung des n-Vektors $w_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ durch das Verschwinden von $dw_{\lambda_1\ldots\lambda_n} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} w_{\lambda_1\ldots\lambda_n} dx^{\mu}$ charakterisiert ist. Ist also $w_{a_1\ldots a_n}$ im betrachteten Gebiete >0, so ist bei pseudoparalleler Verschiebung auch

$$d|w_{a_1\ldots a_n}| - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} |w_{a_1\ldots a_n}| dx^{\mu} = 0. \tag{57}$$

Wäre aber $w_{a_1\ldots a_n}$ negativ, *so würde dieselbe Gleichung gelten*, da jeder einzelne Term mit -1 multipliziert würde. Daraus geht aber hervor, daß auch bei Zugrundelegung von (55) die Gleichung (53) ihre Gültigkeit behält. Es liegt dies eben nur daran, daß wir von selbst gezwungen sind, keine Transformationen (48) zuzulassen, die das Koordinatensystem innerhalb des betrachteten Gebietes mit Singularitäten belasten. Hierin liegt der Grund der Tatsache, daß die Untersuchungen über die Analysis der Weylschen Dichten von Hlavatý[18]), der (bis auf Vorzeichenwechsel des Exponenten) von (55) ausgeht, und von Veblen-T. Y. Thomas[19]), die (47) als Ausgangspunkt nehmen, in den wesentlichen Punkten übereinstimmen. Bei beiden Annahmen gelten für Größen vom Gewicht $\mathfrak{k}$ Gleichungen wie [vgl. (26)]

$$\begin{aligned}
\delta \mathfrak{v}^{\nu} &= d\mathfrak{v}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \mathfrak{v}^{\lambda}\ dx^{\mu} - \mathfrak{k}\, \mathfrak{v}^{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} dx^{\mu};\\
\delta \mathfrak{w}_{\lambda} &= d\mathfrak{w}_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \mathfrak{w}_{\nu}\ dx^{\mu} - \mathfrak{k}\, \mathfrak{w}_{\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} dx^{\mu};\\
\delta \mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu} &= d\mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu} \mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \beta} dx^{\mu} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} \mathfrak{U}_{\beta}^{\ \nu} dx^{\mu} - \mathfrak{k}\, \mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} dx^{\mu}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Zur Ableitung dieser Formeln kann man die Größen als Produkt einer gewöhnlichen Größe mit einer Dichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ schreiben und sodann (20), (22) und (53) anwenden.

---

[17]) Diese Forderung ist überhaupt stets aufzustellen, wo man Differentialgeometrie mit reellen Koordinaten treiben will, denn kontinuierlicher Übergang zu einem anderen Schraubsinn verlangt Durchgang durch einen Punkt, wo $E_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ Null wird, d. h. wo das Koordinatennetz eine singuläre Stelle aufweist.

[18]) Théorie des densités dans le déplacement général, Ann. di Mat. IV, 5 (1927/28), p. 73—83.

[19]) Extensions of relative tensors, Trans. Am. Math. Soc. 26 (1924), p. 373—377.

§ 7.

Der integrable Fall für $\tau = \Delta^{-1}$ oder $= |\Delta|^{-1}$.

Der Bivektor $W_{\omega\mu}$ in (34) geht hier infolge (54) über in

$$W_{\omega\mu} = 2\,\partial_{[\omega}\Gamma^{\alpha}_{|\alpha|\mu]} = -R_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}}, \tag{59}$$

wo $R_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\dot{\lambda}}$ die Krümmungsgröße der Übertragung der gewöhnlichen Größen ist[20]). Da aber $R_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\dot{\lambda}}$ dann und nur dann verschwindet, wenn die Übertragung inhaltstreu ist[21]), ist es bei jeder inhaltstreuen Übertragung möglich, eine Dichte so zu wählen, daß $\delta\mathfrak{p}$ für jede Richtung von dx^{ν} verschwindet[22]). Insbesondere gilt dies für jede Riemannsche Übertragung, die ja stets inhaltstreu ist. In der Tat ist dort z. B. $g = |g_{\lambda\mu}|$ Bestimmungszahl einer Dichte vom Gewicht $+2$, deren *kovariantes* Differential verschwindet:

$$dg - 2g\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\,dx^{\mu} = 0. \tag{59a}$$

Dies ist der eigentliche Grund der längst erkannten Tatsache, daß man in einer Riemannschen Geometrie stets jede Rechnung mit Dichten durch eine vollkommen äquivalente ohne Dichten ersetzen kann. Die Potenzen der Dichte mit der Bestimmungszahl g können nämlich als Konstanten bei der kovarianten Differentiation überall vor dem Differentiationssymbol geschafft und hinwegdividiert werden. Bei einer Weylschen Geometrie ist dies nicht mehr der Fall.

§ 8.

Die projektiven Parameter in A_n von T. Y. Thomas.

Der Parameter s auf einer geodätischen Linie in A_n kann bekanntlich so gewählt werden, daß sich die rechte Seite der Differentialgleichung auf Null reduziert:

$$\frac{\delta\,dx^{\nu}}{ds\;ds} = \frac{d\;dx^{\nu}}{ds\;ds} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\frac{dx^{\lambda}\,dx^{\mu}}{ds\;ds} = 0. \tag{60}$$

Bei den bahntreuen Transformationen

$$'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda}\,p_{\mu} + A^{\nu}_{\mu}\,p_{\lambda} \tag{61}$$

bleiben die geodätischen Linien erhalten, die rechte Seite von (60) bleibt aber nur dann Null, wenn man gleichzeitig s ersetzt durch einen anderen Parameter t, der als Funktion von s gegeben ist durch

$$t = A + \int B\,e^{\int 2p_{\mu}\,dx^{\mu}}\,ds, \tag{62}$$

---

[20]) R. K. S. 83.

[21]) R. K. S. 89.

[22]) Hlavatý, loc. cit.

n welcher Gleichung A und B beliebige Integrationskonstanten sind. Bei dieser Wahl von t ist also

$$'\delta \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \tag{63}$$

während

$$\delta \frac{dx^\nu}{dt} = -2 \frac{dx^\nu}{dt} p_\mu dx^\mu. \tag{64}$$

Die pseudoparallele Bewegung eines tangierenden Vektors entlang der geodätischen Linie ändert sich also bei bahntreuen Transformationen der Übertragung. Wir ersetzen jetzt s einmal durch einen anderen Parameter p, der kein gewöhnlicher Skalar mehr ist, doch der so gewählt ist, daß sein Differential Bestimmungszahl einer Dichte vom Gewicht $-\mathfrak{k}$ ist. Die $\frac{dx^\nu}{dp}$ sind dann Bestimmungszahlen einer Vektordichte vom Gewicht $+\mathfrak{k}$, und wir wollen versuchen, p so zu wählen, daß auch jetzt

$$\delta \frac{dx^\nu}{dp} = 0. \tag{65}$$

Eine leichte Rechnung gibt für p die Differentialgleichung

$$\frac{\delta}{ds}\frac{dp}{ds} = \frac{d^2p}{ds^2} + \mathfrak{k}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dp}{ds} = 0 \tag{66}$$

mit der Lösung

$$p = A + \int_s B e^{-\mathfrak{k}\int_s \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} dx^\mu} ds, \tag{67}$$

wo A und B beliebige Integrationskonstanten sind. Berechnet man nun $'\delta \frac{dx^\nu}{dp}$, so zeigt sich ferner, daß

$$'\delta \frac{dx^\nu}{dp} = \{2 - \mathfrak{k}(n+1)\} p_\mu dx^\mu \frac{dx^\nu}{dp}, \tag{68}$$

so daß für $\mathfrak{k} = \frac{2}{n+1}$ die rechte Seite bei jeder bahntreuen Transformation der Übertragung Null bleibt. Da für diese Wahl von $\mathfrak{k}$ nach (58)

$$\delta \frac{dx^\nu}{dp} = d\frac{dx^\nu}{dp} + \left(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \frac{2}{n+1}\Gamma^\alpha_{\alpha(\mu} A^\nu_{\lambda)}\right) dx^\mu \frac{dx^\lambda}{dp}, \tag{69}$$

sind die symmetrischen Teile der Parameter dieser Übertragung:

$$A^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \frac{2}{n+1}\Gamma^\alpha_{\alpha(\mu} A^\nu_{\lambda)} \tag{70}$$

bei bahntreuen Transformationen der Übertragung und festgehaltenen Urvariablen invariant. Diese zuerst von T. Y. Thomas[23]) entdeckte Eigenschaft

[23]) On the projective and equi-projective geometries of paths, Proc. Nat. Acad. 11 (1925), p. 199—203.

beruht also darauf, daß es möglich ist, eine tangierende *Vektordichte vom Gewichte* $\frac{2}{n+1}$ zu konstruieren, *deren pseudoparallele Verschiebung entlang der geodätischen Linie sich bei bahntreuen Transformationen nicht ändert.*

§ 9.

Der allgemeinste Fall.

Auch im Falle, wo schon vermittels der Gleichungen (14) bis (16) Pseudoskalare und damit Pseudoaffinoren eingeführt sind, wie z. B. bei der hier skizzierten Auffassung der Weylschen Geometrie, kann es angebracht sein, außerdem noch mit Dichten zu arbeiten, z. B. wenn man einfachheitshalber die Bestimmungszahlen der kovarianten n-Vektoren als Bestimmungszahlen von Dichten vom Gewicht $+1$ auffaßt. Die allgemeinste Größe, die Pseudoaffinordichte, ist dann von der Klasse $\mathfrak{k}$ und vom Gewicht $\mathfrak{l}$, und für solche Größen gelten Gleichungen wie (vgl. (26) und (58))

$$
\begin{aligned}
\delta \mathfrak{v}^{\nu} &= d\mathfrak{v}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{v}^{\lambda}\,dx^{\mu} - \mathfrak{k}\,\mathfrak{v}^{\nu}\,\Gamma_{\mu}\,dx^{\mu} - \mathfrak{l}\,\mathfrak{v}^{\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\,dx^{\mu},\\
\delta \mathfrak{w}_{\lambda} &= d\mathfrak{w}_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{w}_{\nu}\,dx^{\mu} - \mathfrak{k}\,\mathfrak{w}_{\lambda}\,\Gamma_{\mu}\,dx^{\mu} - \mathfrak{l}\,\mathfrak{w}_{\lambda}\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\,dx^{\mu},\\
\delta \mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu} &= d\mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\,\mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \beta}\,dx^{\mu} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{U}_{\beta}^{\ \nu}\,dx^{\mu} - \mathfrak{k}\,\mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu}\,\Gamma_{\mu}\,dx^{\mu} - \mathfrak{l}\,\mathfrak{U}_{\lambda}^{\ \nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\,dx^{\mu},
\end{aligned}
\tag{71}
$$

die sich entweder aus (26) und (58) ableiten lassen oder auch, indem man die Größen als Produkt einer gewöhnlichen Größe mit einem Pseudoskalar und einer Dichte schreibt und sodann (20), (22), (25) und (53) anwendet. Ein Beispiel bietet die konforme Geometrie. Dieser Geometrie liegt ein kovarianter Pseudotensor $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ n-ten Ranges der Klasse $+1$ zugrunde. Da

$$
\bar{\mathfrak{g}}_{ij} = \tau A^{\lambda\mu}_{ij}\,\mathfrak{g}_{\lambda\mu}, \tag{72}
$$

ist

$$
|\bar{\mathfrak{g}}_{ij}| = \tau^{n} \Delta^{-2} |\mathfrak{g}_{\lambda\mu}|, \tag{73}
$$

woraus folgt, daß

$$
\mathfrak{G}_{\lambda\mu} = \mathfrak{g}_{\lambda\mu}\,|\mathfrak{g}_{\alpha\beta}|^{-\frac{1}{n}} \tag{74}
$$

eine Tensordichte vom Gewicht $-\frac{2}{n}$ ist, die statt $\mathfrak{g}_{\lambda\mu}$ der konformen Geometrie zugrunde gelegt werden kann, was zuerst von T. Y. Thomas bemerkt worden ist[24]).

---

[24]) Invariants of relative quadratic differential forms, Proc. Nat. Acad. **11** (1925), p. 722–725; On conformal geometry, ebenda **12** (1926), p. 352–359.

(Eingegangen am 18. November 1928.)

On a Problem in the Additive Theory of Numbers.

By

E. H. Linfoot in Göttingen and C. J. A. Evelyn in Wotton.

1. Introductory.

The class of quadratfrei numbers is the first member of a whole series of classes of similar type, which we may define as follows:

Definition. $n = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_\varrho^{\lambda_\varrho}$ is said to be a number of class N when $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varrho \leqq N-1$.

The numbers of class N are thus those which are not divisible by any Nth power greater than 1; class 2 is the class of quadratfrei numbers. For convenience a number of class N will be denoted generally by M and referred to as an "M-number", N being chosen once and for all. The class of M-numbers is one of the most "natural" of all the sub-classes of positive integers. The probability that an integer taken at random should be an M-number exists and lies between 0 and 1, and the distribution of M-numbers is extremely regular when N is large, as the following theorem shows:

Theorem 1.1. The number of M-numbers which do not exceed x is asymptotic to $\frac{x}{\zeta(N)}$ as $x \to \infty$, and

$$\sum_{M \leqq x} 1 = \frac{x}{\zeta(N)} + O\left(x^{\frac{1}{N}}\right). \text{ [1]}$$

Proof. Evidently

$$\sum_{m^N \mid n} \mu(m) = 1 \text{ if } n \text{ is an } M\text{-number}$$
$$= 0 \text{ otherwise.}$$

[1]) By appealing to transcendental properties of $\mu(n)$ this error term can be reduced to $O\left(x^{\frac{1}{N}} e^{-\frac{\alpha}{2N^2}\sqrt{\log x \operatorname{loglog} x}}\right)$, α being an absolute constant [see Landau, Handbuch (Leipzig 1909), p. 607].

Thus

$$\sum_{M\leqq x} 1 = \sum_{n=1}^{x} \sum_{m^N \mid n} \mu(m) = \sum_{m=1}^{x^{\frac{1}{N}}} \mu(m) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m^N)}}^{x}$$

$$= \sum_{m=1}^{x^{\frac{1}{N}}} \mu(m) \left[\frac{x}{m^N}\right] = \sum_{m=1}^{x^{\frac{1}{N}}} \mu(m) \frac{x}{m^N} + O\left(x^{\frac{1}{N}}\right)$$

$$= x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^N} + x\, O\left(\int_{x^{\frac{1}{N}}}^{\infty} \frac{dt}{t^N}\right) + O\left(x^{\frac{1}{N}}\right)$$

$$= \frac{x}{\zeta(N)} + O\left(x^{\frac{1}{N}}\right).$$

The question we shall discuss is the analogue of Waring's problem for M-numbers. From the last theorem we see at once $\left(\text{since } \frac{1}{\zeta(2)} > \frac{1}{2}\right)$ that every large number can be expressed as the sum of two quadratfrei numbers, and *a fortiori* as the sum of s M-numbers, where $s \geqq 2$. But the problem of finding an asymptotic formula for the number of representations remains, and it is to this that the present paper is devoted. We attack it by the analytic method of Hardy and Littlewood and our final result may be stated as follows:

Theorem A. *Let* $s \geqq 3$ *and let*

$$S(n) = \prod_{p^N \nmid n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^N-1)^s}\right) \cdot \prod_{p^N \mid n} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p^N-1)^{s-1}}\right).$$

Then the number of representations of a large number n *as the sum of* s M*-numbers, repetitions being allowed and order being regarded as relevant, is*

$$\nu(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} S(n)\{1 + O(n^{-H+\varepsilon})\}$$

for every $\varepsilon > 0$, *where*

$$H = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$$

and the constant implied in O *depends only on* ε, N *and* s.

It is easy to see how the expression on the right arises. The number of representations of n as the sum of s positive integers is asymptotic to $\frac{n^{s-1}}{(s-1)!}$. To pass from this to the representation by M-numbers we naturally introduce a factor $\frac{1}{\zeta^s(N)}$, since the density of M-numbers is $\frac{1}{\zeta(N)}$.

Finally there will be a certain "interference", depending on the form of n, through the restriction imposed by the equation

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_s = n$$

on the arithmetic structure of the M's; this correponds to the factor $S(n)$.

An immediate corollary of our asymptotic formula is the following remarkable result:

Theorem B. *The number of partitions of a large number M of class N into s numbers of the same class $(s \geqq 3)$ differs asymptotically from the "normal" number $\frac{M^{s-1}}{(s-1)!\,\zeta^s(N)}$ by a constant factor $\gamma(s, N)$ which is less than one when s is even, greater than one when s is odd.*

2. Notation and preliminary lemmas.

N denotes throughout an integer greater than or equal to 2 and M a number of class N; k, s are positive integers and h stands for $\varphi(k)$, φ being Euler's function. $c_1, c_2, \ldots, c_{14}$ are positive constants depending only on N, s. ε is an arbitrary positive number and $A_1, A_2, \ldots, A_{33}$ are positive constants depending only on ε, N and s. We notice that, if n runs through the positive integers, $g(n) < A_1 n^{2\varepsilon}$ and $g(n) < A_2 n^{\varepsilon}$ make the same assertion.

The following three lemmas will be needed later. They are well-known and are therefore stated without proof; the proofs will be found in Volume 1 of Landau's "Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig 1927).

Lemma 2.1. *If $\frac{l}{k}, \frac{l'}{k'}$ are two neighbouring fractions of the Farey series of order n in $(0, 1)$ and if $\xi = \frac{l+l'}{k+k'}$ is their mediant, then*

$$\left|\xi - \frac{l}{k}\right| = \frac{1}{k(k+k')} \leqq \frac{1}{k(n+1)}. \tag{2.1}$$

Lemma 2.2. *If m is a positive integer and $\varrho(k)$ a primitive kth root of unity, then*

$$\sum_{\varrho(k)} \varrho^m = \sum_{d \mid (k, m)} d\,\mu\left(\frac{k}{d}\right). \tag{2.2}$$

Lemma 2.3. *If $d(k) = \sum_{d \mid k} 1$ and if $\Omega(k)$ is the number of different prime divisors of k, then*

$$d(k) < A_3 k^{\varepsilon}, \tag{2.31}$$

$$2^{\Omega(k)} < A_4 k^{\varepsilon}. \tag{2.32}$$

We also require three well-known results from the elementary theory of numbers:

Lemma 2.41. *If* $k = 2^c p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_\varrho^{a_\varrho}$, $(\lambda, k) = 1$ *and if* $\omega(2^c)$, $\omega(p_1^{a_1}), \dots, \omega(p_\varrho^{a_\varrho})$ *are the numbers of roots in* x *of the congruences*

$$x^N \equiv \lambda \pmod{2^c}, \quad x^N \equiv \lambda \pmod{p_1^{a_1}}, \quad \dots, \quad x^N \equiv \lambda \pmod{p_\varrho^{a_\varrho}},$$

then the number of roots in x *of the congruence*

$$x^N \equiv \lambda \pmod{k}$$

is

$$\omega(n) = \omega(2^c)\,\omega(p_1^{a_1}) \dots \omega(p_\varrho^{a_\varrho}).$$

Lemma 2.42. *If* p *is an odd prime,* $\alpha \geqq 1$ *and* $(\lambda, p) = 1$ *then the number of roots in* x *of the congruence*

$$x^N \equiv \lambda \pmod{p^\alpha}$$

is either 0 *or* $\delta = (N, \varphi(p^\alpha))$ *and so is always less than or equal to* N.

Lemma 2.43. *If* $c \geqq 1$ *and* λ *is odd, then the number of roots in* x *of the congruence*

$$x^N \equiv \lambda \pmod{2^c}$$

is 1 *if* $c = 1$; 0, 1 *or* 2 *if* $c = 2$; 0, $\delta = (N, 2^{c-2})$ *or* 2δ *if* $c \geqq 3$, *and so is always less than or equal to* $2N$.

Lemma 2.5. *If* $(\lambda, k) = 1$ *the number of roots in* x *of the congruence*

$$x^N \equiv \lambda \pmod{k}$$

does not exceed $(2N)^{\Omega(k)}$ *and so is less than* $A_5 k^\varepsilon$.

Proof. By the last three lemmas and (2.32).

Lemma 2.6. *The number of roots in* x *of the congruence*

$$x^N \equiv \lambda \pmod{k} \tag{2.61}$$

is less than $A_5 d k^\varepsilon$, *where* $d = (\lambda, k)$.

Proof. *Let*

$$d = (\lambda, k) = \prod(p^{Nr+\delta}) \qquad (0 \leqq \delta \leqq N-1)$$

and let

$$\lambda = \lambda_1 d, \qquad k = k_1 d.$$

Then (2.61) implies $d \mid x^N$, $p^{Nr+\delta} \mid x^N$; that is, if p^n is the highest power of p which divides x,

$$Nr + \delta \leqq Nn.$$

If $\delta = 0$ it follows that $r \leqq n$; if $1 \leqq \delta \leqq N-1$ we have $r+1 \leqq n$. Let $\delta^* = 0$ when $\delta = 0$, 1 when $\delta > 0$ and we see that in all cases $p^{r+\delta^*} \mid x$. Write

$$x = \prod(p^{r+\delta^*})\, y$$

and (2.61) is equivalent to

$$\prod(p^{N\delta^*-\delta})\,y^N \equiv \lambda_1 \pmod{k_1}. \tag{2.62}$$

Unless $\prod(p^{N\delta^*-\delta})$ is prime to k_1, therefore, there is no solution; when $\prod(p^{N\delta^*-\delta})$ is prime to k_1 it follows that those primes for which $\delta > 0$ do not divide k_1. Now let

$$z = \prod(p^{\delta^*})\,y,$$

so that $x = \prod(p^r)\,z$. Then (2.62) is equivalent to

$$z^N \equiv \lambda_1 \prod(p^{\delta}) \pmod{k_1} \tag{2.63}$$

and since $\lambda_1 \prod(p^{\delta})$ is prime to k_1 it follows by lemma 2.5 that the number of roots in z of this congruence is less than $A_5 k_1^{\varepsilon} \leqq A_5 k^{\varepsilon}$. But (2.63) and (2.61) are equivalent; it follows that (2.61) has less than $A_5 k^{\varepsilon}$ roots which are incongruent mod k_1 and so less than $A_5 d k^{\varepsilon}$ roots mod k.

Lemma 2.7. *If $E_N(k) = 1$ or 0 as k is or is not a number of class $N+1$, then*

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m^N \equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^N} = \frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N - 1} \tag{2.71}$$

and

$$\left| \frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N - 1} \right| < \frac{\zeta(N)}{k}. \tag{2.72}$$

Proof. 1. The sum evidently vanishes unless k is of class $N+1$. Suppose that k is of class $N+1$. Then writing

$$\varkappa = \prod_{p \mid k} p,$$

we see that $k \mid m^N$ is equivalent to $\varkappa \mid m$. The left hand side of (2.71) is thus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa^N} \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{\mu(\varkappa m_1)}{m_1^N} &= \frac{1}{\varkappa^N} \sum_{\substack{m_1=1 \\ (m_1,\,k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\varkappa)\,\mu(m_1)}{m_1^N} = \frac{\mu(\varkappa)}{\varkappa^N} \prod_{p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{p^N}\right) \\ &= \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N} \frac{1}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{p^N}{p^N - 1} = \frac{1}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N - 1} \end{aligned} \tag{2.73}$$

2. We can suppose that k is of class $N+1$. Since (2.73) is less than

$$\frac{1}{\varkappa^N} \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^N} = \frac{\zeta(N)}{\varkappa^N} \leqq \frac{\zeta(N)}{k}$$

the result follows.

Lemma 2.8 (the crucial lemma). *If ϱ is a primitive kth root and $\nu \geqq 0$ is an integer, then*

$$\left| \sum_{M \leqq \nu} \varrho^M - (\nu+1) \frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N - 1} \right| < A_6 k^{\varepsilon} \left(\nu^{\frac{1}{N}} + k\right) \tag{2.8}$$

Proof. We can suppose $\nu \geqq 1$ without loss of generality. Since

$$\sum_{m^N \mid n} \mu(m) = 1 \text{ if } n \text{ is of class } N,$$
$$= 0 \text{ otherwise}$$

we have

$$\sum_{M \leqq \nu} \varrho^M = \sum_{n=1}^{\nu} \varrho^n \sum_{m^N \mid n} \mu(m) = \sum_{m=1}^{\nu^{\frac{1}{N}}} \mu(m) \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{m^N}}}^{\nu} \varrho^n .$$

Now when $k \mid m^N$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{m^N}}}^{\nu} \varrho^n = \sum_{n=1}^{\nu^{\frac{1}{N}}} (\varrho^{m^N})^n = \left[\frac{\nu}{m^N}\right]$$

while when $k + m^N$

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{m^N}}}^{\nu} \varrho^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\nu^{\frac{1}{N}}} (\varrho^{m^N})^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\nu^{\frac{1}{N}}} e^{\frac{2\pi i l m^N n}{k}} \right| \leqq \frac{2}{\left| 1 - e^{\frac{2\pi i l m^N}{k}} \right|}$$
$$= \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\pi l m^N}{k}\right) \right|} \leqq \frac{1}{2\left\{\frac{l m^N}{k}\right\}}$$

where $\{x\}$ denotes the distance of x from the nearest integer or integers. Thus

$$\sum_{M \leqq \nu} \varrho^M = \sum_{\substack{m=1 \\ m^N \equiv 0 \pmod{k}}}^{\nu^{\frac{1}{N}}} \mu(m) \left[\frac{\nu}{m^N}\right] + \frac{1}{2} \eta_1 \sum_{\substack{m=1 \\ m^N \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\nu^{\frac{1}{N}}} \frac{1}{\left\{\frac{l m^N}{k}\right\}}, \tag{2.81}$$

where $\eta_1 \dots \eta_7$ are numbers such that $|\eta| \leqq 1$. The first sum is

$$\nu \sum_{\substack{m=1 \\ m^N \equiv 0 \pmod{k}}}^{\nu^{\frac{1}{N}}} \frac{\mu(m)}{m^N} + \eta_2 \sum_{\substack{m=1 \\ m^N \equiv 0 \pmod{k}}}^{\nu^{\frac{1}{N}}} 1$$
$$= \nu \sum_{\substack{m=1 \\ m^N \equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^N} + \eta_3 \nu \sum_{m=\nu^{\frac{1}{N}}}^{\infty} \frac{1}{m^N} + \eta_4 + \eta_5 \nu^{\frac{1}{N}}$$
$$= \nu \frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N - 1} + 3\eta_6 \nu^{\frac{1}{N}}$$
$$= (\nu + 1) \frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p \mid k} \frac{-1}{p^N - 1} + 5\eta_7 \nu^{\frac{1}{N}} \tag{2.82}$$

by (2.71), (2.72). The second is absolutely

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\nu^{\frac{1}{N}}}{k}+1\right)\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sum_{\substack{m=1\\ m^N\equiv\lambda \pmod k}}^{k-1}\frac{1}{\left\{\frac{lm^N}{k}\right\}} < \frac{1}{2}\left(\frac{\nu^{\frac{1}{N}}}{k}+1\right)\sum_{\lambda=1}^{k-1} A_5 k^{\varepsilon}\frac{(\lambda,k)}{\left\{\frac{l\lambda}{k}\right\}},$$

by lemma (2.6)

$$= \frac{1}{2}A_5 k^{\varepsilon}\left(\frac{\nu^{\frac{1}{N}}}{k}+1\right)\sum_{r=1}^{k-1}\frac{(r,k)}{\left\{\frac{r}{k}\right\}}$$

since $r = l\lambda$ also runs once through the residues $1, 2, \ldots, k-1$ and $(r,k) = (\lambda,k)$

$$\leqq A_5 k^{\varepsilon}\left(\frac{\nu^{\frac{1}{N}}}{k}+1\right)\sum_{r=1}^{\frac{1}{2}k}\frac{(r,k)}{\left\{\frac{r}{k}\right\}} = A_5 k^{\varepsilon}\left(\nu^{\frac{1}{N}}+k\right)\sum_{r=1}^{\frac{1}{2}k}\frac{(r,k)}{r}.$$

But, writing $(r,k)=\delta$, $r=\delta r_1$,

$$\sum_{r=1}^{\frac{1}{2}k}\frac{(r,k)}{r} \leqq \sum_{\delta\mid k}\delta\sum_{r_1=1}^{\frac{k}{2\delta}}\frac{1}{\delta r_1} \leqq \sum_{\delta\mid k}1\sum_{r_1=1}^{k}\frac{1}{r_1} < A_6 k^{\varepsilon}\log k < A_7 k^{\varepsilon}$$

by (2.31). The second sum is thus absolutely less than

$$A_8 k^{\varepsilon}\left(\nu^{\frac{1}{N}}+k\right). \tag{2.83}$$

From (2.81), (2.82), (2.83) the lemma follows.

3. The Farey dissection; Major and Minor Arcs.

We now divide up the circle $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$ by means of the Farey dissection of order $[n^K]$, where $K = \frac{1}{2}+\frac{1}{2N}$. That is to say, we take the Farey series of order $[n^K]$ in $(0,1)$ and space it round the circumference so that $\frac{l}{k}$ becomes the point $e^{-\frac{1}{n}}e^{\frac{2\pi i l}{k}} = e^{-\frac{1}{n}}\varrho$ where (since l, k are coprime) ϱ is a primitive kth root. The "mediants" $e^{-\frac{1}{n}}e^{2\pi i\frac{l+l'}{k+k'}}$ divide this circle C into arcs B_ϱ, each containing one primitive root ϱ. Writing

$$x = \varrho X = \varrho e^{-\frac{1}{n}+i\vartheta} \qquad (-\pi < \vartheta \leqq \pi) \tag{3.01}$$

we see that the arc B_ϱ is given by $-\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$, where by (2.1)

$$\frac{\pi}{kn^K} \leqq \vartheta_1,\ \vartheta_2 < \frac{2\pi}{kn^K}. \tag{3.02}$$

The arcs B_ϱ may be divided into two classes, according to the values of the corresponding integers k. Those arcs $\mathfrak{M}$ for which

$$k \leqq n^H,$$

where $H = 1 - K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$, will be called major arcs; the remainder $\mathfrak{m}$, for which $n^H < k \leqq n^K$, minor arcs. The following properties will be needed later:

Lemma 3.1[2]). *With the notation* (3.01) *we have on the circle* C

$$\frac{1}{|1-X|} \leqq \frac{c_1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\vartheta^2}}, \tag{3.11}$$

on every major arc $\mathfrak{M}$

$$\frac{|1-X|}{1-|X|} < \frac{8n^H}{k} \tag{3.12}$$

and on every minor arc $\mathfrak{m}$

$$\frac{|1-X|}{1-|X|} < 8. \tag{3.13}$$

Proof. Writing $e^{-\frac{1}{n}} = R$, we have for $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$

$$|1-X| = |1-Re^{i\vartheta}| = \sqrt{1-2R\cos\vartheta+R^2} = \sqrt{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$\geqq \sqrt{\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)^2+4e^{-\frac{1}{2}}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \geqq \frac{1}{c_1}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\vartheta^2}.$$

Also

$$|1-X| \leqq |1-R|+|R-X| = 1-R+R|1-e^{i\vartheta}| = 1-R+2R\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|$$
$$\leqq 1-R+R|\vartheta|,$$

so that

$$\frac{|1-X|}{1-|X|} \leqq 1+\frac{R}{1-R}|\vartheta| = 1+\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}|\vartheta| \leqq 1+n|\vartheta|.$$

By (3.02) we therefore have on a major arc $\mathfrak{M}$

$$\frac{|1-X|}{1-|X|} < 1+n\frac{2\pi}{kn^K} = 1+\frac{2\pi n^H}{k} < \frac{8n^H}{k},$$

while on a minor arc $\mathfrak{m}$

$$\frac{|1-X|}{1-|X|} < 1+n\frac{2\pi}{kn^K} < 1+2\pi n^{1-H-K} = 1+2\pi < 8.$$

---

[2]) "Vorlesungen" I, p. 249.

Now let M denote any number of class N and let

$$f(x) = \sum_M x^M$$

for $|x| < 1$. The power series evidently converges inside the unit circle and we shall see that it has the circle as a natural boundary. As $x \to 1$ along the real axis it is clear from (1.1) that

$$f(x) \sim \frac{1}{\zeta(N)} \frac{1}{1-x},$$

so that $f(x)$ has something resembling a pole at this point, with "residue" $\frac{1}{\zeta(N)}$. It will appear that a similar result is true near any primitive kth root $\varrho = e^{\frac{2\pi i l}{k}}$ and we shall find an approximate expression for $f(x)$ near such a point. This is done with the assistance of the Farey dissection already introduced, and we are able to show that when n is large $f(x)$ is approximately represented on the respective major arcs $\mathfrak{M}$ of the circle $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$ by certain functions $\psi_\varrho(x)$ of very simple form, while on each of the minor arcs $f(x)$ is relatively small, so that it may be replaced by zero to the same order of approximation.

We begin by proving a trivial preliminary lemma.

Lemma 3.2. *If on B_ϱ we write $x = \varrho e^{-\frac{1}{n}+i\vartheta}$, then*

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2 d\vartheta < c_2 n, \qquad \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^2 d\vartheta < c_2 n \tag{3.21}$$

and if $s \geqq 3$

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^{s-1} d\vartheta < c_3 n^{s-2}. \tag{3.22}$$

Proof.

1. $$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2 d\vartheta + \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^2 d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\vartheta = 2\pi \sum_M e^{-\frac{2M}{n}}$$

$$< 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{m}{n}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} < c_2 n.$$

2. $$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^{s-1} d\vartheta < \operatorname*{Max}_{|x| = e^{-\frac{1}{n}}} |f(x)|^{s-3} \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^2 d\vartheta$$

$$< \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \right)^{s-3} \cdot c_2 n < c_3 n^{s-2}.$$

Major Arcs.

Lemma 3.3. *Let*

$$\psi_\varrho(x) = \frac{1}{1-X}\,\frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p\mid k} \frac{-1}{p^N-1}.$$

Then on a major arc $\mathfrak{M}$

$$|f(x)-\psi_\varrho(x)| < A_9\, n^{1-H+\varepsilon}. \tag{3.3}$$

Proof. Writing $\tau(\nu) = \sum_{M\leqq\nu} \varrho^M$ we have for $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$

$$f(x) = \sum_M x^M = \sum_M \varrho^M X^M = (1-X)\sum_{\nu=0}^{\infty} \tau(\nu)\, X^\nu.$$

But by (2.8)

$$\left|\tau(\nu) - (\nu+1)\,\frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p\mid k} \frac{-1}{p^N-1}\right| < A_6\, k^\varepsilon (\nu^{\overline{N}} + k).$$

Thus

$$\left|f(x) - (1-X)\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\,\frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p\mid k} \frac{-1}{p^N-1}\, X^\nu\right|$$

$$< A_6\, k^\varepsilon\, |1-X| \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{\overline{N}}\, |X|^\nu + A_6\, k^{1+\varepsilon}\, |1-X| \sum_{\nu=0}^{\infty} |X|^\nu$$

$$< A_{10}\, k^\varepsilon\, |1-X|\,(1-|X|)^{-1-\frac{1}{N}} + A_6\, k^{1+\varepsilon}\,\frac{|1-X|}{1-|X|}$$

(see for instance "Vorlesungen" I, Satz 224). Now

$$(1-|X|)^{-\frac{1}{N}} = \left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)^{-\frac{1}{N}} < c_4\, n^{\frac{1}{N}}.$$

So by (3.12) we have on a major arc

$$\left|f(x) - (1-X)\,\frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p\mid k} \frac{-1}{p^N-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, X^\nu\right|$$

$$< A_{11}\, k^\varepsilon\, n^{H+\frac{1}{N}} + 8\, A_6\, k^{1+\varepsilon}\,\frac{n^H}{k} < A_{11}\, n^{H+\frac{1}{N}+\varepsilon} + 8\, A_6\, n^{H+\varepsilon}$$

$$< (A_{11} + 8\, A_6)\, n^{1-H+\varepsilon},$$

since $H = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$. That is

$$\left|f(x) - \frac{1}{1-X}\,\frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p\mid k} \frac{-1}{p^N-1}\right| < A_9\, n^{1-H+\varepsilon}.$$

Lemma 3.4. *If* $s \geqq 3$,

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{R}} |\psi_\varrho(x)|^{s-1} d\vartheta < c_5 n^{s-2}. \tag{3.4}$$

Proof. On any B_ϱ, by (3.11)

$$|\psi_\varrho(x)| \leqq c_1 \frac{E_N(k)}{\zeta(N)} \prod_{p|k} \frac{1}{p^N - 1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \vartheta^2}}.$$

Thus

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{R}} |\psi_\varrho(x)|^{s-1} d\vartheta < c_6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k E_N(k)}{\zeta^{s-1}(N)} \prod_{p|k} \left(\frac{1}{p^N - 1}\right)^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\left(\frac{1}{n^2} + \vartheta^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}$$

$$= c_6 \sum_{k=1}^{\infty} k E_N(k) \prod_{p|k} \frac{p-1}{p} \left(\frac{1}{p^N - 1}\right)^{s-1} \cdot \frac{n^{s-2}}{\zeta^{s-1}(N)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(1+\varphi^2)^{\frac{s-1}{2}}} = c_5 n^{s-2},$$

since the sum of the series is the finite limit

$$\prod_{p} \left\{1 + (p + p^2 + \ldots + p^N) \frac{p-1}{p} \left(\frac{1}{p^N - 1}\right)^{s-1}\right\} = \prod_{p} \left\{1 + \frac{1}{(p^N - 1)^{s-2}}\right\}.$$

Minor Arcs.

Lemma 3.5. *If* $\omega = [n^{1+\varepsilon}]$, *then on the circle* C *and a fortiori on every minor arc* $\mathfrak{m}$

$$|f(x) - \sum_{M \leqq \omega} x^M| < A_{12}. \tag{3.5}$$

Proof.

$$\left|\sum_{M > \omega} x^M\right| < \sum_{\nu=\omega+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu}{n}} \leqq e^{-n^\varepsilon} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} < c_7 n e^{-n^\varepsilon} \leqq A_{12}.$$

Lemma 3.6. *If* ϱ *is a primitive* k*th root,* $x = \varrho X$ *and* $\tau(\nu) = \sum_{M \leqq \nu} \varrho^M$, *then on the circle* C *and a fortiori on every minor arc* $\mathfrak{m}$

$$|f(x) - (1 - X) \sum_{\nu=0}^{\omega} \tau(\nu) X^\nu - \tau(\omega) X^{\omega+1}| < A_{12}.$$

Proof.

$$\sum_{M \leqq \omega} x^M = \sum_{M \leqq \omega} \varrho^M X^M = \sum_{\nu=0}^{\omega} [\tau(\nu) - \tau(\nu - 1)] X^\nu$$

$$= (1 - X) \sum_{\nu=0}^{\omega} \tau(\nu) X^\nu + \tau(\omega) X^{\omega+1}$$

and (3.5).

Lemma 3.7. *On a minor arc* $\mathfrak{m}$

$$|f(x)| < A_{13} n^{1-H+\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Proof. By (2.72), (2.8)

$$|\tau(\nu)| < A_{14} k^{\varepsilon}\left(\frac{\nu}{k} + \nu^{\frac{1}{N}} + k\right).$$

Thus for $\nu \leqq \omega$, $n^H < k \leqq n^K$

$$|\tau(\nu)| < A_{14} n^{\varepsilon}\left(n^{1-H+\varepsilon} + n^{\frac{1}{N}+\frac{\varepsilon}{N}} + n^K\right) < A_{15} n^{1-H+\varepsilon}.$$

By (3.6) it follows that on a minor arc

$$|f(x)| < A_{12} + |1-X| \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{15} n^{1-H+\varepsilon} |X|^{\nu} + A_{15} n^{1-H+\varepsilon}$$

$$= A_{12} + \frac{|1-X|}{1-|X|} A_{15} n^{1-H+\varepsilon} + A_{15} n^{1-H+\varepsilon} < A_{12} + 9 A_{15} n^{1-H+\varepsilon}$$

from (3.13)

$$|f(x)| < A_{13} n^{1-H+\varepsilon}.$$

Lemma 3.8. *If* $s \geqq 3$ *then*

$$\sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^s d\vartheta < A_{17} n^{s-1-H+\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Proof.

$$\sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^s d\vartheta \leqq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{m}} |f(x)| \operatorname*{Max}_{|x|=e^{-\frac{1}{n}}} |f(x)|^{s-3} \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^2 d\vartheta$$

$$< A_{16} n^{1-H+\varepsilon}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}}\right)^{s-3} \cdot c_2 n < A_{17} n^{s-1-H+\varepsilon}.$$

4. The Main Argument.

Let $\nu(n) = \nu(N, s; n)$ be the number of solutions of the Diophantine equation

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_s = n \qquad (N \geqq 2,\ s \geqq 3)$$

where repetition of M's is allowed and order is regarded as relevant. $\nu(n)$ is plainly the coefficient of x^n in $f^s(x)$; by Cauchy's theorem, then,

$$\nu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}},$$

where C as before is the circle $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$. We approximate to this in-

egral by replacing $f(x)$ on each major arc $\mathfrak{M}$ by the corresponding unction $\psi_\varrho(x)$, on each minor arc $\mathfrak{m}$ by zero, and write

$$(4.1) \qquad r(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} \psi_\varrho^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}} + \lambda_1(n),$$

where

$$\begin{aligned} |\lambda_1(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} (f^s(x) - \psi_\varrho^s(x)) \frac{dx}{x^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} f^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}} \right| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} |f^s(x) - \psi_\varrho^s(x)| \frac{|dx|}{|x|^{n+1}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^s \frac{dx}{x^{n+1}} \\ &= \frac{e}{2\pi} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} |f^s(x) - \psi_\varrho^s(x)| \, d\vartheta + \frac{e}{2\pi} \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |f(x)|^s d\vartheta \\ &= \lambda_1^{(1)}(n) + \lambda_1^{(2)}(n), \end{aligned}$$

say. Since

$$\begin{aligned} |f^s - \psi^s| &\leqq |f - \psi| (|f|^{s-1} + |f|^{s-2}|\psi| + \ldots + |\psi|^{s-1}) \\ &\leqq s|f - \psi| \{\mathrm{Max}(|f|, |\psi|)\}^{s-1} \leqq s|f - \psi| (|f|^{s-1} + |\psi|^{s-1}) \end{aligned}$$

t follows that, for $s \geqq 3$,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)}(n) &\leqq \frac{es}{2\pi} \mathrm{Max}_{\mathfrak{R}} |f - \psi_\varrho| \left\{ \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^{s-1} d\vartheta + \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} |\psi_\varrho(x)|^{s-1} d\vartheta \right\} \\ &< A_{18} n^{s-1-H+\varepsilon} \end{aligned}$$

by (3.22), (3.3), (3.4). And by (3.8)

$$\lambda_1^{(2)}(n) < A_{19} n^{s-1-H+\varepsilon}.$$

We therefore have

$$(4.2) \qquad \left| r(n) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{M}} \psi_\varrho^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}} \right| < A_{20} n^{s-1-H+\varepsilon}.$$

We next replace each $\int_{\mathfrak{M}}$ by the integral over the whole circle C. The resulting error

$$\lambda_2(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{C-\mathfrak{M}} \psi_\varrho^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}}$$

satisfies the inequality

$$|\lambda_2(n)| \leqq \frac{e}{2\pi} \sum_{\mathfrak{R}} \int_{C-\mathfrak{M}} |\psi_\varrho(x)|^s d\vartheta < \frac{e}{2\pi} c_1^s \zeta^s(N) \sum_{\mathfrak{R}} \frac{1}{k^s} \int_{C-\mathfrak{M}} \frac{d\vartheta}{\left(\frac{1}{n^2} + \vartheta^2\right)^{\frac{1}{2}s}}$$

by (2.72), (3.11)

$$\leqq c_8 \sum_{\mathfrak{R}} \frac{1}{k^s} \left(\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{kn^K}} + \int_{\frac{\pi}{kn^K}}^{-\infty} \right) \frac{d\vartheta}{\left(\frac{1}{n^2}+\vartheta^2\right)^{\frac{1}{2}s}} = 2c_8 \sum_{k=1}^{n^H} \frac{h}{k^s} \int_{\frac{\pi}{kn^K}}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\left(\frac{1}{n^2}+\vartheta^2\right)^{\frac{1}{2}s}}$$

$$= 2c_8 n^{s-1} \sum_{k=1}^{n^H} \frac{h}{k^s} \int_{\frac{n^{1-K}\pi}{k}}^{\infty} \frac{d\varphi}{(1+\varphi)^{\frac{1}{2}s}} < 2c_8 n^{s-1} \sum_{k=1}^{n^H} k^{1-s} \int_{\frac{n^{1-K}\pi}{k}}^{\infty} \frac{d\varphi}{\varphi^s}$$

$$= 2c_8 n^{s-1} \sum_{k=1}^{n^H} k^{1-s} \frac{1}{s-1} \left(\frac{k}{\pi n^{1-K}}\right)^{s-1}$$

$$= c_9 n^{(s-1)K} \sum_{k=1}^{n^H} 1 \leqq c_9 n^{(s-1)K+H}$$

$$= c_9 n^{(s-1)-(s-2)H} \leqq c_9 n^{s-1-H}$$

and (4.2) becomes

$$\left| \nu(n) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{R}} \int_C \psi_\varrho^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}} \right| < A_{21} n^{s-1-H+\varepsilon}. \tag{4.3}$$

These integrals are easily evaluated:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_\varrho^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{E_N(k)}{\zeta^s(N)} \sum_{p \mid k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(1-\frac{x}{\varrho}\right)^{-s} \frac{dx}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{E_N(k)}{\zeta^s(N)} \prod_{p \mid k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1)}{(s-1)!} \varrho^{-n}$$

so that

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\mathfrak{R}} \int_C \psi_\varrho^s(x) \frac{dx}{x^{n+1}} \tag{4.31}$$

$$= \frac{(n+1)\ldots(n+s-1)}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} \sum_{k=1}^{n^H} E_N(k) \prod_{p \mid k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n}.$$

Now by (2.72)

$$\left| E_N(k) \prod_{p \mid k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n} \right| < \zeta^{2s}(N) k^{1-s} = c_{10} k^{1-s} \leqq c_{10} k^{-2}.$$

Thus

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} E_N(k) \prod_{p \mid k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n}$$

is absolutely convergent for every n and $|S(n)| < c_{11}$. Further

$$(4.32) \quad \left| \sum_{k>n^H} E_N(k) \prod_{p|k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n} \right| < c_{12} \sum_{k>n^H} \frac{1}{k^2} < c_{13}\, n^{-H}.$$

From (4.3), (4.31), (4.32) it follows that

$$(4.4) \quad \left| r(n) - \frac{(n+1)\dots(n+s-1)}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} S(n) \right| < A_{22}\, n^{s-1-H+\varepsilon}.$$

Since $|S(n)| < c_{11}$,

$$\left| \frac{(n+1)\dots(n+s-1)}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} S(n) - \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} S(n) \right| < c_{14}\, n^{s-2}$$

and therefore we have finally: For $s \geqq 3$, $N \geqq 2$

$$(4.5) \quad \left| r(n) - \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} S(n) \right| < A_{23}\, n^{s-1-H+\varepsilon}$$

where

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} E_N(k) \prod_{p|k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n}.$$

5. Summation of the Singular Series.

The "singular series", divested of the factors $\frac{n^{s-1}}{(s-1)!}$ and $\frac{1}{\zeta^s(N)}$, can be written as

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} E_N(k) \prod_{p|k} \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} E_N(k)\, A(k) \\ &= \prod_{p} \{1 + A(p) + \dots + A(p^N)\} \end{aligned}$$

since $E_N(k)\, A(k)$ is evidently multiplicative, $E_N(1)\, A(1) = 1$ and $E_N(p^r) = 0$ for $r \geqq N+1$. Now by (2.2)

$$\begin{aligned} A(p) = \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{d|(p,n)} d\,\mu\left(\frac{p}{d}\right) &= \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s (p-1) \qquad (p|n) \\ &= -\left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \qquad (p \nmid n) \end{aligned}$$

while for $r \geqq 2$

$$\begin{aligned} A(p^r) = \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s \sum_{d|(p^r,n)} d\,\mu\left(\frac{p^r}{d}\right) &= \left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s (p^r - p^{r-1}) \quad (p^r|n) \\ &= -\left(\frac{-1}{p^N-1}\right)^s p^{r-1} \qquad (p^{r-1}|n,\ p^r \nmid n) \\ &= 0 \qquad (p^{r-1} \nmid n). \end{aligned}$$

Thus if p^m is the highest power of p which divides n,

$$1 + A(p) + \ldots + A(p^N)$$
$$= 1 + \left(\frac{-1}{p^N - 1}\right)^s (p - 1 + p^2 - p + \ldots + p^m - p^{m-1} - p^m)$$
$$= 1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^N - 1)^s}$$

for $0 \leqq m \leqq N - 1$, while

$$1 + A(p) + \ldots + A(p^N)$$
$$= 1 + \left(\frac{-1}{p^N - 1}\right)^s (p - 1 + p^2 - p + \ldots + p^N - p^{N-1})$$
$$= 1 + \frac{(-1)^s}{(p^N - 1)^{s-1}}$$

for $m \geqq N$. Hence we have

$$S(n) = \prod_{p^N \nmid n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^N - 1)^s}\right) \prod_{p^N \mid n} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p^N - 1)^{s-1}}\right).$$

Since for $N \geqq 2$, $s \geqq 3$

$$S(n) > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2 - 1}\right) > 0$$

we can write (4.5) in the final form

$$r(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} S(n) \{1 + O(n^{-H+\varepsilon})\}$$

and the proof is complete.

(Eingegangen am 9. Dezember 1928.)

Über die n-dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind.

Von

Ludwig Berwald in Prag.

Bekanntlich läßt sich die n-dimensionale nichteuklidische hyperbolische Geometrie nach Klein dadurch veranschaulichen, daß man den n-dimensionalen hyperbolischen Raum auf das Innere eines $(n-1)$-dimensionalen Ellipsoides im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n abbildet. Dabei gehen die Geraden wieder in Geraden über und die nichteuklidische Entfernung zweier Punkte in den Ausdruck

$$\text{(A)} \qquad s = \frac{1}{2\varkappa} \log (A\,B\,X\,Y),$$

wo A, B die Bildpunkte der beiden Punkte sind, X, Y die Schnittpunkte der Geraden AB mit dem Ellipsoid, $(A\,B\,X\,Y)$ das Doppelverhältnis der vier Punkte und $-\varkappa^2$ eine negative Konstante, das Krümmungsmaß des hyperbolischen Raumes. Ersetzt man das $(n-1)$-dimensionale Ellipsoid durch eine beliebige geschlossene konvexe Hyperfläche des R_n, versteht unter X, Y die Schnittpunkte der Geraden A, B mit dieser Hyperfläche, und gibt im übrigen die Maßbestimmung wieder durch (A), so entsteht eine, für $n = 3$ zuerst von Hilbert[1]) betrachtete Geometrie, in der die Geraden die kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte sind. Wir nennen im folgenden diese Geometrien die *n-dimensionalen Hilbertschen Geometrien.*

In der vorliegenden Arbeit soll nun vor allem die kürzlich von Funk[2])

[1]) D. Hilbert, Math. Annalen **46** (1895), S. 91—96; auch: Grundlagen der Geometrie, Anhang I. — Vgl. ferner G. Hamel, Dissertation, Göttingen 1901; Math. Annalen **57** (1903), S. 231—264.

[2]) P. Funk, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. **37** (1928), 2. Abt., S. 8 (Kurzer Bericht); Math. Annalen **101** (1929), S. 226—237. — Herr Funk war so freundlich, mir das Manuskript seiner Abhandlung zur Verfügung zu stellen, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

gegebene Kennzeichnung der zweidimensionalen Hilbertschen Geometrien auf die n-dimensionalen ausgedehnt werden, indem der Satz bewiesen wird (Nr. 5):

Die n-dimensionalen Hilbertschen Geometrien lassen sich durch die folgenden drei Forderungen kennzeichnen:

1. *Die Geraden sind die kürzesten Linien.*
2. *Der Krümmungsskalar*[3]) *ist eine negative Konstante.*
3. *Das starke Monodromieaxiom*[4]) *ist erfüllt.*

Eine ähnliche Rolle wie die Hilbertschen Geometrien im Falle eines konstanten negativen Krümmungsskalars spielen im Falle des Krümmungsskalars Null die *n-dimensionalen Minkowskischen Geometrien*[5]), d. h. jene, die in gewöhnlichen kartesischen Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ein Bogenelement der Gestalt

$$(B) \qquad ds = F\left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right) dt$$

besitzen. Für sie gilt der Satz:

Eine n-dimensionale Geometrie, die folgenden drei Forderungen genügt:

1. *die Geraden sind die kürzesten Linien,*
2. *der Krümmungsskalar ist Null*
3. *das starke Monodromieaxiom ist erfüllt,*

ist notwendigerweise eine Minkowskische Geometrie.

Doch gibt es, anders als im Falle der Hilbertschen Geometrien, auch Minkowskische Geometrien, die dem starken Monodromieaxiom *nicht* genügen. Läßt man anderseits dieses Axiom weg, so erhält man keineswegs nur die n-dimensionalen Minkowskischen Geometrien. Es existieren vielmehr auch Nicht-Minkowskische Geometrien vom Krümmungsskalar Null, in denen die Geraden die kürzesten Linien sind. Für $n = 2$ sind diese Geometrien von Funk[6]) bestimmt worden. Im folgenden werden alle n-dimensionalen Geometrien mit geradlinigen Extremalen und dem Krümmungsskalar Null angegeben (Nr. 7).

Ebenso werden — gleichfalls in Verallgemeinerung der Untersuchungen

---

[3]) L. Berwald, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 40—73, bes. Nr. 27. Dort wird diese Invariante, die $\left(\text{bis auf einen Faktor } \frac{1}{n-1}\right)$ die Verallgemeinerung der *mittleren Krümmung* von G. Ricci, Atti Ist. Veneto 63 (1904), S. 1233—1239 darstellt, als *Richtungsinvariante der Krümmung* bezeichnet. Vgl. auch Nr. 2 der vorliegenden Arbeit.

[4]) G. Hamel a. a. O., Math. Annalen, § 3. Vgl. im folgenden Nr. 5.

[5]) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, Kap. I.

[6]) P. Funk a. a. O., Math. Annalen, § 5.

von Funk — alle n-dimensionalen Geometrien bestimmt, deren Krümmungsskalar eine negative Konstante ist und deren Extremalen gerade Linien sind (Nr. 5, 6).

Die im vorstehenden formulierten Bedingungen 2 lassen sich auch durch die folgenden ersetzen:

2^*. *Das Krümmungsmaß ist eine negative Konstante (ist Null).* D. h. die vom Verfasser eingeführte Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungsmaßes[7]) hat für jedes Linienelement[8]) und für jede Flächenrichtung durch das Linienelement denselben Wert, und dieser ist negativ (Null). Die Bedingungen 1 und 2^* zusammengenommen sind nämlich immer mit den beiden Forderungen 1 und 2 äquivalent (Nr. 8), was für die Bedingungen 2 und 2^* *allein* nicht gilt.

Im Falle $n = 2$ reduzieren sich die Bedingungen 2 und 2^* für die Hilbertschen Geometrien beide auf die Forderung, daß der von Underhill[9]) eingeführte Krümmungsskalar konstant und negativ ist. Man erhält dann gerade die Funksche Charakterisierung.

Schließlich wird im nachfolgenden auch noch der Satz bewiesen, daß es keine Geometrien mit geradlinigen Extremalen gibt, deren Krümmungsskalar — oder, was auf dasselbe herauskommt, deren Krümmungsmaß — eine *nicht-konstante* Ortsfunktion ist (Nr. 9).

Das wichtigste Hilfsmittel, das bei der Herleitung der angeführten Ergebnisse benutzt wird, sind die partiellen Differentialgleichungen, durch die im n-dimensionalen euklidischen Raum ein Radiusvektor, der von einem Linienelement in dessen Richtung zu einem Punkte einer festen Hyperfläche führt, als Funktion des Ausgangslinienelementes gekennzeichnet ist. Sie werden in Nr. 4 aufgestellt. Die einleitenden Abschnitte (Nr. 1 bis 3) enthalten eine Zusammenstellung der wichtigsten verwendeten Begriffe und Formeln aus der Theorie der n-dimensionalen allgemeinen metrischen Räume.

1. Vorbemerkungen.

Im folgenden handelt es sich um positiv-reguläre Variationsprobleme mit einem Grundintegral der Form

$$(1) \qquad s = \int F\left(x^1, x^2, \ldots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right) dt \equiv \int F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt,$$

das als „Bogenlänge“ eines n-dimensionalen *allgemeinen metrischen Raumes*

[7]) L. Berwald a. a. O., Nr. 25 und Nr. 2 der vorliegenden Abhandlung.

[8]) „Linienelement“ steht hier und im folgenden durchwegs für „orientiertes Linienelement“.

[9]) A. L. Underhill, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), S. 316—338.

gedeutet wird. Die „Grundfunktion“ F ist in den $\frac{dx}{dt}$ positiv-homogen von erster Dimension[10]). *Differentiation nach s wird weiterhin durchwegs durch angehängte Striche angezeigt.*

In einem Teil der folgenden Entwicklungen führen wir den Parameter

$$l = \int \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dx^k}{dt}\right)^2}\, dt \tag{2}$$

ein. Wenn $x^1, x^2, \ldots, x^n$ rechtwinklige kartesische Koordinaten in einem n-dimensionalen *euklidischen* Raum sind, so bedeutet l die euklidische Bogenlänge. *Ableitung nach l bezeichnen wir stets durch übergesetzte Punkte*[11]).

Es ist also

$$F(x, x') = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}^k)^2 = 1. \tag{3}$$

Endlich benutzen wir die bekannte Einsteinsche Schreibweise der Tensorrechnung, bei der die Summenzeichen unterdrückt werden.

2. Krümmungstensor, Krümmungsmaß und Krümmungsskalar[12]).

Durch Auflösung der Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial(F^2)}{\partial x'^i} - \frac{\partial(F^2)}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ F \equiv F(x, x')), \tag{4}$$

nach den zweiten Ableitungen x'', die wegen der vorausgesetzten Regularität des betrachteten Variationsproblemes möglich ist, erhält man Gleichungen der Gestalt

$$x''^k + 2\,\Gamma^k(x, x') = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

in denen die Funktionen Γ^k in den x' positiv-homogen von der Dimension 2 sind. Setzen wir

$$\frac{\partial \Gamma^k}{\partial x'^l} = \Gamma^k_l, \qquad \frac{\partial^2 \Gamma^k}{\partial x'^l\, \partial x'^m} = \Gamma^k_{lm}, \tag{6}$$

---

[10]) Wegen der weiteren Voraussetzungen, die über F zu machen sind, vgl. L. Berwald a. a. O., Nr. 1.

[11]) Gelegentlich, so namentlich in den Abschnitten 6 bis 9, haben wir, um umständlichere Schreibweisen zu vermeiden, den Punkt als Differentiationszeichen auch dort benutzt, wo der Parameter nicht notwendig die im Texte angegebene Bedeutung hat, sondern beliebig bleiben darf. Daß dadurch Mißverständnisse entstehen könnten, ist wohl nicht zu befürchten.

[12]) Vgl. hierzu L. Berwald a. a. O. Dort wird für $2\,\Gamma^k$ durchwegs φ^k geschrieben, und es werden für die Ableitungen der Γ^k nach den x' keine Abkürzungen benutzt, was die Schreibweise umständlicher macht.

so sind

$$(7)\qquad K_{k.lm}^{i}(x,x') = \left(\frac{\partial \Gamma_{kl}^{i}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^{i}}{\partial x'^{r}}\Gamma_{m}^{r}\right) - \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^{i}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma_{km}^{i}}{\partial x'^{r}}\Gamma_{l}^{r}\right) + \Gamma_{kl}^{r}\Gamma_{rm}^{i} - \Gamma_{km}^{r}\Gamma_{rl}^{i}$$

die Komponenten des *Krümmungstensors* unseres allgemeinen Raumes. Mittels des *metrischen Fundamentaltensors*, dessen Komponenten

$$(8)\qquad g_{ik}(x,x') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(F^2)}{\partial x'^{i}\,\partial x'^{k}} \qquad (F \equiv F(x,x'))$$

sind, lassen sich aus dem Krümmungstensor Skalare bilden. Bedeuten η^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Komponenten eines beliebigen kontravarianten Vektors im Punkte (x) und setzen wir

$$(9)\qquad K_{iklm} = g_{kp}K_{i.lm}^{p}, \qquad K_{il} = K_{i.lp}^{p},$$

so ist

$$(10)\qquad \mathfrak{K}(x,x',\eta) = \frac{K_{iklm}x'^{i}x'^{l}\eta^{k}\eta^{m}}{(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})x'^{i}x'^{l}\eta^{k}\eta^{m}}$$

das *Krümmungsmaß* des allgemeinen Raumes im Linienelement (x, x') nach der Flächenrichtung (x', η), und

$$(11)\qquad \mathfrak{K}(x,x') = \frac{1}{n-1}\frac{K_{ik}x'^{i}x'^{k}}{F^2(x,x')} = \frac{1}{n-1}K_{ik}x'^{i}x'^{k}$$

sein *Krümmungsskalar*[13]. In den Funktionen g_{ik}, $K_{i.lm}^{p}$, K_{iklm}, K_{ik} sind dabei überall die Argumente (x, x') zu nehmen. Der Krümmungsskalar drückt sich durch die $\Gamma^{i}(x,x')$ und ihre Ableitungen folgendermaßen aus:

$$(12)\qquad \mathfrak{K}(x,x') = \frac{1}{n-1}\left(2\frac{\partial \Gamma^{i}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \Gamma_{i}^{i}}{\partial x^{r}}x'^{r} + 2\Gamma_{ir}^{i}\Gamma^{r} - \Gamma_{r}^{i}\Gamma_{i}^{r}\right).$$

3. Der Krümmungsskalar eines allgemeinen Raumes mit geradlinigen Extremalen.

Wenn sich solche Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ einführen lassen, daß die Extremalen des Variationsproblems (1) durch $n-1$ lineare Gleichungen zwischen diesen Koordinaten dargestellt werden, so sprechen wir von einem *allgemeinen Raum mit geradlinigen Extremalen* und nennen die Ko-

---

[13]) Wir setzen allgemein

$$\mathfrak{K}\left(x,\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{n-1}\frac{K_{ik}\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^{i}}{dt}\frac{dx^{k}}{dt}}{F^2\left(x,\frac{dx}{dt}\right)},$$

so daß $\mathfrak{K}$ in den $\frac{dx}{dt}$ positiv-homogen von der Dimension Null ist. Eine entsprechende Bemerkung gilt für die g_{ik}, $K_{k.lm}^{i}$, K_{iklm} und für $\mathfrak{K}$.

ordinaten x ausgezeichnete Koordinaten[14]). Im folgenden betrachten wir durchwegs den Fall eines allgemeinen Raumes mit geradlinigen Extremalen, in dem ausgezeichnete Koordinaten x eingeführt sind. Dieser Fall liegt dann und nur dann vor, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x^r} x'^r = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ F \equiv F(x, x')). \tag{13}$$

Die Bedingungen (13) sind von der besonderen Wahl des Parameters unabhängig, können also z. B. auch

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial x^r} \dot{x}^r = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ F \equiv F(x, \dot{x})) \tag{14}$$

geschrieben werden.

Die Differentialgleichungen (5) der Extremalen haben jetzt die Gestalt

$$x''^k + 2p(x, x') x'^k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

wo p eine in den x' in erster Dimension positiv-homogene Funktion bezeichnet. Es ist also $\Gamma^k(x, x') = p(x, x') \cdot x'^k$. Mit diesen Werten der Γ^k erhält man aus (12)

$$\mathfrak{K}(x, x') = -\frac{\partial p}{\partial x^l} x'^l + p^2. \tag{16}$$

Beachtet man, daß wegen (13) und der Homogenität von p bei Differentiation längs einer Extremalen

$$p' = \frac{\partial p}{\partial x^l} x'^l - 2p^2, \tag{17}$$

so folgt aus (16), (17), (15)

$$\mathfrak{K}(x, x') = -p' - p^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x'''^i}{x'^i} - \frac{3}{2}\frac{(x''^l)^2}{(x'^l)^2}\right) \qquad (x'^i \neq 0). \tag{18}$$

Da die Extremalen wegen der zu Beginn dieses Abschnittes angegebenen Eigenschaft eine Parameterdarstellung der Form

$$x^i = a^i l + b^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ a^i, b^i \text{ Konstanten}) \tag{19}$$

besitzen, so kann man (18) auch in die Gestalt

$$\mathfrak{K}(x, x') = \frac{1}{2}\{l, s\} \tag{20}$$

setzen, wo $\{l, s\}$ der Schwarzsche Klammerausdruck ist. Für $n = 2$ findet sich diese Gleichung bei Funk a. a. O.

4. Kennzeichnung des Radiusvektors.

Um später den Gedankengang nicht unterbrechen zu müssen, beantworten wir jetzt die Frage, *durch welche partiellen Differentialgleichungen*

[14]) Siehe auch W. Wirtinger, Monatsh. f. Math. u. Phys. **32** (1923), S. 1—14. Dort finden sich insbesondere die Gleichungen (13), (15), (47) mit s als Parameter.

in einem n-dimensionalen euklidischen Raum ein Radiusvektor r, der von einem Linienelement in dessen Richtung zu einem Punkte einer festen Hyperfläche führt, als Funktion $r(x, \dot{x})$ des Ausgangslinienelementes gekennzeichnet ist, wenn die x^i rechtwinklige kartesische Koordinaten bedeuten. Wir setzen dabei die Funktion $r(x, \dot{x})$ etwa als für alle betrachteten Wertesysteme $x, \dot{x}$ regulär-analytisch voraus.

Verschieben wir das Ausgangslinienelement in der Richtung des Radiusvektors, so gilt offenbar

$$\frac{\partial r}{\partial l} \equiv \dot{x}^p \frac{\partial r}{\partial x^p} = -1. \tag{21}$$

(Man beachte, daß die $\dot{x}^p$ die Richtungskosinus des Linienelementes sind.) Lassen wir andererseits das Ausgangslinienelement um den Endpunkt des Radiusvektors rotieren, d. h. um den Punkt mit den Koordinaten

$$X^i = x^i + r\dot{x}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

so bleibt der Radiusvektor ungeändert. Er ist also eine absolute Invariante der $\frac{n(n-1)}{2}$-gliedrigen Gruppe der Drehungen des n-dimensionalen euklidischen Raumes um den Punkt (22). Die erzeugenden infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe

$$X_{ik}(f) = (x^i - X^i)\frac{\partial f}{\partial x^k} - (x^k - X^k)\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

transformieren die $x, \dot{x}$ nach

$$\begin{cases} X_{ik}(x^p) = (x^i - X^i)\,\delta_k^p - (x^k - X^k)\,\delta_i^p = -r(\dot{x}^i\delta_k^p - \dot{x}^k\delta_i^p), \\ X_{ik}(\dot{x}^p) = \frac{d}{dl}\{X_{ik}(x^p)\} = \dot{x}^i\delta_k^p - \dot{x}^k\delta_i^p, \end{cases} \tag{24}$$

wo $\delta_i^k = 0$ für $i \neq k$, $= 1$ für $i = k$ (nicht summieren!). Die Unveränderkeit des Radiusvektors $r(x, \dot{x})$ bei den Drehungen um seinen Endpunkt wird daher durch die Differentialgleichungen

$$X_{ik}(r(x, \dot{x})) \equiv \left(r\frac{\partial r}{\partial x^i} - \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^k - \left(r\frac{\partial r}{\partial x^k} - \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)\dot{x}^i = 0 \tag{25}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ausgedrückt.

Die Differentialgleichungen (21), (25) reichen zur Kennzeichnung des Radiusvektors auch hin, da sich durch zwei Bewegungen der angegebenen Art immer eines von zwei Linienelementen, die nach demselben Punkte einer festen Hyperfläche hinzielen, in das andere überführen läßt.

Die gefundenen Bedingungen (21), (25) lassen sich noch durch einfachere ersetzen, wenn wir voraussetzen, *daß die Funktion $r(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}$ positiv-homogen von der Dimension -1 ist.* Im folgenden wird sich diese Homogenitätseigenschaft überall ganz von selbst einstellen.

Es gilt dann

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i = -r.$$

Schreiben wir die Gleichungen (25) in der Form

$$(\beta) \qquad r\frac{\partial r}{\partial x^i} - \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i} = A\cdot\dot{x}^i,$$

wo A ein Proportionalitätsfaktor ist, so ergibt Multiplikation mit $\dot{x}^i$ und Summation wegen (3), (α) und (21) $A = 0$. Infolge der Homogenität von r reduzieren sich also die Gleichungen (25) auf

$$(26) \qquad \boxed{r\frac{\partial r}{\partial x^i} - \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i} = 0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Gleichung (21) läßt sich jetzt aus (26) durch Multiplikation mit $\dot{x}^i$, Summation und Berücksichtigung der Homogenität von r ableiten. Somit sind wir schließlich zu folgendem Ergebnis gelangt:

Die Differentialgleichungen (26) *stellen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, daß eine* (*nicht-negative, nicht identisch verschwindende*) *Funktion* $r(x, \dot{x})$, *die in den* $\dot{x}$ *positiv-homogen von der Dimension* -1 *ist, ein Radiusvektor ist, der von dem Linienelemente* $(x, \dot{x})$ *in dessen Richtung zu einem Punkte einer festen Hyperfläche führt.*

Bezeichnet man den Radiusvektor $r(x, -\dot{x})$, der vom entgegengesetzten Linienelement $(x, -\dot{x})$ in dessen Richtung zu einer festen Hyperfläche führt, auch mit $-\bar{r}(x, \dot{x})$, so genügt die (nicht-positive) Funktion $\bar{r}(x, \dot{x})$, falls sie in den $\dot{x}$ positiv-homogen von der Dimension -1 ist, gleichfalls Differentialgleichungen der Form (26).

Wir werden gelegentlich, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, eine Funktion mit der angegebenen Homogenitätseigenschaft, die nicht identisch Null ist und den Differentialgleichungen (26) genügt, einen *Radiusvektor* nennen, gleichviel, ob sie reell positiv, reell negativ oder komplex ist.

Für das Folgende ist es bequemer, die Differentialgleichungen (26) durch die zu ersetzen, welche für den *reziproken Wert eines Radiusvektors* (in dem soeben angegebenen Sinne)

$$(\gamma) \qquad \varrho = \frac{1}{r}$$

gelten. Sie lauten

$$(27) \qquad \boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i} = 0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei ist ϱ eine Funktion der $x, \dot{x}$, die in den $\dot{x}$ positiv-homogen von erster Dimension ist.

5. Kennzeichnung der Hilbertschen Geometrien.

Die Forderung, daß ein allgemeiner Raum mit geradlinigen Extremalen den konstanten negativen Krümmungsskalar $\mathfrak{K} = -\varkappa^2$ $(\varkappa > 0)$ habe, führt durch Integration von (20) (mit diesem Werte von $\mathfrak{K}$) auf

$$l = \frac{C_1 e^{\varkappa s} + C_2 e^{-\varkappa s}}{\bar{C}_1 e^{\varkappa s} + \bar{C}_2 e^{-\varkappa s}}, \tag{28}$$

wo $C_1, C_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$ Integrationskonstanten sind $(C_1 \bar{C}_2 - C_2 \bar{C}_1 \neq 0)$. Unter der Voraussetzung

$$\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 \neq 0 \tag{29}$$

ergibt die Substitution $m_1 = \frac{C_2}{\bar{C}_2}$, $m_2 = \frac{C_1}{\bar{C}_1}$ und Auflösung nach s

$$s = \frac{1}{2\varkappa} \log \left\{ \frac{l - m_1}{m_2 - l} : \frac{l_0 - m_1}{m_2 - l_0} \right\}. \tag{30}$$

Wir deuten nun die x^i als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten in einem n-dimensionalen euklidischen Raum und erhalten so eine Abbildung unseres allgemeinen Raumes auf einen euklidischen „Bildraum", von der wir im folgenden beständig Gebrauch machen. Dabei beschränken wir uns auf ein solches n-dimensionales Gebiet des allgemeinen Raumes, das sich auf ein *einfach-zusammenhängendes* n-dimensionales Gebiet des Bildraumes abbildet. Wir können dann $m_1 < m_2$ annehmen und erhalten für $m_1 < l < m_2$

$$\boxed{\frac{ds}{dl} \equiv F(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\varkappa} \left(\frac{1}{m_2 - l} + \frac{1}{l - m_1} \right)}. \tag{31}$$

Wir beweisen jetzt den Satz:

Die Größen

$$\varrho(x, \dot{x}) = \frac{1}{m_2 - l} \quad \text{und} \quad -\bar{\varrho}(x, \dot{x}) = \frac{1}{l - m_1} \tag{32}$$

sind die reziproken Werte von Radienvektoren, die von dem betrachteten Linienelement $(x, \dot{x})$ in dessen Richtung bzw. in der entgegengesetzten zu je einer festen Hyperfläche führen.

Die Endpunkte dieser Radienvektoren nennen wir mit Funk die *Mantelpunkte* der orientierten Geraden, die durch das Linienelement $(x, \dot{x})$ bestimmt wird.

Durch Einführung der Bezeichnungen (32) geht (31) über in

$$2\varkappa F = \varrho - \bar{\varrho} \tag{33}$$

und die Grundforderungen (14) in

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \dot{x}^i \partial x^p} \dot{x}^p = \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \bar{\varrho}}{\partial \dot{x}^i \partial x^p} \dot{x}^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{34}$$

Ferner ergibt sich aus (32) unmittelbar

$$(35) \qquad \dot{x}^p \frac{\partial \varrho}{\partial x^p} \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial l} = \frac{1}{(m_2 - l)^2} = \varrho^2, \quad \text{und ebenso:} \quad \dot{x}^p \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x^p} = \bar{\varrho}^2.$$

Zum Beweise des ausgesprochenen Satzes ist also nur noch zu zeigen, daß aus (33) bis (35) das System der Differentialgleichungen (27) für ϱ und das entsprechende für $\bar{\varrho}$, sowie die Homogenität erster Dimension von ϱ und $\bar{\varrho}$ in den $\dot{x}$ folgt.

Durch Differentiation von (35) nach $\dot{x}^i$ erhält man nach leichter Umformung

$$(a) \qquad 2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \dot{x}^i \partial x^p} \dot{x}^p$$

nebst der entsprechenden Gleichung für $\bar{\varrho}$, so daß (34) übergeht in

$$(34^*) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x^i} - \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \dot{x}^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Differentiation von (34*) nach l ergibt weiter

$$(b) \qquad \dot{x}^p \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i}\right) = \dot{x}^p \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x^i} - \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \dot{x}^i}\right),$$

wo nun die beiden Seiten zu berechnen sind. Wegen (35) und der daraus folgenden Gleichungen

$$\dot{x}^p \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\dot{x}^p \frac{\partial \varrho}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial(\varrho^2)}{\partial x^i} = 2\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial x^i},$$

$$\dot{x}^p \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i}\right) = \dot{x}^p \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^p \partial \dot{x}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left(\dot{x}^p \frac{\partial \varrho}{\partial x^p}\right) - \frac{\partial \varrho}{\partial x^i} = \frac{\partial(\varrho^2)}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \varrho}{\partial x^i} = 2\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \varrho}{\partial x^i},$$

sowie der entsprechenden Gleichungen für $\bar{\varrho}$ wird aus (b) nach Unterdrückung eines Zahlenfaktors 3

$$(36) \qquad \varrho\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i}\right) = \bar{\varrho}\left(\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x^i} - \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \dot{x}^i}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Da nach (33) wegen $F(x, \dot{x}) \neq 0$ auch $\varrho \neq \bar{\varrho}$, so folgt aus (34*) und (36)

$$(37) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial x^i} - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x^i} - \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial \dot{x}^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Endlich ist im vorliegenden durch (29) gekennzeichneten Falle keine der beiden Funktionen $\varrho(x, \dot{x})$, $\bar{\varrho}(x, \dot{x})$ identisch Null, wie die für (31) gegebene Herleitung zeigt. Daher folgt aus (37) durch Multiplikation mit $\dot{x}^i$, Summation und Beachtung von (35), daß die Funktionen $\varrho(x, \dot{x})$ und $\bar{\varrho}(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}$ positiv-homogen von erster Dimension sind.

Im allgemeinen beschreiben die Endpunkte der Radienvektoren $\frac{1}{\varrho} = m_2 - l$, $-\frac{1}{\bar{\varrho}} = l - m_1$ zwei verschiedene Hyperflächen, die *Mäntel*

oder *Mantelhyperflächen*. Die Forderung des *starken Monodromieaxioms*, d. h.

$$F(x, -\dot{x}) = F(x, \dot{x}) \tag{38}$$

zieht aber das Zusammenfallen beider Mäntel nach sich. Denn wegen (33) ist (38) gleichbedeutend mit

$$\varrho(x, -\dot{x}) - \bar{\varrho}(x, -\dot{x}) = \varrho(x, \dot{x}) - \bar{\varrho}(x, \dot{x}). \tag{39}$$

Differentiiert man diese Gleichung nach l, wendet also den Operator $\dot{x}^p \frac{\partial}{\partial x^p}$ auf sie an, so erhält man aus den Gleichungen (35), d. h. aus

$$\dot{x}^p \frac{\partial \varrho(x, \dot{x})}{\partial x^p} = \varrho^2(x, \dot{x}), \qquad (-\dot{x}^p) \frac{\partial \varrho(x, -\dot{x})}{\partial x^p} = \varrho^2(x, -\dot{x}) \tag{40}$$

und den entsprechenden Gleichungen für $\bar{\varrho}(x, \dot{x})$, $\bar{\varrho}(x, -\dot{x})$

$$-\varrho^2(x, -\dot{x}) + \bar{\varrho}^2(x, -\dot{x}) = \varrho^2(x, \dot{x}) - \bar{\varrho}^2(x, \dot{x}). \tag{41}$$

Division durch (39) gibt

$$-\varrho(x, -\dot{x}) - \bar{\varrho}(x, -\dot{x}) = \varrho(x, \dot{x}) + \bar{\varrho}(x, \dot{x}). \tag{42}$$

Hieraus und aus (39) folgt durch Addition bzw. Subtraktion

$$\varrho(x, \dot{x}) = -\bar{\varrho}(x, -\dot{x}), \qquad \varrho(x, -\dot{x}) = -\bar{\varrho}(x, \dot{x}),$$

d. h. beide Mäntel fallen zusammen.

Endlich zieht die Forderung, daß die Geraden die kürzesten Linien sein sollen, die Konvexität des einen jetzt vorhandenen Mantels nach sich, wie aus der Hilbertschen Note folgt[15]).

Endlich ist noch zu zeigen, daß das starke Monodromieaxiom unvereinbar ist mit der bisher durch (29) ausgeschlossenen Möglichkeit, daß eine der beiden Konstanten $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ Null ist. In diesem Falle gelangt man zu den n-dimensionalen „Geometrien der spezifischen Maßbestimmung" von Funk. Setzen wir etwa $\bar{C}_2 = 0$ voraus, so wird

$$\boxed{F(x, \dot{x}) \equiv \frac{ds}{dl} = \frac{1}{2\varkappa} \frac{1}{m_3 - l}}. \tag{43}$$

Hier ist wieder $\varrho = \frac{1}{m_3 - l}$ der reziproke Wert des Radiusvektors, der vom Linienelement $(x, \dot{x})$ in dessen Richtung zu einer festen Hyperfläche, dem *Mantel*, führt. Das folgt am einfachsten daraus, daß der vorliegende Fall der Grenzfall des früheren für $\bar{\varrho} \to 0$ ist, und läßt sich übrigens ähnlich wie oben auch direkt beweisen.

---

[15]) Zunächst nur für $n = 3$. Doch spielt offenbar die Anzahl der Dimensionen keine Rolle. Vgl. auch [16]).

Das starke Monodromieaxiom ist jetzt nicht erfüllt, wie aus der oben angestellten Betrachtung für $\bar{\varrho} = 0$ wegen $\varrho = 2\varkappa F + 0$ folgt. Wir zeigen das noch auf einem zweiten Wege, der eine unmittelbare geometrische Einsicht gewährt. Dazu führen wir die zum Punkte (x) gehörige Indikatrix ein, d. h. die Hyperfläche

$$F(x, \xi) = 1, \tag{44}$$

wobei die ξ^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ als laufende Koordinaten in einem ξ-Raum gedeutet werden. Dann gilt, wie sogleich nachgewiesen werden soll, ebenso wie für den zweidimensionalen Fall: Läßt man den ξ-Raum so mit dem x-Raum zusammenfallen, daß der Anfangspunkt des ξ-Raumes in den Bezugspunkt (x) des x-Raumes fällt, so geht die Indikatrix des Punktes (x) aus dem Mantel durch Streckung vom Punkte (x) aus im festen Verhältnis $2\varkappa : 1$ hervor[16]). Das starke Monodromieaxiom (das seinen geometrischen Ausdruck darin findet, daß die Indikatrix jedes Punktes (x) den Anfangspunkt des ξ-Raumes zum Mittelpunkt hat) kann daher nicht gelten.

Um die soeben ausgesprochene Behauptung über die Indikatrix zu beweisen, bemerken wir, daß der Mantelpunkt (X), der in die Richtung des Linienelementes $(x, \dot{x})$ fällt, bei Gebrauch der Abkürzung $m_2 - l = r(x, \dot{x})$ in bezug auf den Punkt (x) als Ursprung die Koordinaten

$$\xi^i = X^i - x^i = r(x, \dot{x})\dot{x}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

hat. Es wird also wegen (43)

$$F(x, \xi) = F(x, r\dot{x}) = r F(x, \dot{x}) = (m_2 - l) F(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\varkappa}, \tag{46}$$

w. z. b. w.

Ebenso erledigt sich der Fall $\bar{C}_1 = 0$, der aus (33) für $\varrho \to 0$ hervorgeht.

Somit sind durch die eingangs formulierten Forderungen die n-dimensionalen Hilbertschen Geometrien vollständig gekennzeichnet.

---

[16]) Diese Eigenschaft der Indikatrix besagt u. a.: Alle Richtungen durch den Punkt (x), die zum Linienelement $(x, \dot{x})$ transversal sind, liegen in einer Hyperebene, die parallel ist zur Tangentenhyperebene des Mantels im Mantelpunkte der durch das Linienelement $(x, \dot{x})$ bestimmten orientierten Geraden. Man bestätigt mittels der Formeln (61) des Textes leicht, daß dieser Eigenschaft im allgemeinen Fall (31) die folgende entspricht: Durch das Linienelement $(x, \dot{x})$ wird eine orientierte Gerade g bestimmt. Die Tangentenhyperebenen der Mäntel (bzw. des Mantels) in den Mantelpunkten von g seien ε_1 und ε_2. Alle Richtungen durch den Punkt (x), die zum Linienelement $(x, \dot{x})$ transversal sind, liegen dann in der Hyperebene durch (x), die durch den Schnitt von ε_1 und ε_2 geht, also dem durch ε_1 und ε_2 bestimmten Büschel von Hyperebenen angehört. — Herr Blaschke hatte die Freundlichkeit, mir mitzuteilen, daß ihm die letzte Eigenschaft (im Falle der Hilbertschen Geometrien) bekannt war.

6. Gemeinsame Behandlung der Geometrien mit konstantem Krümmungsskalar.

Wir leiten im folgenden das Hauptergebnis des vorigen Abschnitts noch auf einem zweiten Wege ab, der die drei Fälle konstanten Krümmungsskalars ($\mathfrak{K} \gtreqless 0$) gleichmäßig berücksichtigt.

Unseren Ausgangspunkt bildet dabei die im dritten Abschnitt eingeführte Funktion $p(x, \dot{x})$, die wir zunächst durch die Funktion F und deren Ableitungen ausdrücken. Die Identität $\frac{dF(x, x')}{ds} = 0$ ergibt, wenn wir die Ableitung längs einer Extremalen (15) bilden, die Homogenität erster Dimension von F in den x' beachten und die erste Gleichung (3) berücksichtigen,

$$x'^r \frac{\partial F(x, x')}{\partial x^r} = 2\,p(x, x'),$$

oder nach Einführung der euklidischen Bogenlänge l als Parameter

$$\boxed{\dot{x}^r \frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial x^r} - 2\,p(x, \dot{x})\,F(x, \dot{x}) = 0}. \tag{47}$$

Durch Differentiation von (47) nach $\dot{x}^i$ erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial x^r}\dot{x}^r = 2\left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i}F + p\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right),$$

so daß sich die Grundforderungen (14) durch

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x^i} = p\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i}F} \tag{48}$$

ersetzen lassen.

Jetzt benutzen wir Gleichung (16), die nach Einführung von l als Parameter in

$$\dot{x}^r \frac{\partial p}{\partial x^r} - p^2 = -\,\mathfrak{K}\,F^2 \tag{49}$$

übergeht. *Wenn $\mathfrak{K}$ eine bloße Ortsfunktion ist*, so ergibt Differentiation von (49) nach $\dot{x}^i$

$$\dot{x}^r \frac{\partial^2 p}{\partial x^r \partial \dot{x}^i} = 2p\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial p}{\partial x^i} - 2\,\mathfrak{K}\,F\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}. \tag{50}$$

Durch Ableitung von (48) nach der euklidischen Bogenlänge l, also Anwendung des Operators $\dot{x}^r \frac{\partial}{\partial x^r}$ folgt bei Berücksichtigung von (48) bis (50), (14), (47)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^r}\dot{x}^r = (2p^2 - 3\,\mathfrak{K}\,F^2)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} + \left(5p\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial p}{\partial x^i}\right)F.$$

Anderseits führt Ableitung von (47) nach x^i mittels (48) zu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^r}\dot{x}^r = 2p^2\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} + \left(2p\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i} + 2\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)F.$$

Durch Gleichsetzen erhält man wegen $F \neq 0$ für p das System der Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x^i} - p\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i} = -\mathfrak{K}F\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{51}$$

Im Falle $\mathfrak{K} = 0$ reduziert sich dieses System auf

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - p\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{51*}$$

Im Falle konstanten $\mathfrak{K} \neq 0$ folgt durch Multiplikation von (48) mit $\pm\sqrt{-\mathfrak{K}}$ und Addition zu (51) nach leichter Umformung das mit (48), (51) äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i}(p + F\sqrt{-\mathfrak{K}}) - (p + F\sqrt{-\mathfrak{K}})\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}(p + F\sqrt{-\mathfrak{K}}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^i}(p - F\sqrt{-\mathfrak{K}}) - (p - F\sqrt{-\mathfrak{K}})\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}(p - F\sqrt{-\mathfrak{K}}) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{52}$$

(52) besagt, daß

$$p + F\sqrt{-\mathfrak{K}} = \varrho, \quad p - F\sqrt{-\mathfrak{K}} = \bar{\varrho} \tag{53}$$

zwei reziproke Radienvektoren sind, die im Falle $\mathfrak{K} > 0$ konjugiert-komplex, im Falle $\mathfrak{K} < 0$ reell sind. Aus (53) folgt

$$F = \frac{1}{2\sqrt{-\mathfrak{K}}}(\varrho - \bar{\varrho}), \quad p = \frac{\varrho + \bar{\varrho}}{2}, \tag{54}$$

womit für negatives $\mathfrak{K} = -\varkappa^2$, $\sqrt{-\mathfrak{K}} = \varkappa$ im wesentlichen das Hauptergebnis des vorigen Abschnittes (vgl. (33) und (43)) auf neuem Wege abgeleitet ist. Aus $F \neq 0$, (51), (54) ergibt sich noch $\varrho^2 \neq \bar{\varrho}^2$

7. Die Geometrien von der Krümmung Null mit geradlinigen Extremalen.

Im Falle $\mathfrak{K} = 0$ der Geometrien mit geradlinigen Extremalen von der „Krümmung" Null — wie wir im Hinblick auf ein im nächsten Abschnitt abzuleitendes Ergebnis sagen wollen — hat man zur Bestimmung der Grundfunktion F die Gleichungssysteme (51*) und (48).

Die Gleichungen (51*) sagen aus, *daß für diese Geometrien von der Krümmung Null die Funktion* $p(x, \dot{x})$ *entweder identisch verschwindet oder ein reziproker Radiusvektor ist.* Wenn $p = 0$, so zeigt (48), daß F

nur von den $\dot{x}$ abhängt, also der *Fall einer Minkowskischen Geometrie* vorliegt. Ist $p \neq 0$, so ist auf jeder orientierten Geraden (für die p reell ausfällt) ein einziger Mantelpunkt vorhanden. In diesem Falle ergibt sich durch Einführung des Radiusvektors $r = \frac{1}{p}$ in (48) zur Bestimmung von F das System der Differentialgleichungen

$$r^2 \frac{\partial F}{\partial x^i} - r \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i} F = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{55}$$

Zur Integration dieses Systems bemerken wir vorerst, daß der Quotient $q = \frac{F}{F_0}$ irgend zweier Lösungen F und $F_0 \neq 0$ von (55) dem Gleichungssystem

$$X_i(q) \equiv r \frac{\partial q}{\partial x^i} - \frac{\partial q}{\partial \dot{x}^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{56}$$

genügt. Weiter ist

$$F_0 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2}, \tag{57}$$

wo das Wurzelzeichen die positive Wurzel bedeutet, eine Lösung von (55), wie man mittels (26) unschwer feststellt. Diese Lösung ist in den $\dot{x}$ von der Dimension -2 positiv-homogen. Die allgemeinste Lösung von (55), die in den $\dot{x}$ von erster Dimension positiv-homogen ist, kann also in der Form

$$F = q \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2} \tag{58}$$

angesetzt werden, wo q die allgemeinste Lösung der Gleichungen (56) bedeutet, die in den $\dot{x}$ positiv-homogen von dritter Dimension ist.

Es ist nun aber leicht, diese Lösung anzugeben. Die n homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (56) in den $2n$ unabhängigen Veränderlichen x^i, $\dot{x}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bilden ein Involutionssystem, da wegen (26) alle Klammerausdrücke $(X_i(q), X_k(q))$ identisch verschwinden. Nach (26) ist r selbst eine Lösung dieses Systems, und man überzeugt sich davon, daß auch die Koordinaten $x^i + r\dot{x}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Mantelpunkte Lösungen sind. Da zwischen diesen Koordinaten eine Beziehung, nämlich die Gleichung der Mantelhyperfläche besteht, so kennt man im ganzen gerade n unabhängige Lösungen. Die allgemeinste Lösung des Systems (56) ist daher

$$q = \mu\,(x^1 + r\dot{x}^1,\ x^2 + r\dot{x}^2,\ \ldots,\ x^n + r\dot{x}^n,\ r),$$

unter μ eine willkürliche Funktion verstanden[17]). Nun sind in μ alle Argu-

[17]) Wir haben hier der Symmetrie halber alle Argumente $x^i + r\dot{x}^i$ angeschrieben.

mente bis auf r in den $\dot{x}$ von nullter Dimension positiv-homogen; r dagegen ist in den $\dot{x}$ von der Dimension -1 positiv-homogen. Die allgemeinste Lösung des Systems (56), die in den $\dot{x}$ von der Dimension drei positiv-homogen ist, hat also die Form

$$q = \frac{1}{r^3}\,\Psi(x^1 + r\dot{x}^1,\ x^2 + r\dot{x}^2,\ \ldots,\ x^n + r\dot{x}^n), \tag{59}$$

wo Ψ eine willkürliche Funktion seiner n Argumente bedeutet.

Durch Einsetzen des Wertes (59) in (58) erhält man schließlich

$$\boxed{F = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2}}{r^3}\cdot\Psi(x^1 + r\dot{x}^1,\ x^2 + r\dot{x}^2,\ \ldots,\ x^n + r\dot{x}^n)}, \tag{60}$$

wo Ψ (bis auf die erforderlichen Regularitäts- und Vorzeichenbedingungen[18]) willkürlich bleibt.

Um den geometrischen Inhalt dieses Ergebnisses hervortreten zu lassen, bestimmen wir den Winkel $\frac{\pi}{2} - \chi$, den die Richtung des Linienelementes $(x, \dot{x})$ mit der in geeigneter Weise orientierten Normalen der Mantelhyperfläche im Mantelpunkte (22) bildet. Für die Richtungskosinus ζ^i dieser Normalen findet man nach einiger Rechnung, bei der die Homogenitätseigenschaft des Radiusvektor r zu benutzen ist,

$$\zeta^i = -\frac{\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^i}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{61}$$

---

[18]) so daß $F > 0$. — Das Analogon der für $n = 2$ für jedes Linienelement zu fordernden Legendreschen Bedingung $F_1 > 0$ (vgl. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, S. 267) besagt, daß

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}\,\xi^i \xi^k > 0 \tag{A}$$

für jeden vom Vektor $(\dot{x})$ linear unabhängigen Vektor (ξ) gilt. (A) reduziert sich bei den Grundfunktionen (31), (43), (60) bezüglich auf

$$\frac{\partial^2(\varrho - \bar{\varrho})}{\partial x^i \partial x^k}\,\xi^i \xi^k < 0, \qquad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^i \partial x^k}\,\xi^i \xi^k < 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial x^k}\,\xi^i \xi^k > 0,$$

wobei $W = \frac{1}{r}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2}\cdot\Psi$ gesetzt ist. Aus der ersten dieser Ungleichungen läßt sich die Konvexität des Mantels im Falle der Hilbertschen Geometrie auch direkt ableiten.

Für $\sin\chi$ ergibt sich mittels der Homogenitätseigenschaft von r

$$\sin\chi = \frac{r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\dot{x}^k)^2}}. \tag{62}$$

Wegen (62) und (2) *nimmt das Bogenelement* $ds = F(x,\dot{x})\,dl$ *im Falle einer Nicht-Minkowskischen Geometrie von der Krümmung Null mit geradlinigen Extremalen schließlich die Gestalt*

$$\boxed{ds = \frac{1}{r^2\sin\chi}\cdot\Psi(x^1 + r\dot{x}^1, x^2 + r\dot{x}^2, \ldots, x^n + r\dot{x}^n)\,dl} \tag{60*}$$

an. Hier hat Ψ für alle in einen und denselben Mantelpunkt einmündenden (bzw. von einem und demselben Mantelpunkt ausgehenden) orientierten Geraden offenbar denselben Wert.

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Funk für $n = 2$ gefundenen vollkommen überein. Auch die für $n = 2$ von Funk an diese Gestalt des Bogenelementes geknüpften Folgerungen lassen sich unmittelbar auf den n-dimensionalen Fall übertragen.

Die im vorstehenden behandelten Geometrien von der Krümmung Null sind auch für die allgemeine Theorie der Räume mit nicht-quadratischer Maßbestimmung von Interesse. Jede in der Formel (60) enthaltene Grundfunktion F, für die nicht sämtliche

$$F\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^p}\Gamma^p_{.ikl} \qquad \left(i,k,l = 1,2,\ldots,n;\ \Gamma^p_{.ikl} = \frac{\partial^3\Gamma^p(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^k\partial\dot{x}^l}\right)$$

identisch verschwinden, definiert nämlich das Bogenelement eines *allgemeinen metrischen Raumes ohne Streckenkrümmung, der kein Landsbergscher Raum ist*[19]).

Ein einfaches derartiges Bogenelement ist z. B. das folgende

$$ds = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\frac{dx^i}{dt}\right) - \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\cdot\left\{1-\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right\} + \left\{\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\frac{dx^i}{dt}\right)\right\}^2}\right]^2}{\left[1-\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^2\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\cdot\left\{1-\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right\} + \left\{\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\frac{dx^i}{dt}\right)\right\}^2}}\,dt, \tag{63}$$

dessen Mantel die $(n-1)$-dimensionale Einheitskugel ist.

---

[19]) Über die Begriffsbildungen „allgemeiner metrischer Raum ohne Streckenkrümmung" und „Landsbergscher Raum", vgl. etwa L. Berwald, Journ. f. Math. **156** (1927), S. 191—210, bes. § 3 ($n = 2$), Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 40—73, bes. § 4, sowie einen in den Atti des internationalen Mathematikerkongresses in Bologna erscheinenden Vortrag des Verfassers.

Wir zeigen endlich noch, daß *jede Geometrie von der Krümmung Null mit geradlinigen Extremalen, die das starke Monodromieaxiom erfüllt, notwendigerweise eine Minkowskische Geometrie ist.*

In der Tat folgt aus der Forderung (38) des starken Monodromieaxioms und der Gleichung (47) für p

$$p(x, -\dot{x}) = -p(x, \dot{x}).$$

Es sei nun zunächst $p \neq 0$. Dann ist auch, wenn wieder $p = \frac{1}{r}$ gesetzt wird,

$$r(x, -\dot{x}) = -r(x, \dot{x})$$

und daher

$$\frac{\partial r(x, -\dot{x})}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial r(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k},$$

$$x^k + r(x, -\dot{x}) \cdot (-\dot{x}^k) = x^k + r(x, \dot{x}) \cdot \dot{x}^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Beim Übergang zum entgegengesetzten Linienelement bleibt in (60) also der Radikand $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial \dot{x}^k}\right)^2$, ferner jedes Argument von Ψ, und daher der ganze Faktor von $\frac{1}{r^3}$ ungeändert, während $\frac{1}{r^3}$ in den entgegengesetzten Wert übergeht. Demnach würde aus (60)

$$F(x, -\dot{x}) = -F(x, \dot{x})$$

folgen, was wegen $F \neq 0$ mit (38) unverträglich ist.

Somit bleibt nur die Möglichkeit $p = 0$, und es liegt eine Minkowskische Geometrie vor.

8. Identität des Krümmungsmaßes und Krümmungsskalars bei allgemeinen Räumen mit geradlinigen Extremalen.

In den beiden letzten Abschnitten leiten wir einige allgemeine Sätze über die Räume mit geradlinigen Extremalen, insbesondere diejenigen konstanten Krümmungsskalars ab. Zunächst behaupten wir:

Das Krümmungsmaß eines beliebigen allgemeinen Raumes mit geradlinigen Extremalen in einem willkürlichen Linienelement ist nach jeder Flächenrichtung durch das Linienelement dasselbe und daher gleich dem Krümmungsskalar.

Zum Beweise geben wir vorerst die Gleichungen an, die im allgemeinen Falle, in dem der Krümmungsskalar $\mathfrak{K}$ vom Linienelement $(x, \dot{x})$ abhängt, an die Stelle von (50) und (51) treten. Man erhält auf dieselbe Weise, wie unter der besonderen Annahme $\mathfrak{K}$ = Ortsfunktion im sechsten Abschnitt

$$\dot{x}^l \frac{\partial^2 p}{\partial x^l \partial \dot{x}^m} = 2p \frac{\partial p}{\partial \dot{x}^m} - \frac{\partial p}{\partial x^m} - \frac{\partial (\mathfrak{K} F^2)}{\partial \dot{x}^m}, \tag{50a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x^m} - p \frac{\partial p}{\partial \dot{x}^m} = -\frac{1}{3F} \frac{\partial (\mathfrak{K} F^3)}{\partial \dot{x}^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{51a}$$

Nun berechnen wir nach (10) das Krümmungsmaß $\mathfrak{R}(x, x', \eta)$. Wegen der Homogenität nullter Dimension von $\mathfrak{R}(x, x', \eta)$, $g_{ik}(x, x')$, $K_{iklm}(x, x')$, $K_{i\,lm}^{p}(x, x')$ in den x' dürfen wir überall etwa die euklidische Bogenlänge l als unabhängige Veränderliche wählen. Aus (7) und (9) folgt dann

$$(\alpha) \qquad K_{ik\,lm}\dot{x}^i\dot{x}^l = g_{kq}K_{i\,lm}^{q}\dot{x}^i\dot{x}^l$$

$$= g_{kq}\left(2\frac{\partial\Gamma_m^q}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma_m^q}{\partial x^l}\dot{x}^l + 2\Gamma^r\Gamma_{mr}^q - \Gamma_r^q\Gamma_m^r\right),$$

wo in allen Funktionen die Argumente $x, \dot{x}$ zu nehmen sind. Da nun unser allgemeiner Raum nach Voraussetzung lauter geradlinige Extremalen hat, so ist $\Gamma^q(x, \dot{x}) = p(x, \dot{x})\cdot\dot{x}^q$, und hieraus folgt nach leichter Rechnung

$$2\frac{\partial\Gamma_m^q}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma_m^q}{\partial x^l}\dot{x}^l + 2\Gamma^r\Gamma_{mr}^q - \Gamma_r^q\Gamma_m^r$$

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial x^m} - \dot{x}^l\frac{\partial^2 p}{\partial x^l\,\partial\dot{x}^m}\right)\dot{x}^q + \left(p^2 - \frac{\partial p}{\partial x^l}\dot{x}^l\right)\delta_m^q - \left(p\frac{\partial p}{\partial\dot{x}^m} - \frac{\partial p}{\partial x^m}\right)\dot{x}^q,$$

wo wieder $\delta_k^i = 0$ für $i \neq k$, $= 1$ für $i = k$. Wegen (49), (50a), (51a) vereinfacht sich das nach einigen Umformungen zu

$$2\frac{\partial\Gamma_m^q}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma_m^q}{\partial x^l}\dot{x}^l + 2\Gamma^r\Gamma_{mr}^q - \Gamma_r^q\Gamma_m^r = \mathfrak{K}\left(F^2\delta_m^q - F\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^m}\dot{x}^q\right).$$

Da nun wegen der Definition (8) der g_{ik} und der Homogenitätseigenschaft von F

$$F^2(x, \dot{x}) = g_{ik}(x, \dot{x})\cdot\dot{x}^i\dot{x}^k, \qquad F\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^m} = g_{im}(x, \dot{x})\cdot\dot{x}^i,$$

so ergibt sich aus (α) schließlich

$$K_{iklm}\dot{x}^i\dot{x}^l = \mathfrak{K}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})\dot{x}^i\dot{x}^l.\ ^{20})$$

Somit wird nach (10)

$$(64) \qquad \boxed{\mathfrak{R}(x, \dot{x}, \eta) = \mathfrak{K}(x, \dot{x})}.$$

Wegen des Invariantencharakters von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{K}$ ist (64) unabhängig von dem bei der Herleitung verwendeten Koordinatensystem.

In (64) ist insbesondere die in der Einleitung ausgesprochene Identität der Paare von Bedingungen 1, 2 und 1, 2* enthalten.

---

[20]) Wegen

$$(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})\dot{x}^i\dot{x}^l = F^2\frac{\partial^2 F}{\partial\dot{x}^k\,\partial\dot{x}^m}$$

sind hier, wie überall, wo vom Krümmungsmaß $\mathfrak{R}(x, \dot{x}, \eta)$ die Rede ist, jene Flächenrichtungen $(\dot{x}, \eta)$ durch das Linienelement $(x, \dot{x})$ von der Betrachtung auszuschließen, für die

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\dot{x}^k\,\partial\dot{x}^m}\eta^k\eta^m = 0.$$

Wir kehren nun zu dem besonderen Fall $\mathfrak{K} = \text{konst.}$ zurück und berechnen noch nach (7) die *Komponenten des Krümmungstensors für einen solchen Raum konstanter „Krümmung" mit geradlinigen Extremalen.* Es wird

$$(\beta) \qquad K_{i\cdot lm}^{q} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\left\{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^m \partial x^l}\right)\dot{x}^q + \left(\frac{\partial p}{\partial x^m} - p\,\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^m}\right)\delta_l^q - \left(\frac{\partial p}{\partial x^l} - p\,\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^l}\right)\delta_m^q\right\}$$

mit denselben Werten der δ_k^i wie oben. Wenn nun der Krümmungsskalar den konstanten Wert $\mathfrak{K}$ hat, so folgt aus (51) durch Differentiation nach $\dot{x}^k$, Vertauschung von i und k und Subtraktion (nach leichter Veränderung der Bezeichnung)

$$(65) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^m \partial x^l} = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, n),$$

und (β) nimmt wegen (65), (51) und (8) die Gestalt an

$$(66) \qquad \boxed{K_{i\cdot lm}^{q} = \mathfrak{K}\,(g_{il}\,\delta_m^q - g_{im}\,\delta_l^q)} \qquad (i, l, m, q = 1, 2, \ldots, n),$$

die für den besonderen Fall eines Riemannschen Raumes wohlbekannt ist.

9. Unmöglichkeit allgemeiner Räume mit geradlinigen Extremalen, deren Krümmungsskalar eine nicht-konstante Ortsfunktion ist.

Zum Schlusse beweisen wir noch folgenden Satz, der auch an und für sich von Interesse ist:

Es gibt keinen allgemeinen Raum mit geradlinigen Extremalen, dessen Krümmungsskalar eine nicht-konstante Ortsfunktion ist[21]).

Dazu zeigen wir, daß die Annahme, ein allgemeiner Raum besitze lauter geradlinige Extremalen und sein Krümmungsskalar sei eine Ortsfunktion, die Unabhängigkeit des Krümmungsskalars vom Orte zur Folge hat.

Wegen der soeben ausgesprochenen Annahme gelten gleichzeitig die Gleichungen (48) und (51). Aus (51) leitet man, da $\mathfrak{K}$ von den $\dot{x}$ nicht abhängt, auf dieselbe Weise wie im vorigen Abschnitt die Gleichungen (65) ab. Differentiiert man anderseits (51) nach x^k, vertauscht i und k und zieht die eine der so erhaltenen Gleichungen von der anderen ab, so erhält man wegen (65)

---

[21]) Für $n > 2$ ergibt sich dieser Satz auch aus folgender *Verallgemeinerung des Satzes von Schur über Riemannsche Räume* (F. Schur, Math. Ann. 27 (1886), S. 537–567), die hier nur ohne Beweis angeführt sei:

Wenn das Krümmungsmaß eines allgemeinen metrischen Raumes von $n > 2$ Dimensionen in einem willkürlichen Linienelement nach jeder Flächenrichtung durch das Linienelement dasselbe ist und wenn es bloß vom Orte abhängt – anstatt vom Linienelement, wie das sonst der Fall ist –, *so ist es konstant.*

(a)
$$\frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial p}{\partial x^k}\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i}$$
$$= F\left(\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^k}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) + \mathfrak{K}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) + \mathfrak{K}F\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial \dot{x}^k} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial \dot{x}^i}\right).$$

Nun folgt aus (48)

(b)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial \dot{x}^k} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial \dot{x}^i} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^i}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \dfrac{\partial F}{\partial x^k}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = F\left(\dfrac{\partial p}{\partial \dot{x}^i}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \dfrac{\partial p}{\partial \dot{x}^k}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right), \end{cases}$$

und aus (51)

(c)
$$\frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial p}{\partial x^k}\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i} = \mathfrak{K}F\left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial p}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right).$$

Durch Einsetzen dieser Werte reduziert sich (a) wegen $F \neq 0$ auf

(67)
$$\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^k}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0.$$

Durch Ableitung von (67) nach $\dot{x}^l$, darauffolgende Multiplikation mit $\dot{x}^i$ und Summation über i erhält man infolge der Homogenitätseigenschaft von F

(68)
$$\left(\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^i}\dot{x}^i\right)\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l} = 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun sind die $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}$ sicher nicht alle Null, weil F als Grundfunktion eines regulären Variationsproblems nicht linear in den $\dot{x}$ sein kann. Somit folgt aus (68)

(69)
$$\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^i}\dot{x}^i = 0,$$

und hieraus, da $\mathfrak{K}$ nach Voraussetzung Ortsfunktion ist

(70)
$$\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h. $\mathfrak{K}$ ist konstant, w. z. b. w.

Prag, Dezember 1928.

(Eingegangen am 30. Dezember 1928.)

Natürliche Gleichung der Kurven auf einer allgemeinen Fläche im metrischen Raume.

Von

V. Hlavatý in Prag.

Die natürliche Gleichung aller Kurven, die in einer Ebene liegen, ist bekanntlich

$$\text{Windung} = 0.$$

Nun kann man die Frage aufwerfen, *welche ist die natürliche Gleichung aller Kurven, die auf einer allgemeinen Fläche liegen?* Dieses Problem wollen wir hier lösen: Wir geben zwei Gleichungen an, aus welchen durch Elimination eines Skalars die gesuchte Gleichung aufgestellt werden kann. Dabei werden wir die Fläche V_2 nicht in einem euklidischen Raume, sondern etwas allgemeiner in einem Riemannschen Raume (mit positiv def. Form) V_3 voraussetzen.

Beschränkt man sich auf besondere Kurven, so gibt unsere Methode *beide* natürliche Gleichungen. Wir werden die Gelegenheit haben, einige solche Beispiele (geodätische Kreise, asymptotische Kurven, Krümmungskurven usw.) im Laufe der Rechnung anzugeben.

§ 1 enthält nur vorbereitende Sätze. Das Resultat befindet sich im § 4, während §§ 2 und 3 der Ausarbeitung der Methode gewidmet sind.

§ 1.

Einleitende Sätze[1]).

1. In diesem Paragraphen führen wir einige bekannte Sätze und Größen an: Mit $g_{\lambda\mu}$ [2]) bezeichnen wir den metrischen (fundamentalen) Tensor der V_3, mit d_μ den korrespondierenden symbolischen Vektor der

[1]) Zu diesem Paragraphen vergleiche: J. A. Schouten, „Der Ricci-Kalkül“ (Berlin 1924), fünfter Abschnitt.

[2]) Die griechischen Indizes durchlaufen stets die Werte 1, 2, 3 zur Unterscheidung von den lateinischen Indizes, die die Werte 1, 2 durchlaufen.

kovarianten Derivation und mit $k_{\omega\mu\lambda\nu}$ den zugehörigen Riemann-Christoffelschen Affinor.

Die reguläre Fläche V_2 denken wir uns durch die Gleichungen

$$x^\nu = x^\nu(u_1, u_2)$$

gegeben und bezeichnen mit $G_{\lambda\mu}$ ihren ersten (metrischen) fundamentalen Tensor, mit D_μ den korrespondierenden symbolischen Vektor der kovarianten Derivation und mit $K_{\omega\mu\lambda\nu}$ den zugehörigen Riemann-Christoffelschen Affinor. Es sei ausdrücklich erwähnt, daß $g_{\lambda\mu}$ den Rang 3 hat, während $G_{\lambda\mu}$ den Rang 2 besitzt.

Gelegentlich werden wir auch für $G_{\lambda\mu}$ die klassische Bezeichnung benützen

$$E = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1} g_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1} G_{\lambda\mu}, \qquad F = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2} G_{\lambda\mu}, \qquad G = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2} G_{\lambda\mu}.$$

Der zweite fundamentale Tensor (vom Range 2) der V_2 ist durch

$$H_{\lambda\mu} = H_{\mu\lambda} = g^{\alpha\beta} G_{\mu\beta} d_\alpha n_\lambda$$

definiert. n_λ ist dabei der zu V_2 orthogonale Einheitsvektor. Diesen Tensor werden wir auch gelegentlich mit L, M, N bezeichnen:

$$L = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1} H_{\lambda\mu}, \qquad M = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1}\frac{\partial x^\mu}{\partial x_2} H_{\lambda\mu}, \qquad N = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2} H_{\lambda\mu}.$$ [2a])

Außerdem werden wir noch von dem kubischen Tensor

$$H_{\omega\mu\lambda} = H_{\omega\lambda\mu} = D_\omega H_{\mu\lambda}$$

Gebrauch machen und bezeichnen seine V_2-Bestimmungszahlen mit

$$L_a = \frac{\partial x^\omega}{\partial u_a}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_1} H_{\omega\mu\lambda}, \qquad M_a = \frac{\partial x^\omega}{\partial u_a}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_1}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2} H_{\omega\mu\lambda},$$

$$N_a = \frac{\partial x^\omega}{\partial u_a}\frac{\partial x^\mu}{\partial u_2}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u_2} H_{\omega\mu\lambda}, \qquad (a = 1, 2).$$

Die Größen $k_{\omega\mu\lambda\nu}$, $K_{\omega\mu\lambda\nu}$, $H_{\mu\lambda}$ sind durch die Gaußsche Gleichung

$(1)_a$ $$G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\omega\mu\lambda\nu} k_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_{\omega\mu\lambda\nu} + H_{\omega\nu} H_{\mu\lambda} - H_{\omega\lambda} H_{\mu\nu}$$

verknüpft. Dabei ist

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\omega\mu\lambda\nu} = G_{\omega\varepsilon} G_{\mu\varphi} G_{\lambda\psi} G_{\nu\varrho}\, g^{\varepsilon\alpha} g^{\varphi\beta} g^{\psi\gamma} g^{\varrho\delta}.$$

In unserem einfachen Falle läßt sich die Gaußsche Gleichung auch skalar schreiben:

$(1)_b$ $$-(k - K) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Die Bedeutung von k und K ist aus $(1)_a$ leicht ersichtlich. —

[2a]) Der Tensor L, M, N und der Skalar H korrespondieren mit den „klassischen" $-L, -M, -N, -H$.

Mit H bezeichnen wir den Skalar

$$2H = g^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} = G^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}. \quad (2)$$ [2a)]

2. Mit einer gegebenen Kurve C in V_3 sind bekanntlich folgende metrische Begriffe invariant verknüpft: Der tangentiale Einheitsvektor $\overset{i}{1}{}^{\nu}$, der normale Einheitsvektor $\overset{i}{2}{}^{\nu}$, der binormale Einheitsvektor $\overset{i}{3}{}^{\nu}$, die Krümmung λ und die Windung ω. Die gegenseitige Beziehung dieser Begriffe geben die Frenetschen Formeln an

$$(3)_a \quad \overset{i}{1}{}^{\mu} d_\mu \overset{i}{1}{}^{\nu} = \lambda \overset{i}{2}{}^{\nu}; \quad \overset{i}{1}{}^{\mu} d_\mu \overset{i}{2}{}^{\nu} = -\lambda \overset{i}{1}{}^{\nu} + \omega \overset{i}{3}{}^{\nu}; \quad \overset{i}{1}{}^{\mu} d_\mu \overset{i}{3}{}^{\nu} = -\omega \overset{i}{2}{}^{\nu}.$$

Setzen wir nun voraus, die Kurve C liege auf unserer Fläche V_2! Dann hat C, *als Kurve der Fläche betrachtet*, bekanntlich nur den tangentialen Einheitsvektor $\overset{J}{1}{}^{\nu} = \overset{i}{1}{}^{\nu}$, den normalen Einheitsvektor $\overset{J}{2}{}^{\nu}$ (der im allgemeinen vom $\overset{i}{2}{}^{\nu}$ verschieden ist) und die Krümmung Λ (die im allgemeinen von λ verschieden ist), und es gilt, in leicht verständlicher Schreibweise,

$$(3)_b \quad \overset{J}{1}{}^{\mu} D_\mu \overset{J}{1}{}^{\nu} = \Lambda \overset{J}{2}{}^{\nu}; \quad \overset{J}{1}{}^{\mu} D_\mu \overset{J}{2}{}^{\nu} = -\Lambda \overset{J}{1}{}^{\nu}.$$

Der Tensor $G_{\lambda\mu}$ läßt sich längs der Kurve C auf folgende Gestalt bringen

$$G_{\lambda\mu} = \overset{J}{1}_{\lambda} \overset{J}{1}_{\mu} + \overset{J}{2}_{\lambda} \overset{J}{2}_{\mu}. \quad (4)$$

Die symbolischen Vektoren d_μ und D_μ sind durch die Gleichung

$$G^{\alpha}_{\mu} d_\alpha A^{\nu} = D_\mu A^{\nu} - A^{\lambda} H_{\lambda\mu} n^{\nu} \quad (5)$$

verknüpft. Dabei ist A^{ν} ein beliebiger Vektor *in* V_2. — Damit sind unsere vorbereitenden Sätze erschöpft.

§ 2.

Erste Gleichung.

Es sei eine reelle, singularitätenfreie, einfache Kurve C auf einer regulären Fläche V_2 in V_3 gegeben. Von dieser Kurve setzen wir voraus, daß sie nicht in V_3 geodätisch ist, und außerdem schließen wir gleichzeitig die geodätischen der V_2 aus. Überdies sollen alle in Betracht kommenden Punkte der Kurve C reguläre Punkte der V_3 sein.

Wir stellen zuerst eine Gleichung zwischen

$$k, K, H; \quad \lambda, \omega, \Lambda$$

auf. Zu diesem Zwecke führen wir folgende drei Skalare ein:

$$\Xi_{ab} = \overset{J}{a}{}^{\lambda} \overset{J}{b}{}^{\mu} H_{\lambda\mu} \qquad (a, b = 1, 2).$$

Ist eine Kurve gegeben, so ist es nicht schwer diese Skalare mittels $\underset{1}{J}^\lambda \underset{2}{J}^\lambda$ zu berechnen. Wir wollen aber diese Skalare als Funktionen von λ, ω, Λ, ohne Benützung von $\underset{1}{J}^\lambda, \underset{2}{J}^\lambda$ aufstellen. Insbesondere wird es gelingen Ξ_{12} auf zwei Arten zu berechnen. Die gesuchte Gleichung wird dann durch die Vergleichung der beiden Resultate erhalten.

Aus (5) folgt zuerst für $A^\nu = \underset{1}{J}^\nu = \underset{1}{i}^\nu$

$$\underset{1}{i}^\mu d_\mu \underset{1}{i}^\nu = \underset{1}{J}^\mu D_\mu \underset{1}{J}^\nu - \Xi_{11} n^\nu .$$

Diese Gleichung können wir mit Rücksicht auf (3) auch so schreiben:

(6) $$\lambda \underset{2}{i}^\nu = \Lambda \underset{2}{J}^\nu - \Xi_{11} n^\nu \quad \text{oder} \quad \Xi_{11} n^\nu = \Lambda \underset{2}{J}^\nu - \lambda \underset{2}{i}^\nu .$$

Es folgt daraus $\Xi_{11}^2 = \lambda^2 - \Lambda^2$, und da jedenfalls (6) auch für geodätische Linien gilt, folgt ohne Zweideutigkeit

(7) $$\Xi_{11} = -\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2}.$$

(Wir schließen aber solche Kurven aus, so daß stets $\lambda, \Lambda \neq 0$.) Der Vektor n^ν kann leicht auf folgende Gestalt gebracht werden:

(8) $$n^\nu = \underset{2}{i}^\nu \sqrt{1 - \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2} + \underset{3}{i}^\nu \frac{\Lambda}{\lambda}.$$

Durch nochmalige Differentiation der Gleichung (6) bekommt man unter Berücksichtigung von (5)

$(9)_a$ $$\Xi_{11}' n^\nu + \Xi_{11} i^\alpha d_\alpha n^\nu$$
$$= -\Lambda^2 \underset{1}{J}^\nu + \Lambda' \underset{2}{J}^\nu - \Lambda \Xi_{12} n^\nu - \left(-\lambda^2 \underset{1}{i}^\nu + \lambda' \underset{2}{i}^\nu + \lambda \omega \underset{3}{i}^\nu\right).$$

Die Striche deuten dabei auf die gewöhnliche Ableitung nach dem Bogenelement der Kurve hin. Somit erhalten wir aus (8) und $(9)_a$

$(9)_b$ $$\Xi_{12} = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\Xi_{11} - \Lambda\omega - \Xi_{11}'\right) = -\lambda' \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}} + \frac{\lambda\lambda' - \Lambda\Lambda'}{\Lambda\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2}} - \omega$$
$$= -\left[\omega + \left(\arcsin\frac{\Lambda}{\lambda}\right)'\right].$$

Nun berechnen wir Ξ_{12} auf eine andere Art. Die V_2-Bestimmungszahlen des Vektors $\underset{1}{J}^\nu$, die wir mit x, y bezeichnen wollen, ergeben sich aus den Gleichungen

$(10)_a$ $x^2 E + 2Fxy + y^2 G = 1$; $\qquad (10)_b$ $x^2 L + 2Mxy + y^2 N = \Xi_{11}$.

Analoge Betrachtung führt zu den V_2-Bestimmungszahlen von $\underset{2}{J}^\nu$, welche wir mit $x^* y^*$ bezeichnen:

$(10)_c$ $$x^* = -\frac{Fx + Gy}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad y^* = \frac{Ex + Fy}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Dabei sind die Zeichen in $(10)_e$ schon so gewählt, daß der tangentiale und normale Vektor dieselbe Orientierung haben, wie das gewöhnliche Cartesische System. Aus $(10)_{a,b}$ ergeben sich *zwei* Vektoren, und zwar jeder von ihnen mit *zwei* Orientierungen. Es ist dann auch

$$(9)_c \qquad \Xi_{12} = L x x^* + M(x y^* + x^* y) + N y y^*.$$

Somit gibt uns die Vergleichung von $(9)_b$ und $(9)_c$

$$-\omega - \left(\arcsin\frac{\Delta}{\lambda}\right)' = L x x^* + M(x y^* + x^* y) + N y y^*.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte $x, y; x^*, y^*$ von (10) ein und berücksichtigt man die Formeln (1), (2), so ergibt sich die gesuchte Relation in der Form

$$(\mathrm{I}) \quad (\varepsilon = \pm 1), \qquad \boxed{\omega + \left(\arcsin\frac{\Delta}{\lambda}\right)' = -\varepsilon\left[-\left(\lambda^2 - \Delta^2 + 2H\sqrt{\lambda^2 - \Delta^2} + K - k\right)\right.}$$

Wir wollen einige Anwendungen von dieser Formel anführen. Es gibt nämlich Fälle, wo (I) das *ganze*, in der Einleitung angedeutete Problem löst.

Auf der Fläche sind unter anderen Kurven die geodätischen Kreise durch

$$\Delta = c \qquad\qquad c = \text{Konst.}$$

charakterisiert. Setzt man dies in (I) ein, so ergibt sich eine der beiden *natürlichen Differentialgleichungen der geodätischen Kreise* in der Form

$$(\mathrm{I})_a \qquad \left\{\omega + \left(\arcsin\frac{c}{\lambda}\right)'\right\}^2 = -\left(\lambda^2 - c^2 + 2H\sqrt{\lambda^2 - c^2} + K - k\right).$$

Ein anderer Spezialfall ist durch die *α-Kurven* dargeboten. Unter α-Kurven verstehe ich solche Kurven auf V_2, deren Normalvektor einen *festen* Winkel $\alpha \neq 0$ mit dem zur Fläche orthogonalen Vektor n^ν einschließt. Dann ist laut (8)

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{\lambda^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{\Delta}{\lambda}$$

konstant und daraus läßt sich Δ leicht berechnen. Das Einsetzen in (I) gibt

$$(\mathrm{I})_b \qquad \omega^2 = -(\lambda^2 \cos^2\alpha + 2H\lambda\cos\alpha + K - k),$$

und diese Formel ist eine der beiden *natürlichen Gleichungen aller α-Kurven.* Offenbar kann sie als eine Verallgemeinerung der bekannten Enneperschen Gleichung angesehen werden. In der Tat ist die reelle Asymptotenkurve eine $\frac{\pi}{2}$-Kurve, und $(\mathrm{I})_b$ vereinfacht sich zu der Enneperschen Gleichung

$$(\mathrm{I})_c \qquad \omega^2 = -(K - k).$$

---

[3]) Für die eine Kurve hat man $\varepsilon = +1$, für die andere $\varepsilon = -1$ zu setzen.

Aus (I) folgt, daß

$$\lambda \cos \alpha = - H \pm \sqrt{H^2 - (K - k)}$$

die *natürliche Gleichung der α-Kurven mit der Windung Null* ist. Im euklidischen Falle sind es ebene Kurven.

Bemerkung. Ist V_3 euklidisch und die Asymptotenkurve eine Gerade, so bietet die dazu orthogonale Richtung auf der Fläche eine einfache Illustration der geodätisch parallelen Verpflanzung, und statt $(\mathrm{I})_c$ tritt folgende Formel auf:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = - K.$$

Dabei ist ds die euklidische Entfernung zweier Nachbarpunkte auf der Geraden und $d\varphi$ der euklidische Winkel der entsprechenden Tangentialebenen der Fläche. Der Beweis läßt sich mittels des hier aufgestellten Formelapparates fast elementar durchführen.

In vorigen Beispielen haben wir Spezialkurven auf einer allgemeinen Fläche behandelt. Als letztes Beispiel wollen wir umgekehrt allgemeine Kurven auf einer Spezialfläche betrachten. Wenn eine Fläche vorliegt, für die

$$H_{\lambda\mu} = C G_{\lambda\mu}, \qquad C = \text{Konst.},$$

so ist gleichzeitig auch nach (1), (2) und (7)

$$C = - \sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2} = H; \qquad K - k = C^2,$$

und somit vereinfacht sich (I) zu

$$(\mathrm{I})_d \qquad C^2 = \frac{\omega^2 \lambda^4}{\lambda'^2 + \lambda^2 \omega^2}.$$

Setzt man darin $\omega = - \frac{1}{T}$, $\lambda = \frac{1}{R}$, so ergibt sich das Integral

$$C^2 = \frac{1}{R^2 + R'^2 T^2}$$

der bekannten Differentialgleichung der „sphärischen“ Kurven

$$\frac{R}{T} + (R' T)' = 0.$$

Ist $C = 0$, so hat man aus $(\mathrm{I})_d$ (nachdem wir die geodätischen ausschließen)

$$\omega = 0,$$

also im euklidischen Falle wirklich die ebenen Kurven.

Das Verfahren, welches wir auf Ξ_{11} angewandt haben, können wir natürlich auch auf Ξ_{22} anwenden. Dabei müssen wir (2) und (4) in Betracht ziehen, so daß

$$2H = \Xi_{11} + \Xi_{22}. \tag{11}$$

Man bekommt eine Gleichung, welche laut (2) auf Identität zusammenschrumpft, und wir können auf diese Weise von Λ nicht los werden[4]).

§ 3.

Zweite Gleichung.

Wir müssen also einen anderen Weg einschlagen. Es sind verschiedene Möglichkeiten, die zum Ziele führen. Wir werden eine Methode benützen, welche nicht zu kompliziert ist. Um eine neue Gleichung zu bekommen, führen wir zuerst die Skalare

$$\Xi_{abc} = \underset{a}{J^{\omega}}\,\underset{b}{J^{\mu}}\,\underset{c}{J^{\lambda}}\,H_{\omega\mu\lambda}$$

ein und berechnen wieder Ξ_{111} auf zwei verschiedene Arten. Aus der Definitionsgleichung der Ξ_{ab} folgt zuerst für $a = b = 1$

$$\Xi'_{11} = \underset{1}{i^{\alpha}} d_{\alpha}\left(\underset{1}{J^{\mu}}\,\underset{1}{J^{\lambda}}\,H_{\mu\lambda}\right) = \underset{1}{J^{\alpha}} D_{\alpha}\left(\underset{1}{J^{\mu}}\,\underset{1}{J^{\lambda}}\,H_{\mu\lambda}\right),$$

und daraus unter Beachtung von (3)

$$\Xi'_{11} = 2\Lambda\,\Xi_{12} + \Xi_{111}. \tag{12}$$

Aus $(9)_c$ und (7) können wir die Werte von Ξ_{12}, Ξ_{11} in (12) einsetzen und bekommen somit

$$\Xi_{111} = -\frac{\lambda\lambda' - \Lambda\Lambda'}{\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2}} \tag{13}$$

$$-2\Lambda\varepsilon\left[-\left(K - k + 2\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2} + \lambda^2 - \Lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Anderseits hat man

$$\Xi_{111} = x(L_1 x^2 + 2M_1 xy + N_1 y^2) + y(L_2 x^2 + 2M_2 xy + N_2 y^2). \tag{14}$$

---

[4]) Die Gleichung (I) kann man auf eine übersichtlichere, aber für unsere Zwecke weniger brauchbare Form bringen:

$$\omega + \varrho' = -\varepsilon\left[-(K - k + 2\lambda H\cos\varrho + \lambda^2\cos^2\varrho)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\cos\varrho = \underset{2}{i^{\lambda}} n_{\lambda}\right).$$

Die Krümmungskurven (d. i. die Kurven in den Hauptrichtungen des Tensors $H_{\lambda\mu}$) sind dann durch

$$\omega + \varrho' = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda\cos\varrho = -H \pm \sqrt{H^2 - (K - k)}$$

charakterisiert. Die erste Gleichung besagt, daß $i^{\alpha} d_{\alpha} n^{\nu}$ stets in der Richtung der Kurve liegt, die zweite ist mit der Gleichung der „ebenen" α-Kurven *formal* gleichlautend.

Die Vergleichung von (13) und (14) gibt die gesuchte Gleichung in der Form

$$\text{(II)}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\frac{\lambda\lambda' - \Lambda\Lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}} + 2\varepsilon\Lambda\left[-\left(K - k + 2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2} + \lambda^2 - \Lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= -x(L_1 x^2 + 2M_1 xy + N_1 y^2) - y(L_2 x^2 + 2M_2 xy + N_2 y^2)\end{aligned}}.$$

Dabei sind die Werte x, y den Gleichungen (10) zu entnehmen. Zuerst müssen wir uns aber überzeugen, daß die Gleichung (I) die Gleichung (II) *nicht* auf eine Identität reduziert. Dies ist aber leicht einzusehen, wenn man bemerkt, daß (I) und (II) in Λ' linear sind: Man denkt sich aus (I) und (II) Λ' eliminiert. Dadurch entsteht eine neue Gleichung, in der ω nur *einmal* vorkommen kann und muß, weil kein Glied aus (II) das Glied ω in (I) annullieren kann [da ω in (II) überhaupt nicht enthalten ist].

Die Gleichungen (I), (II) lösen im allgemeinen das aufgestellte Problem nicht, weil es im allgemeinen nicht möglich ist, Λ und Λ' aus ihnen zu eliminieren.

Wir wollen hier ein Beispiel angeben, in welchem diese Elimination gelingt: Die Kurven, deren Tangentenvektor durch

$$\Xi_{111} = 0$$

definiert ist, können schlechtweg als „Darbouxsche" Kurven bezeichnet werden, weil sie eine komplette Analogie zu den gewöhnlichen Darbouxschen Kurven der affinen Differentialgeometrie bilden[5]). Für diese Kurven hat man zuerst laut (12)

$$\Xi_{11}' = -\frac{\lambda\lambda' - \Lambda\Lambda'}{\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}} = 2\Lambda\Xi_{12}.$$

Geht man mit diesem Wert in $(9)_b$ ein, so ergibt sich für Ξ_{12}

$$\Xi_{12} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda'\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}}{\lambda\Lambda} + \omega\right),$$

und dementsprechend vereinfacht sich die Gleichung (I) zu einer Gleichung, die Λ' *nicht mehr enthält*:

$$\text{(I)}_e\qquad \frac{\lambda'}{\Lambda\lambda}\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2} + \omega = -3\varepsilon\left[-(K - k + 2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H + \lambda^2 - \Lambda^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die erste Ableitung dieser Gleichung

$$\text{(I)}_e'\qquad \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}\right)'\frac{1}{\Lambda} - \frac{\Lambda'\lambda'}{\Lambda^2\lambda}\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2} + \omega'$$
$$= \frac{3\varepsilon(K - k + 2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H + \lambda^2 - \Lambda^2)'}{2\left[-(K - k + 2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H + \lambda^2 - \Lambda^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

---

[5]) Ist V_2 eine Fläche konstanter Gaußscher Krümmung im euklidischen Raume, so fallen unsere Kurven mit den gewöhnlichen Darbouxschen Kurven zusammen. Dazu vgl. W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, § 64, und T. Kubota: Ein Problem in der Affingeometrie (Tohoku Un., Serie I, Vol. XVI, Nr. 7).

enthält also Λ'' nicht. Dabei sind für $(K-k)'$ und H' folgende Ausdrücke einzusetzen:

$$(K-k)' = \left(x\frac{\partial}{\partial u_1} + y\frac{\partial}{\partial u_2}\right)(K-k), \qquad H' = \left(x\frac{\partial}{\partial u_1} + y\frac{\partial}{\partial u_2}\right)H.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Gleichungen $(\mathrm{I})_e$, $(\mathrm{I})'_e$ und die vereinfachte Gleichung (II)

$$(\mathrm{II})_a \qquad \frac{\lambda\lambda' - \Lambda\Lambda'}{\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2}} = -2\Lambda\varepsilon\left[-(K-k+2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}\,H + \lambda^2 - \Lambda^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

algebraisch unabhängig[6]) sind, und infolgedessen kann man Λ, Λ' aus ihnen eliminieren: *Eine der beiden natürlichen Gleichungen der „Darbouxschen" Kurven ergibt sich durch Elimination von Λ, Λ' aus* $(\mathrm{I})_e$, $(\mathrm{I})'_e$, $(\mathrm{II})_a$.

Die Gleichung (II) kann man aber auch dazu benützen, um die zweite natürliche Gleichung der — im vorigen Paragraphen behandelten — Kurven herzustellen. So hat man z. B. *die zweite natürliche Gleichung der geodätischen Kreise*[7a])

$$\frac{\lambda\lambda'}{\sqrt{\lambda^2-c^2}} + 2c\varepsilon\left[-(K-k+2\sqrt{\lambda^2-c^2}\,H + \lambda^2 - c^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= -x(L_1x^2 + 2M_1xy + N_1y^2) - y(L_2x^2 + 2M_2xy + N_2y^2),$$

oder *die zweite natürliche Gleichung der α-Kurven*[7b])

$$\lambda'\cos\alpha + 2\lambda\varepsilon\sin\alpha\left[-(K-k+2\lambda\cos\alpha\,H + \lambda^2\cos^2\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= -x(L_1x^2 + 2M_1xy + N_1y^2) - y^2(L_2x^2 + 2M_2xy + N_2y^2).$$

Insbesondere einfach gestaltet sich diese Formel für die asymptotische Kurve $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, wenn man die (reell vorausgesetzten) asymptotischen Kurven zu Koordinatenkurven wählt. Dann ist für eine

$$\lambda^2 = -\frac{L_1^2}{4(K-k)E^3} \qquad (\omega^2 = -(K-k))$$

und für die andere

$$\lambda^2 = -\frac{N_2^2}{4(K-k)G^3} \qquad (\omega^2 = -(K-k)).$$

Je nachdem man die Orientierung dieser Kurven wählt, muß man $+\lambda$ oder $-\lambda$ nehmen.

---

[6]) Die Unabhängigkeit der ersten und letzten Gleichung ist im Texte schon bewiesen worden. Durch analoge Betrachtung kann man die algebraische Unabhängigkeit der ersten bzw. letzten zwei Gleichungen beweisen.

[7a,b]) Dabei ist, wohlverstanden, der Wert

a) $\Xi_{11} = -\sqrt{\lambda^2 - c^2}$ resp. b) $\Xi_{11} = -\lambda\cos\alpha$

in $(10)_b$ einzusetzen.

Der Fall der besonderen Fläche $H_{\lambda\mu} = CG_{\lambda\mu}$ führt hier nur zur Identität $0 = 0$ für (II).

Im nächsten Abschnitt werden wir eine dritte Gleichung aufsuchen.

§ 4.

Dritte Gleichung.

Soll das Problem durch *drei* Gleichungen zur Lösung gebracht werden, so darf die dritte Λ'' nicht enthalten. Eine solche Gleichung wird durch die Berechnung von Ξ_{112} aufgestellt. Aus der Definition der Ξ_{ab} folgt für $a = 1,\ b = 2$

$$\Xi'_{12} = \Lambda(\Xi_{22} - \Xi_{11}) + \Xi_{112} = 2\Lambda(H - \Xi_{11}) + \Xi_{112}.$$

Setzt man hier die Werte Ξ_{12} und Ξ_{11} aus $(9)_c$ und (7) ein, so ergibt sich

$$\Xi_{112} = \varepsilon \frac{-(K-k+2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H+\lambda^2-\Lambda^2)'}{2[-(K-k+2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H+\lambda^2-\Lambda^2)]^{\frac{1}{2}}} - 2\Lambda\left(H+\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}\right).$$

Anderseits hat man

$$\begin{aligned}\Xi_{112} = {} & x[L_1 xx^* + M_1(xy^* + x^*y) + N_1 yy^*] \\ & + y[L_2 xx^* + M_2(xy^* + x^*y) + N_2 yy^*].\end{aligned}$$

So ergibt sich durch Vergleichung

(III)
$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon \frac{(K-k+2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H+\lambda^2-\Lambda^2)'}{2[-(K-k+2\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}H+\lambda^2-\Lambda^2)]^{\frac{1}{2}}} + 2\Lambda\left(H+\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}\right) \\ &\quad = -x[L_1 xx^* + M_1(xy^* + x^*y) + N_1 yy^*] \\ &\qquad - y[L_2 xx^* + M_2(xy^* + x^*y) + N_2 yy^*]\end{aligned}}.$$

Dabei sind die Werte $x, y;\ x^* y^*$ den Gleichungen (10) zu entnehmen und für $(K-k)',\ H'$ sind die Ausdrücke (15) einzusetzen.

Die algebraische Unabhängigkeit der Gleichungen (I) und (III) kann man durch ähnliche Betrachtung wie im § 3 beweisen. Um die algebraische Unabhängigkeit der Gleichungen (II) und (III) nachzuweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß sie in einem besonderen Falle algebraisch unabhängig sind. In der Tat, betrachtet man die „Krümmungskurven" (d. i. die Kurven in den Hauptrichtungen von $H_{\lambda\mu}$), so ist

$$K - k + 2\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2}H + \lambda^2 - \Lambda^2 = 0$$

und dementsprechend kommt Λ' in (III) überhaupt nicht vor, während in (II) linear auftritt[8]). Somit sind die Gleichungen in diesem Spezialfalle und desto mehr im allgemeinen algebraisch unabhängig. Das bedeutet aber, daß es im allgemeinen möglich ist, Λ, Λ' aus (I), (II), (III) zu elimi-

nieren. Die Elimination von Λ' ist nicht zu kompliziert. Bezeichnet man zur Abkürzung mit I, II, III die rechten Seiten der Gleichungen (I), (II), (III), so bekommt man

$$\text{(IV)} \qquad 3\Lambda\,\mathrm{I} + \mathrm{II} - \frac{\lambda'}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2} - \omega\Lambda = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial u_1}+y\frac{\partial}{\partial u_2}\right)(K-k)+\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}\left(x\frac{\partial}{\partial u_1}+y\frac{\partial}{\partial u_2}\right)H + \mathrm{II}\left(H+\sqrt{\lambda^2-\Lambda^2}\right)+\mathrm{I\,III}=0$$

als Eliminationsresultat. Eliminiert man noch Λ aus diesen Gleichungen, so ist damit das Problem gelöst:

Es sei eine reguläre V_2 in V_3 gegeben. Eine natürliche Differentialgleichung aller Kurven auf dieser V_2, die den im § 2 aufgestellten Bedingungen genügen, wird durch die Elimination von Λ aus (IV), (V) *erhalten. Dabei sind die Werte $x, y; x^*, y^*$ den Gleichungen* (10) *zu entnehmen.*

Zusatz bei der Korrektur am 26. März 1929. Der hier ausgeschiedene Fall der Kurven, die auf V_2 geodätisch sind, habe ich schon früher behandelt (Comptes Rendus Ac. Paris **186**, p. 1088—1090). Die gesuchte natürliche Gleichung dieser Kurven ist in unserer Schreibweise

$$\lambda^2+\omega^2+2\lambda H = k - K.$$ [2a])

Oxford, Dezember 1928.

---

[3]) Aus den so vereinfachten Gleichungen kann man leicht beide natürliche Gleichungen der Krümmungskurven aufstellen. Man braucht nur die Werte Λ, Λ' aus den Gleichungen in der Bemerkung [4]) zu berechnen und hier einzusetzen. Das Resultat ist

$$\frac{\lambda'}{\lambda R_{(\varepsilon)}}-\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{R_{(\varepsilon)}^2}}\,\omega = x(x^2L_1+2M_1xy+y^2N_1)+y(x^2L_2+2M_2xy+y^2N_2),$$

$$2\left(H-\frac{1}{R_{(\varepsilon)}}\right)\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{R_{(\varepsilon)}^2}} = -x[xx^*L_1+M_1(xy^*+x^*y)+yy^*N_1] - y[xx^*L_2+M_2(xy^*+x^*y)+yy^*N_2].$$

Dabei sind die Werte $x, y; x^*, y^*, \frac{1}{R_{(\varepsilon)}}$ den Gleichungen $(10)_a$, $(10)_c$ und

$$x^2L+2Mxy+y^2N=\frac{1}{R_{(\varepsilon)}}; \qquad -\frac{1}{R_{(\varepsilon)}} = -H+\varepsilon\sqrt{H^2-(K-k)}, \qquad \varepsilon=\pm 1$$

zu entnehmen, und für eine Schar das obere, für andere das untere Wurzelzeichen ε zu nehmen.

(Eingegangen am 30. Dezember 1928.)

Über Lambertsche Reihen.

Von

Hans Späth †. *)

In einer gleichbetitelten Arbeit hat Herr Knopp[1]) das Verhalten der Reihen

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{z^n}{1 - z^n}$$

bei Annäherung von z aus dem Innern des Einheitskreises an den Rand untersucht. Er erhielt dabei u. a. folgende Sätze:

I. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}$ konvergiert und $z_0 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ eine primitive q-te Einheitswurzel ist, dann ist bei beliebiger Annäherung von $z \to z_0$ im Winkel-

*) Hans Späth ist am 27. November 1928 wenige Stunden vor der Vollendung seiner Habilitation in Göttingen unerwartet verstorben. Unsere Wissenschaft verliert in ihm einen ungewöhnlich reich begabten Forscher, dessen bisherige Leistungen zu den schönsten Hoffnungen berechtigten. Trotz seiner Jugend — er wurde am 8. September 1901 zu Haigerloch geboren — liegt schon eine größere Anzahl wertvoller Arbeiten von ihm vor, andere waren im Druck oder fanden sich unter seinen nachgelassenen Papieren. Alle diese Arbeiten sind aus dem Trieb entstanden, die mathematischen Tatsachen nicht einfach zu übernehmen, sondern durch selbständiges Nachdenken sich zu erobern. So ist er unbefangen und mit gutem Erfolg auch an längst erledigte Fragen wie die Transzendenz von e und π, die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung u. a. herangegangen und hat dort neue Wege und neue Resultate gefunden. — Nach Ableistung eines Referendarjahres und nach seiner Promotion (Göttingen 1927) war er Assistent in Tübingen; im Oktober 1928 ging er nach Göttingen, um sich dort zu habilitieren. An allen Stellen, an denen er gewesen, gedenkt man gerne dieses wertvollen Menschen, der der mathematischen Wissenschaft noch viel hätte sein können. Die Schriftleitung.

[1]) K. Knopp, Über Lambertsche Reihen, Journ. f. reine u. angew. Math. 142 (1913), S. 283—315.

raum $0 \leqq \left|\arc\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\right| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{z \to z_0} \left(1-\frac{z}{z_0}\right) L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n q}{n q}. \tag{1}$$

II. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiert und in $z_0 = e^{2\pi i \gamma}$ die reelle Zahl γ irrational ist, dann ist bei radialer Annäherung von $z \to z_0$

$$\lim_{z \to z_0} \left(1-\frac{z}{z_0}\right) L(z) = 0. \tag{2}$$

III. Die Beziehung (2) bleibt auch noch gültig bei beliebiger Annäherung von $z \to z_0$ im Winkelraum, wenn in der Kettenbruchentwicklung $[a_0, a_1, \ldots]$ von γ zwischen den Teilnennern a_n und den Nennern q_n der Hauptnäherungsbrüche die Beziehung $a_n = o(q_{n-2})$ besteht.

Darüber hinaus hat Herr Landau[2]) bewiesen:

II*. (2) gilt schon, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}$ konvergiert, und zwar für alle irrationalen γ bei Annäherung von $z \to z_0 = e^{2\pi i \gamma}$ im Winkelraum.

III*. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ und gilt für das irrationale γ die Beziehung $a_n = O(q_{n-1})$, so ist bei Annäherung im Winkelraum sogar

$$\lim_{z \to z_0} \left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{2}{3}} L(z) = 0, \tag{3}$$

und wenn die Teilnenner a_n beschränkt sind,

$$\lim_{z \to z_0} \left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}} L(z) = 0. \tag{4}$$

Beim Beweis knüpfen beide Autoren an die Potenzreihenentwicklung von $L(z)$ an. Im folgenden werde ich nun zeigen, daß man auch ganz einfach durch Betrachtung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{z^n}{1-z^n}$ selbst durchkommt. Dabei will ich eine etwas andere Formulierung der Sätze zugrunde legen.

Satz 1. *Es sei in*

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{z^n}{1-z^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}$ *konvergent.* $z_0 = e^{2\pi i \gamma}$ *sei irgendein Punkt auf dem Einheits-*

[2]) E. Landau, Sur les séries de Lambert, C. R. 156 (1913), S. 1451—1454.

kreis. Dann existiert $\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)L(z)$ *bei Annäherung von* $z\to z_0$ *im Winkelraum* $0\leqq\left|\arc\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\right|\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$, *und zwar ist*

$$\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\frac{z^n}{1-z^n}. \tag{5}$$

Satz 2. *Konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ *und ist in* $z_0=e^{2\pi i\gamma}$ *die Zahl* γ *irrational und durch rationale Zahlen nur so gut approximierbar, daß, wenn allgemein* $\Re(x)$ *den absolut kleinsten Rest von* $x \bmod 1$ *bezeichnet, für alle ganzen positiven* n *mit einem festen* $k\geqq 1$ *und einem festen* δ, $0<\delta<\frac{1}{2}$, *die Beziehung*

$$\frac{1}{2}>|\Re(n\gamma)|>\frac{\delta}{n^k} \tag{6}$$

besteht, dann ist bei Annäherung von $z\to z_0$ *im Winkelraum*

$$\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}L(z)=0. \tag{7}$$

Satz 1 umfaßt I und II*, denn man errechnet leicht

$$\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\frac{z^n}{1-z^n}=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{wenn } z_0 \text{ eine } n\text{-te Einheitswurzel ist,}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Satz 2 für $k=2$ bzw. für $k=1$ liefert (nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Kettenbrüche) III*. Ein der Einfachheit halber für $k=1$ durchgeführtes Beispiel am Schluß der Note wird zeigen, daß man in (7) links den Exponenten $\frac{k}{k+1}$ durch keinen kleineren ersetzen kann. Schärfer — und das scheint mir nicht uninteressant zu sein —: *Man kann unter den obigen Voraussetzungen die Beziehung* (7) *überhaupt nicht zu*

$$\lim_{z\to z_0}p(z)\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}L(z)=0 \quad \textit{mit} \quad \lim_{r\to 1-0}|p(z_0\cdot r)|=\infty \tag{8}$$

verallgemeinern.

Beweis von Satz 1. Für alle z im Einheitskreis mit $|z-z_0|<\cos\alpha$, $0\leqq\left|\arc\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\right|\leqq\alpha$ und für jedes positive ganze n gilt

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\frac{z^n}{1-z^n}\right|\leqq\frac{\left|1-\frac{z}{z_0}\right|}{1-\left|\frac{z}{z_0}\right|}\cdot\frac{(1-|z|)|z|^n}{1-|z|^n}\leqq\frac{2}{\cos\alpha}\cdot\frac{|z|}{1+|z^{-1}|+\cdots+|z^{-(n-1)}|}<\frac{K}{n}.$$

Daraus folgt

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)L(z)-\sum_{n=1}^{N}b_n\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\frac{z^n}{1-z^n}\right|\leqq K\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}$$

und somit auch

$$\limsup_{z\to z_0}\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)L(z)-\sum_{n=1}^{N}b_n\lim_{z\to z_0}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\frac{z^n}{1-z^n}\right|\leqq K\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}=\varepsilon_N.$$

Wegen $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N=0$ ist der Satz damit bewiesen.

Beweis von Satz 2. Man hat zunächst wieder für alle z im Einheitskreis mit $|z-z_0|<\cos\alpha$, $0\leqq\left|\arc\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\right|\leqq\alpha$ und jedes positive ganze n

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}\cdot\frac{z^n}{1-z^n}\right|<\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\cdot\frac{z^n}{1-z^n}\right|^{\frac{k}{k+1}}\cdot\left|\frac{1}{1-z^n}\right|^{\frac{1}{k+1}}<\left(\frac{K}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}\cdot\left|\frac{1}{1-z^n}\right|^{\frac{1}{k+1}}.$$

Nun gilt aber weiter für alle diese z

$$\left|\frac{1}{1-z^n}\right|<\frac{2}{\delta\cdot\cos\alpha}\,n^k.$$

Denn für $|z-z_0|\leqq\frac{\delta}{n^{k+1}}$ ist

$$|1-z^n|\geqq|1-z_0^n|-|z_0^n-z^n|>\frac{4\delta}{n^k}-\frac{\delta}{n^{k+1}}n>\frac{\delta\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1}{n^k}$$

wegen $|1-z_0^n|=|1-e^{2\pi i\Re(n\gamma)}|>2\sin\frac{\pi\delta}{n^k}>\frac{4\delta}{n^k}$. Für die übrigen z aber gilt $1>1-|z|=|z_0|-|z|>|z_0-z|\frac{\cos\alpha}{2}>\frac{\delta\cos\alpha}{2n^{k+1}}$, also

$$|1-z^n|\geqq1-|z|^n>1-\left(1-\frac{\delta\cos\alpha}{2n^{k+1}}\right)^n>\frac{\delta\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1}{n^k}.$$

Wir erhalten somit

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}\frac{z^n}{1-z^n}\right|<\left(\frac{K}{n}\right)^{\frac{k}{k+1}}\left(\frac{2}{\delta\cos\alpha}n^k\right)^{\frac{1}{k+1}}=K_1.$$

Daraus folgt nun wie im Beweis von Satz 1

$$\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}L(z)-\sum_{n=1}^{N}b_n\frac{z^n}{1-z^n}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}\right|<K_1\sum_{n=N+1}^{\infty}|b_n|,$$

$$\limsup_{z\to z_0}\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k}{k+1}}L(z)\right|<K_1\sum_{n=N+1}^{\infty}|b_n|=\varepsilon_N,$$

und wegen der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ strebt $\varepsilon_N\to0$ für $N\to\infty$.

Beispiel. Die Zahl $\gamma = [0, 1, 1, \ldots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ genügt der Bedingung (6) mit $k = 1$ und $\delta = \frac{1}{3}$. Es seien $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{5}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$ ihre Näherungsbrüche *gerader* Ordnung. Wir betrachten dann die Reihe

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varrho} z_0^{q_n}} \frac{z^{q_n}}{1-z^{q_n}} \qquad (\varrho > 1;\ z_0 = e^{2\pi i\gamma})$$

und lassen z radial gegen z_0 streben. Da immer $\frac{1}{3q_n} < \Re(q_n \cdot \gamma) < \frac{1}{q_n}$, also $-\frac{\pi}{2} < \arc(1-z^{q_n}) \leqq 0$ für $z = z_0 r$, $0 \leqq r < 1$ ist, so haben alle Reihenglieder $\frac{1}{n^{\varrho}} \frac{r^{q_n}}{1-z^{q_n}}$ positive Real- und Imaginärteile, und somit gilt für jedes n und alle z auf dem Radius von 0 nach z_0

$$|L(z)| > \frac{1}{n^{\varrho}} \cdot \frac{|z|^{q_n}}{|1-z^{q_n}|}.$$

Nun ist für $z = \zeta_n = z_0\left(1-\frac{1}{q_n^2}\right)$

$$|1-\zeta_n^{q_n}| < |1-z_0^{q_n}| + |z_0^{q_n} - \zeta_n^{q_n}| < 2\pi\,\Re(q_n\gamma) + \frac{1}{q_n^2} q_n < \frac{C}{q_n}$$

und

$$|\zeta_n^{q_n}| = \left(1-\frac{1}{q_n^2}\right)^{q_n} > \frac{1}{e},$$

also für irgendein μ

$$\left|\left(1-\frac{\zeta_n}{z_0}\right)^{\mu} L(\zeta_n)\right| > \frac{1}{q_n^{2\mu}} \cdot \frac{1}{n^{\varrho}} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{q_n}{C} = C_1 \frac{q_n^{1-2\mu}}{n^{\varrho}}.$$

Da nun bestimmt immer $q_n \geqq 2^n$ ist, so hat man

$$\left|\left(1-\frac{\zeta_n}{z_0}\right)^{\mu} L(\zeta_n)\right| > C_1 \frac{2^{n(1-2\mu)}}{n^{\varrho}},$$

und man erkennt, daß, solange $\mu < \frac{1}{2}$ ist, $\left|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\mu} L(z)\right| \to \infty$ strebt, wenn z die Folge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ durchlaufend $\to z_0$ strebt.

Daß Satz 2 überhaupt keine Verallgemeinerung von der Form (8) zuläßt (wie langsam auch $|p(z)| \to \infty$ streben mag, wenn $z \to z_0$ strebt), ist ebenfalls leicht einzusehen. Man braucht dazu nur die Reihe

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varrho} z_0^{s_n}} \frac{z^{s_n}}{1-z^{s_n}}$$

zu betrachten, wo jetzt die Exponenten $s_1, s_2, \ldots$ eine Teilfolge der Näherungsnenner q_n (gerader Ordnung) von $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left|p\left(z_0\left(1-\frac{1}{s_n^2}\right)\right)\right|}{n^\varrho} = \infty$ sind (solche Teilfolgen gibt es wegen $\lim\limits_{r\to 1-0} |p(z_0 r)| = \infty$). Man findet dann genau wie eben, daß $\left|p(z)\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}} L(z)\right| > C_1 \frac{\left|p\left(z_0\left(1-\frac{1}{s_n^2}\right)\right)\right|}{n^\varrho} \to \infty$ strebt, wenn z durch die Folge $\zeta_n = z_0\left(1-\frac{1}{s_n^2}\right)$ gegen z_0 strebt.

(Eingegangen am 7. August 1928.)

Über das asymptotische Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen.

Von

Hans Späth †.

In einer vor einigen Jahren erschienenen Arbeit[1]) untersucht Herr Perron das asymptotische Verhalten der Lösungen einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung

$$(a) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = \varphi(x)$$

mit reeller Variabler x unter der Annahme, daß die Koeffizienten $a_\nu(x)$ konstant oder stetige, für $x \to \infty$ endlichen Grenzwerten $\lim\limits_{x\to\infty} a_\nu(x) = a_\nu$ zustrebende Funktionen sind, $\varphi(x)$ stetig[2]) ist und ebenfalls gegen einen endlichen Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = b$ strebt. Er erhält folgende Ergebnisse:

Wenn im Falle konstanter Koeffizienten $(a_\nu(x) = a_\nu)$ die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ der charakteristischen Gleichung

$$(b) \qquad \varrho^n + a_{n-1}\varrho^{n-1} + \ldots + a_1\varrho + a_0 = 0$$

sämtlich reell und von Null verschieden sind, dann hat (a) mindestens eine Lösung y mit dem Verhalten

$$(c) \qquad \lim_{x\to\infty} y = \frac{b}{a_0}, \qquad \lim_{x\to\infty} y^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn alle ϱ_ν negativ sind, zeigen sämtliche Lösungen dieses Verhalten.

Gleiches gilt im Falle „asymptotisch konstanter" Koeffizienten $(a_\nu(x) \to a_\nu)$ unter der Zusatzvoraussetzung, daß alle Wurzeln ϱ_ν einfach sind.

---

[1]) O. Perron, Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 161—166.

[2]) Wegen Einschränkung dieser Voraussetzung vgl. O. Perron, Über einen Grenzwertsatz, Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 149—152.

Herr Walther hat gezeigt[3]), daß entsprechende Sätze für nichthomogene lineare Differenzengleichungen bestehen.

In meiner Dissertation[4]) habe ich mich damit befaßt, die Waltherschen Ergebnisse zu verallgemeinern. Dabei bemerkte ich, daß in weitgehender Analogie auch die oben zitierten Sätze ziemlich verallgemeinert werden können.

I. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

§ 1.

Es sei in der linearen Differentialgleichung mit konstanten (komplexen) Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = \varphi(x), \tag{1}$$

wobei die Variable x reell ist, die rechtsstehende Funktion $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ stetig und strebe mit wachsendem x gegen einen endlichen Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = b. \tag{2}$$

Gefragt wird nach den etwaigen Lösungen, die für $x \to \infty$ ebenfalls endlichen Grenzwerten zustreben.

Ich behandle zunächst die Gleichung erster Ordnung

$$y' - \varrho\, y = \varphi(x) \tag{3}$$

mit für $x \geqq 0$ stetigem, der Voraussetzung (2) genügendem $\varphi(x)$.

Für jede Lösung y von (3) mit endlichem $\lim\limits_{x \to \infty} y$ strebt gleichzeitig $y' = \varrho\, y + \varphi(x)$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} y' = \varrho \lim_{x \to \infty} y + b, \tag{4}$$

der aber, da y durch Integration aus y' hervorgeht, nur gleich Null sein kann.

Falls $\varrho \neq 0$ ist, gilt daher für alle derartigen Lösungen

$$\lim_{x \to \infty} y = -\frac{b}{\varrho}. \tag{5}$$

Man kann (3) in diesem Falle durch die Substitution $y = u - \frac{b}{\varrho}$ in die Gleichung

$$u' - \varrho\, u = \varphi(x) - b = \psi(x) \tag{6}$$

überführen, wo $\psi(x)$ für $x \geqq 0$ stetig ist und für $x \to \infty$ gegen Null strebt.

---

[3]) A. Walther, Über nichthomogene lineare Differenzengleichungen, Gött. Nachr. (math.-phys. Kl.) 1926, S. 103–118.

[4]) H. Späth, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen nichthomogener linearer Differenzengleichungen, Acta math. **51** (1927), S. 133–199.

Im Falle $\varrho = 0$ dagegen kann es Lösungen y mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$ überhaupt nur geben, wenn $b = 0$ ist.

Es genügt daher, die Gleichung (6) mit stetigem, nullstrebigem $\psi(x)$ zu betrachten.

Die Lösungen von (6) haben alle die Form

$$u = e^{\varrho x}\Big(\int_0^x e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C\Big). \tag{7}$$

Wir unterscheiden die drei Fälle $\Re\varrho = \sigma \gtreqless 0$.

1. $\Re\varrho = \sigma < 0$.

Da $\psi(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null strebt, so ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für genügend großes $x > x_0(\varepsilon)$ die Ungleichung $|\psi(x)| < \varepsilon$ erfüllt, also gilt nach (7) für eine beliebige Lösung $u(x)$ von (6)

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leqq \Big|e^{\varrho x}\Big(\int_0^{x_0} e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C\Big)\Big| + e^{\sigma x}\int_{x_0}^{x} e^{-\sigma\xi}|\psi(\xi)|\,d\xi \\ &< K e^{\sigma x} + \frac{\varepsilon}{|\sigma|}\end{aligned}$$

mit konstantem (von $u(0)$ abhängigem) K. Weil $\lim_{x\to\infty} e^{\sigma x} = 0$ ist, folgt daraus für $x > x_1 \geqq x_0$ weiter

$$|u(x)| < \frac{2\varepsilon}{|\sigma|}.$$

Wenn $\Re\varrho < 0$ ist, streben alle Lösungen von (6) nach Null.

2. $\Re\varrho = \sigma > 0$.

Wegen $|e^{\varrho x}| \to \infty$ für $x \to \infty$ kann $u = e^{\varrho x}\Big(\int_0^x e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C\Big)$ nur dann gegen einen endlichen Grenzwert streben, wenn

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\int_0^x e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C\Big) = \int_0^\infty e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C = 0$$

ist (das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi$ existiert für $\sigma > 0$). Dann ist aber

$$u = -e^{\varrho x}\int_x^\infty e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

und für $x \geqq x_0(\varepsilon)$ gilt $|u| < \frac{\varepsilon}{\sigma}$.

Für $\Re\varrho > 0$ strebt nur die Lösung $u = -e^{\varrho x}\int_x^\infty e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi$ gegen Null. Alle andern Lösungen wachsen wie $e^{\sigma x}$, also stärker als jede Potenz von x an.

3. $\Re\varrho = \sigma = 0$, $\varrho = \tau i$.

Ist $\tau i \neq 0$, dann streben nach (5) alle etwaigen Lösungen mit endlichem $\lim\limits_{x\to\infty} u$ gegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\varrho} = 0$. Aus

$$\lim_{x\to\infty} |u| = \lim_{x\to\infty} |e^{i\tau x}(\int_0^x e^{-i\tau\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C)| = \lim_{x\to\infty} |\int_0^x e^{-i\tau\xi}\psi(\xi)\,d\xi + C| = 0$$

folgt: *Damit* (6) *im Falle* $\varrho = i\tau \neq 0$ *eine nullstrebige Lösung hat, muß* $\int_0^\infty e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi$ *konvergieren. Trifft das zu, so hat* (6) *die einzige derartige Lösung* $u = -e^{\varrho x}\int_x^\infty e^{-\varrho\xi}\psi(\xi)\,d\xi$.

Für $\varrho = 0$ findet man analog aus $u = \int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + C$: (6) hat genau dann Lösungen mit endlichem Grenzwert, wenn $\int_0^\infty \psi(\xi)\,d\xi$ existiert. Es hat dann jede Lösung den von C abhängigen Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} u = \int_0^\infty \psi(\xi)\,d\xi + C$; eine einzige strebt gegen Null, nämlich $u = -\int_x^\infty \psi(\xi)\,d\xi$.

Für die Gleichung (3) mit der Bedingung (2) besagen die Ergebnisse:

Für $\Re\varrho < 0$ *streben alle Lösungen nach dem Grenzwert* $-\frac{b}{\varrho}$, *für* $\Re\varrho > 0$ *genau die Lösung*

$$(8a)\qquad y = -\frac{b}{\varrho} - e^{\varrho x}\int_x^\infty e^{-\varrho\xi}(\varphi(\xi) - b)\,d\xi = -e^{\varrho x}\int_x^\infty e^{-\varrho\xi}\varphi(\xi)\,d\xi$$

(*alle andern Lösungen wachsen stärker als jede Potenz von* x) *und für* $\Re\varrho = 0$, $\varrho = i\tau \neq 0$, *vorausgesetzt daß* $\int_0^\infty e^{-i\tau\xi}(\varphi(\xi) - b)\,d\xi$ *konvergiert, genau die Lösung*

$$(9)\qquad y = -\frac{b}{\varrho} - e^{\varrho x}\int_x^\infty e^{-\varrho\xi}(\varphi(\xi) - b)\,d\xi.$$

In allen Fällen besteht für die „konvergenten" Lösungen die Beziehung

$$(10)\qquad \lim_{x\to\infty} y' = 0.$$

Die allgemeine Gleichung (1) ist bekanntlich äquivalent einem System von n linearen Gleichungen erster Ordnung

$$(11)\qquad \begin{aligned} y_1' - \varrho_1 y_1 &= y_2,\\ y_2' - \varrho_2 y_2 &= y_3,\\ &\cdots\cdots\\ y_n' - \varrho_n y_n &= \varphi(x), \end{aligned}$$

wobei $y = y_1$ gesetzt ist und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\varrho^n + a_{n-1}\varrho^{n-1} + \ldots + a_1\varrho + a_0 = 0 \tag{12}$$

in irgendeiner Reihenfolge sind. Das ergibt sich am einfachsten durch Zerfällung des für (1) in Frage kommenden Operationssymbols

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 \quad (D \text{ Ableitungssymbol})$$

in das symbolische Produkt

$$(D - \varrho_1)(D - \varrho_2)\ldots(D - \varrho_n).$$

Zu jeder Lösung y von (1) gehört eine durch (11) eindeutig[5]) bestimmte Kette von Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dabei drücken sich $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ homogen linear durch $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, $\varphi(x)$ aus und umgekehrt:

$$y = y_1,\ y' = \varrho_1 y_1 + y_2,\ y'' = \varrho_1 y_1' + y_2' = \varrho_1^2 y_1 + (\varrho_1 + \varrho_2) y_2 + y_3, \ldots. \tag{13}$$

Wir zeigen: *Wenn $y = y_1$ für $x \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt, trifft dies auch für alle Funktionen der zugehörigen Kette zu*[6]).

Zunächst gilt für eine jede derartige Lösung

$$y^{(\nu)} = O(x^{n-1}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Denn man findet durch Integration aus (1)

$$y^{(n-1)} + a_{n-1}y^{(n-2)} + \ldots + a_2 y' + a_1 y = \int_0^x (\varphi(\xi) - a_0 y(\xi))\, d\xi + C = O(x),$$

$$y^{(n-2)} + a_{n-1}y^{(n-3)} + \ldots + a_2 y = O(x^2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y' = O(x^{n-1}).$$

Indem man diese Gleichungen rückwärts durchläuft, erhält man (14).

Wegen (13) zeigen daher die Funktionen der zugeordneten Kette, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ebenfalls das Verhalten

$$y_\nu = O(x^{n-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Wir betrachten nun vorerst den Fall, daß für alle Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von (12) $\sigma_\nu \neq 0$ ist. Durch Anwendung der für die Gleichungen erster Ordnung erhaltenen Ergebnisse finden wir dann schrittweise, daß für alle

---

[5]) Die Funktionenkette ist natürlich noch von der Reihenfolge der ϱ_ν abhängig.

[6]) Das ist nicht ganz selbstverständlich, da (3) Lösungen mit endlichem Grenzwert haben kann, ohne daß $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)$ existiert. Z. B. hat $y' = \cos(x^2)$ die konvergenten Lösungen

$$y = \int_0^x \cos(\xi^2)\, d\xi + C.$$

Ketten mit dem Verhalten (15) schärfer gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} y_n = -\frac{b}{\varrho_n}, && \lim_{x\to\infty} y_n' = 0,\\
&\lim_{x\to\infty} y_{n-1} = +\frac{b}{\varrho_n\,\varrho_{n-1}}, && \lim_{x\to\infty} y_{n-1}' = 0, \qquad (16)\\
&\cdots\cdots\cdots

Falls alle Wurzeln ϱ_ν von Null verschiedenen Realteil haben, gibt es, wie gezeigt, immer solche Ketten. Wenn aber die ϱ_ν zum Teil rein imaginär sind, ergeben sich für die Existenz derartiger Ketten notwendige Bedingungen. Man erhält sie, wenn man nacheinander Systeme (11) betrachtet, in denen jeweils eine dieser imaginären Wurzeln am Schluß steht. (Die obigen Ausführungen gelten ja für jedes System (11) unabhängig von der darin gewählten Reihenfolge der Wurzeln.)

Man braucht wieder wesentlich nur den Fall zu betrachten, daß $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = b = 0$ ist. Denn wenn $a_0 \neq 0$ ist, kann man (1) durch die Substitution $y = u + \frac{b}{a_0}$ immer auf diesen Fall zurückführen, und wenn $a_0 = 0$ ist, kommt überhaupt nur $b = 0$ in Frage. Es sei also $b = 0$ und in (11)

$$\varrho_n = \varrho_{n-1} = \cdots = \varrho_{n-l+1} = i\tau$$

eine rein imaginäre Wurzel mit der Vielfachheit l. Soll es Lösungen mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$ geben, so muß man (auch wenn $\tau = 0$ ist) nacheinander $y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-l+2}$ als nullstrebige Funktionen bestimmen können, und die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-i\tau\xi}\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \int_0^\infty e^{-i\tau\xi} y_n\,d\xi, \quad \ldots, \quad \int_0^\infty e^{-i\tau\xi} y_{n-l+2}\,d\xi$$

müssen existieren. Es muß dann

$$y_n = -e^{i\tau x}\int_x^\infty e^{-i\tau\xi}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$y_{n-1} = -e^{i\tau x}\int_x^\infty e^{-i\tau\xi} y_n\,d\xi = e^{i\tau x}\int_x^\infty d\xi_1 \int_{\xi_1}^\infty e^{-i\tau\xi_2}\varphi(\xi_2)\,d\xi_2, \quad \text{usw.}$$

sein, so daß man jene Integrale (abgesehen vom Vorzeichen) auch in der Form

$$\int_0^\infty e^{-i\tau\xi}\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \int_0^\infty d\xi_1 \int_{\xi_1}^\infty e^{-i\tau\xi_2}\varphi(\xi_2)\,d\xi_2, \quad \ldots,$$

$$\int_0^\infty d\xi_1 \int_{\xi_1}^\infty d\xi_2 \ldots \int_{\xi_{l-1}}^\infty e^{-i\tau\xi_l}\varphi(\xi_l)\,d\xi_l \tag{20}$$

schreiben kann. (Im allgemeinen Fall tritt in den Integralen $\varphi(x) - b$ an die Stelle von $\varphi(x)$.)

Die Existenz dieser Integrale (20) in bezug auf jede rein imaginäre Wurzel $i\tau$ von (12) ist also notwendig, damit (1) Lösungen mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$ haben kann.

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend.

Das ist ohne weiteres klar, wenn (12) nur eine einzige, n-fache, imaginäre Wurzel hat. Im allgemeinen Fall erkennt man es sehr einfach mittels symbolischer Partialbruchzerlegung: Es sei

$$(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)^{-1}$$
$$= A_{11}(x-\varrho_1)^{-1} + \ldots + A_{1l_1}(x-\varrho_1)^{-l_1} + \ldots + A_{kl_k}(x-\varrho_k)^{-l_k}$$

in Partialbrüche zerlegt, wobei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ die verschiedenen l_1-, l_2-, $\ldots$, l_k-fachen Wurzeln von (12) sein mögen. Dann läßt sich das allgemeine Integral von (1) symbolisch in der Form

$$(21) \qquad y = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)^{-1}\varphi(x)$$
$$= A_{11}(D-\varrho_1)^{-1}\varphi(x) + \ldots + A_{1l_1}(D-\varrho_1)^{-l_1}\varphi(x) + \ldots$$
$$+ A_{kl_k}(D-\varrho_k)^{-l_k}\varphi(x)$$

schreiben. Der Sinn dieser Gleichung ist: Man erhält alle Lösungen von (1) (vielleicht sogar mehrmals), wenn man

$$(22) \quad (D-\varrho_1)^{-1}\varphi(x), \quad \ldots, \quad (D-\varrho_1)^{-l_1}\varphi(x), \quad \ldots. \quad (D-\varrho_k)^{-l_k}\varphi(x)$$

die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen

$$(23) \qquad (D-\varrho_1)y = \varphi(x), \quad \ldots, \quad (D-\varrho_1)^{l_1}y = \varphi(x), \quad \ldots,$$
$$(D-\varrho_k)^{l_k}y = \varphi(x)$$

durchlaufen läßt. Man zeigt nämlich leicht durch Rechnung, daß jede Funktion von der Form (21) der Differentialgleichung (1) genügt, die man ja auch symbolisch in der Form

$$(D-\varrho_1)^{l_1}(D-\varrho_2)^{l_2}\ldots(D-\varrho_k)^{l_k}y = \varphi(x)$$

schreiben kann [7]).

Ist umgekehrt y irgendeine Lösung von (1), so erweisen sich die eindeutig bestimmten Funktionen

$$(24) \quad y_{\varkappa\lambda} = \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu D^\nu\Big)\big((D-\varrho_\varkappa)^{-\lambda}y\big) = (D-\varrho_1)^{l_1}\ldots(D-\varrho_\varkappa)^{l_\varkappa-\lambda}\ldots(D-\varrho_k)^{l_k}y$$
$$(a_n = 1;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

als Lösungen der Gleichungen (23), und andererseits ist

$$(25) \qquad \sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda}y_{\varkappa\lambda} = \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu D^\nu\Big)\Big(\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda}(D-\varrho_\varkappa)^{-\lambda}y\Big) = y.$$

Es ist also auch jede Lösung y in der Form (21) darstellbar.

---

[7]) Dabei setzt man zunächst vorteilhaft voraus, daß $\varphi(x)$ $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Nachträglich kann man dann auch einsehen, daß (21) allgemein gilt. Denn für Lösungen der homogenen Gleichung (26) erweist sich diese Darstellung als richtig. Wenn daher auch nur eine Funktion y^* von der Form (21) eine Lösung von (1) ist, was ja nach (24), (25) sicher zutrifft, so gilt dasselbe auch für alle Funktionen von der Form (21), da man ja jede in y^* und eine Lösung von (20) spalten kann.

Wir entnehmen daraus speziell für die homogene Gleichung

$$w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + a_1 w' + a_0 w = 0 \tag{26}$$

die übliche Darstellung

$$w = \sum_{\varkappa, \lambda} c_{\varkappa\lambda} x^{\lambda-1} e^{\varrho_\varkappa x}. \tag{27}$$

Wenn nun $\varphi(x)$ in bezug auf alle rein imaginären Wurzeln von (12) den Bedingungen (20) genügt, so kann man in (21) auf der rechten Seite alle Funktionen als konvergente Lösungen der Gleichungen (23) wählen und erhält so auch eine Lösung y der Gleichung (1) mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$. Die Bedingungen sind also in der Tat auch hinreichend.

Wir nehmen jetzt an, (1) habe Lösungen mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$. Wir können sie dann alle mittels eines Systems (11) gewinnen. Dabei ordnen wir aber jetzt die Wurzeln ϱ_ν so, daß $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_g$ die Wurzeln mit negativem Realteil sind, und es seien zunächst alle ϱ_ν von Null verschieden.

Dann stimmen alle Ketten $\{y_\nu\}$, die zu Lösungen y mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$ führen, in den Funktionen $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{g+1}$ überein. $y_g, y_{g-1}, \ldots, y_2, y_1$ dagegen können beliebig gewählt werden. Wegen (13) bedeutet das, daß es zu beliebig vorgegebenen Werten

$$y(0),\ y'(0),\ \ldots,\ y^{(g-1)}(0)$$

genau eine Lösung von (1) mit dem Verhalten (17), (18) gibt.

Ist aber eine Wurzel $\varrho_\nu = \varrho_{g+1} = 0$ (in welchem Falle $b = 0$ sein muß), dann kann man auch noch $y^{(g)}(0)$ beliebig vorgeben, nur hängt dann der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} y$ von $y^{(g)}(0)$ ab.

Die allgemeine Lösung von (1) mit dem Verhalten (17), (18) läßt sich auch in der Form

$$y = y^* + w \tag{28}$$

schreiben, wo y^* irgendeine partikuläre Lösung mit diesem Verhalten und w eine beliebige nullstrebige Lösung der homogenen Gleichung (26) ist (andere Lösungen mit endlichem $\lim_{x\to\infty} w$ hat (26) im Falle $a_0 \neq 0$ nicht). Aus dem dieser Gleichung entsprechenden System (11) ($\varphi(x) = 0$; $w_n = w_{n-1} = \ldots = w_{g+1} = 0$) erkennt man, daß das gerade die Lösungen der Gleichung

$$(D - \varrho_1)(D - \varrho_2) \ldots (D - \varrho_g) w = 0 \tag{29}$$

sind. (Für $a_0 = 0$ tritt an Stelle von (29) die Gleichung

$$(D - \varrho_1)(D - \varrho_2) \ldots (D - \varrho_g) D w = 0.) \tag{29'}$$

Zusammenfassend hat man also folgendes Ergebnis:

Satz I. *Es seien in der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \varphi(x) \tag{1}$$

die Koeffizienten a_ν konstant. $\varphi(x)$ sei für $x \geqq 0$ stetig und strebe für $x \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = b. \tag{2}$$

Dann gilt für alle etwaigen Lösungen y von (1), die für $x \to \infty$ ebenfalls endlichen Grenzwerten zustreben,

$$\lim_{x \to \infty} y' = 0, \quad \lim_{x \to \infty} y'' = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{x \to \infty} y^{(n)} = 0. \tag{18}$$

Es gibt genau dann solche Lösungen, wenn in bezug auf jede rein imaginäre l-fache Wurzel $\varrho = i\tau$ der charakteristischen Gleichung

$$\varrho^n + a_{n-1} \varrho^{n-1} + \ldots + a_1 \varrho + a_0 = 0 \tag{12}$$

die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-i\tau\xi} \psi(\xi)\, d\xi, \quad \int_0^\infty d\xi_1 \int_{\xi_1}^\infty e^{-i\tau\xi_1} \psi(\xi_2)\, d\xi_2, \quad \ldots,$$
$$\int_0^\infty d\xi_1 \int_{\xi_1}^\infty d\xi_2 \ldots \int_{\xi_{l-1}}^\infty e^{-i\tau\xi_l} \psi(\xi_l)\, d\xi_l \tag{20}$$

mit $\psi(x) = \varphi(x) - b$ existieren. Im Falle $a_0 = 0$ muß außerdem $b = 0$ sein.

Ist $a_0 \neq 0$, so streben diese Lösungen alle gegen denselben Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} y = \frac{b}{a_0}, \tag{17}$$

und zwar gibt es, unter g die Anzahl der Wurzeln ϱ_ν mit negativem Realteil verstanden, zu beliebig vorgegebenen Werten

$$y(0), \quad y'(0), \quad \ldots, \quad y^{(g-1)}(0)$$

genau eine derartige Lösung.

Ist dagegen $a_0 = 0$, also 0 eine (mehrfache) Wurzel von (12), so kann man auch noch $y^{(g)}(0)$ beliebig vorgeben, und $\lim_{x \to \infty} y$ hängt dann von $y^{(g)}(0)$ ab. Jeweils eine einzige dieser Lösungen (bei beliebig vorgegebenen $y(0), y'(0), \ldots, y^{(g-1)}(0)$) ist nullstrebig.

Insbesondere gibt es also, wenn (12) keine rein imaginäre Wurzel hat, immer Lösungen mit endlichem Grenzwert, die dann alle gegen $\frac{b}{a_0}$ streben. Falls alle ϱ_ν negativen Realteil haben, zeigen alle Lösungen dieses Verhalten, falls alle ϱ_ν positiven Realteil haben, eine einzige.

Hinreichend dafür, daß (1) Lösungen y mit endlichem Grenzwert $\lim_{x\to\infty} y$ hat, ist schon die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \xi^{l-1} e^{-i\tau\xi}\psi(\xi)\,d\xi \tag{30}$$

für jede l-fache auf der imaginären Achse liegende Wurzel τi von (12), da sie die Existenz der Integrale (20) nach sich zieht. Z. B. folgt allgemein aus der Existenz von $\int_0^\infty \xi f(\xi)\,d\xi$ bei beschränktem $f(\xi)$ wegen

$$\int_x^{x_1} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{x_1}\int_x^{x_1} \xi f(\xi)\,d\xi + \int_x^{x_1}\frac{1}{\xi^2}\int_x^{\xi}\eta f(\eta)\,d\eta\,d\xi \qquad (0<x\leqq x_1)$$

die von $\int_x^\infty f(\xi)\,d\xi$ für $x\geqq 0$, wobei noch $\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty f(\xi)\,d\xi = 0$ ist, und dann wegen

$$\int_0^\infty \xi f(\xi)\,d\xi = \int_0^\infty\int_\xi^\infty f(\eta)\,d\eta\,d\xi$$

weiter diejenige von $\int_0^\infty\int_\xi^\infty f(\eta)\,d\eta\,d\xi$. Notwendig ist die Existenz des des Integrals (30) aber nicht (vgl. Beispiel 3)[8]).

Beispiele.

1. (Beispiel von Perron.) Die Gleichung

$$y''+y=\frac{\cos x}{x} \qquad (x\geqq 1)$$

[8]) Die Bedingungen (20) lassen sich noch vorteilhaft in Existenzbedingungen gewisser Grenzwerte umformen, die den Cesàroschen Mitteln bei Reihen entsprechen. Bei stetigem, nullstrebigem $f(x)$ (auch noch unter allgemeineren Bedingungen) existieren nämlich das Integral

$$\int_0^\infty dx_1\int_{x_1}^\infty dx_2\ldots dx_{l-1}\int_{x_{l-1}}^\infty f(\xi)\,d\xi$$

und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(l-1)!\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\ldots dx_{l-1}\int_0^{x_{l-1}}\xi^{l-1}f(\xi)\,d\xi}{x^{l-1}} = {}_nC_{l-1} = \int_0^\infty \xi^{l-1}f(\xi)\,d\xi^u$$

immer gleichzeitig (mit demselben Wert), die Integrale (20) also gleichzeitig mit

$$C_{l-1} = \int_0^\infty \xi^{l-1}e^{-i\tau\xi}\psi(\xi)\,d\xi.$$

In diesem Zusammenhang erscheint das Integral (30) in klarerem Licht: Aus seiner Existenz folgt die seiner Mittel $C_p = \int_0^\infty \xi^{l-1}e^{-i\tau\xi}\psi(\xi)\,d\xi$ $(p=1,2,\ldots)$, also auch die der Integrale (20).

Ebenso kann man die Bedingungen (20) in Existenzbedingungen von Grenzwerten umformen, die den Hölderschen Mitteln entsprechen; unter gewissen Voraussetzungen kann man daraus die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Verfahrens auch bei Integralen folgern.

hat keine Lösung mit endlichem Grenzwert; denn die Integrale

$$\int_1^\infty \frac{e^{ix}\cos x}{x}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{e^{-ix}\cos x}{x}\,dx$$

existieren nicht.

2. Die Gleichung

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad (x \geqq 1$$

hat die einzige nullstrebige Lösung

$$y = -\frac{1}{2i}\,e^{ix}\int_x^\infty \frac{e^{-i\xi}}{\xi}\,d\xi + \frac{1}{2i}\,e^{-ix}\int_x^\infty \frac{e^{i\xi}}{\xi}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{\sin\tau}{x+\tau}\,d\tau.$$

3. Für die Gleichung

$$y'' - 2iy' - y = \frac{1}{x+1} \qquad (x \geqq 0)$$

existiert

$$\int_0^\infty\int_\xi^\infty \frac{e^{-i\eta}}{\eta+1}\,d\eta\,d\xi \qquad \left(\text{aber nicht } \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi+1}\,e^{-i\xi}\,d\xi\right).$$

Sie hat daher die einzige nullstrebige Lösung

$$y = e^{ix}\int_x^\infty\int_\xi^\infty \frac{e^{-i\eta}}{\eta+1}\,d\eta\,d\xi.$$

§ 2.

1. Die Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ stetig ist, kann man einschränken. Es genügt, vorauszusetzen, daß $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ beschränkt ist (für $x \geqq c$ mit hinreichend großem c trifft das schon wegen (2) zu) und so beschaffen, daß (1) überhaupt Lösungen hat, d. h. daß es Funktionen y gibt, die für jedes $x \geqq 0$ n-mal differenzierbar sind und die Gleichung (1) befriedigen.

Dann müssen nämlich auch die Gleichungen des Systems (11) lösbar sein, insbesondere die letzte:

$$y_n' - \varrho_n y_n = \varphi(x).$$

Es ist also $u' = \varphi(x)e^{-\varrho_n x}$ die Ableitung der (endlichen) Funktion $u = y_n e^{-\varrho_n x}$. Da $\varphi(x)$ in jedem endlichen Intervall beschränkt ist, muß nach allgemeinen Sätzen

$$u = \int_0^x e^{-\varrho_n \xi}\varphi(\xi)\,d\xi + C, \qquad \text{also} \qquad y_n = e^{\varrho_n x}\left(\int_0^x e^{-\varrho_n \xi}\varphi(\xi)\,d\xi + C\right)$$

sein (die Integrale sind dabei eventuell im Lebesgueschen Sinne zu verstehen), und wegen der sich daraus ergebenden Stetigkeit von y_n gilt Entsprechendes von $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_2, y_1$. Wenn aber diese Integraldarstellung gesichert ist, ergibt sich Satz I wie früher.

Ein Beispiel für ein zulässiges, nicht überall stetiges $\varphi(x)$ ist $\varphi(x) = \Phi'(x)$ mit

$$\Phi(x) = \frac{u^2}{x+1} \sin \frac{1}{u} \quad \text{mit} \quad u = \sin \pi x \quad \text{für} \quad x \not\equiv 0 \pmod 1;$$

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \equiv 0 \pmod 1.$$

Ganz allgemein hat (1) genau dann Lösungen, wenn die Gleichung $y' = \varphi(x)$ gelöst werden kann.

Sprungstellen von $\varphi(x)$ sind daher zunächst ausgeschlossen. Denn an Sprungstellen kann der Differentialgleichung nicht genügt werden. Es gibt dann höchstens Funktionen, die ihr an allen andern Stellen genügen. Aber für diese „Lösungen" gilt Satz I nicht mehr. Es habe z. B. in $y' - \varrho y = \varphi(x)$ die Funktion $\varphi(x)$ beliebig weit nach rechts immer wieder Sprungstellen; im übrigen sei $\varphi(x)$ stetig und zeige das Verhalten (2). Wenn man dann in den einzelnen von den Sprungstellen gebildeten Intervallen über die Integrationskonstante geeignet verfügt, kann man „Lösungen" zusammensetzen, die nicht gegen $-\frac{b}{\varrho}$ streben, auch wenn $\Re \varrho < 0$ ist. (Wenn man aber nur die an den Sprungstellen von $\varphi(x)$ *stetigen* Lösungen in Betracht zieht, bleibt Satz I in diesem Beispiel gültig.)

2. Wir beweisen noch den für den folgenden Abschnitt wichtigen

Hilfssatz 1. *Von den Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ der charakteristischen Gleichung (12) mögen g ($\leqq n$) negativen Realteil haben, und p sei die höchste bei rein imaginären Wurzeln vorkommende Vielfachheit. Es strebe weiter in (1) die für $x \geqq 0$ stetige Funktion $\varphi(x)$ mit wachsendem x gegen Null, und für ein $\mu(x) \geqq |\varphi(x)|$ konvergiere*

$$\int_0^\infty x^{p-1} \mu(x)\, dx. \tag{48}$$

Dann hat (1) sicher auch nullstrebige Lösungen. Dabei können (nach Satz I) $y(0), y'(0), \ldots, y^{(g-1)}(0)$ beliebig vorgegeben werden. Für die durch $\bar{y}(0) = \bar{y}'(0) = \ldots = \bar{y}^{(g-1)}(0) = 0$ festgelegte nullstrebige Lösung $\bar{y}$ gilt eine Beziehung

$$|\bar{y}^{(\nu)}| \leqq \eta(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{49}$$

wo $\eta(x)$ eine nullstrebige, nur von den Koeffizienten a_ν von (1) und von $\mu(x)$ abhängige Funktion ist.

Wenn kein ϱ_ν rein imaginär ist ($p = 0$), genügt die Voraussetzung $\varphi(x) \to 0$ für $x \to \infty$.[9])

Zunächst existiert wegen (48) ($p \geqq 1$ vorausgesetzt) auch jedes Integral

$$\int_0^\infty x^{r-1} \varphi(x)\, e^{-i\tau x}\, dx \qquad (1 \leqq r \leqq p).$$

Nach Satz I (bzw. wegen (30)) hat daher die Gleichung

$$(D - i\tau)^r y = \varphi(x)$$

(auch bei $\tau = 0$) genau die nullstrebige Lösung

$$y = e^{i\tau x} \int_\infty^x d\xi_1 \int_\infty^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_\infty^{\xi_{r-1}} e^{-i\tau \xi_r} \varphi(\xi_r)\, d\xi_r,$$

und es gilt

$$|y| \leqq \int_x^\infty d\xi_1 \int_{\xi_1}^\infty \dots \int_{\xi_{r-1}}^\infty \mu(\xi_r)\, d\xi_r = t_r(x) = o(1).$$

Weiter spalten wir (1) in die beiden Gleichungen

(a) $$(D - \varrho_1)(D - \varrho_2) \dots (D - \varrho_g)(D - \varrho_{g+1}) \dots (D - \varrho_h)\, y_1 = y_2,$$

(b) $$(D - \varrho_{h+1}) \dots (D - \varrho_n)\, y_2 = \varphi(x),$$

wobei $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_g$ die Wurzeln mit negativem, $\varrho_{h+1}, \varrho_{h+2}, \dots, \varrho_n$ diejenigen mit verschwindendem Realteil sind. (b) lösen wir nun mittels symbolischer Partialbruchzerlegung entsprechend (21). Man erhält eine einzige nullstrebige Lösung $\bar{y}_2$, und es gilt

$$|\bar{y}_2| \leqq M T^*(x) = T(x).$$

Dabei ist M etwa gleich der Summe der Beträge der in der Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{(z-\varrho_{h+1})(z-\varrho_{h+2}) \dots (z-\varrho_n)}$ auftretenden Konstanten und $T^*(x) = t_1(x) + t_2(x) + \dots + t_p(x) = o(1)$. $T(x)$ hängt also nur von den a_ν und $\mu(x)$ ab.

Die Gleichung (a) mit $y_2 = \bar{y}_2$ vergleichen wir mit

(a′) $$(D - \sigma_1)(D - \sigma_2) \dots (D - \sigma_g)(D - \sigma_{g+1}) \dots (D - \sigma_h)\, t(x) = T(x).$$

Zwischen den nullstrebigen Lösungen $y_1 = \bar{y}$ und $\bar{t}(x)$ von (a) und (a′) mit $\bar{y}(0) = \bar{y}'(0) = \dots = \bar{y}^{(g-1)}(0) = 0$, bzw. $\bar{t}(0) = \bar{t}'(0) = \dots = \bar{t}^{(g-1)}(0) = 0$ besteht die Beziehung

$$|\bar{y}(x)| \leqq |\bar{t}(x)| = \eta_1(x) = o(1).$$

---

[9]) Hilfssatz 1 entspricht Hilfssatz 2 in I, § 4 meiner Dissertation. Man kann ebenso die dortigen Hilfssätze 1, 3, 4 übertragen und entsprechende Folgerungen ziehen.

Man entnimmt dies etwa direkt aus der expliziten Darstellung

$$\bar{y} = \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{g-1}} d\xi_g \int_\infty^{\xi_g} d\xi_{g+1} \int_\infty^{\xi_{g+1}} d\xi_{g+2} \dots \int_\infty^{\xi_{h-1}} u\, \bar{y}_2\, d\xi_h,$$

(50)

$$\bar{t}(x) = \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{g-1}} d\xi_g \int_\infty^{\xi_g} d\xi_{g+1} \int_\infty^{\xi_{g+1}} \dots \int_\infty^{\xi_{h-1}} v\, T(\xi_h)\, d\xi_h,$$

mit $u = e^{(x-\xi_1)\varrho_1 + (\xi_1-\xi_2)\varrho_2 + \dots + (\xi_{h-1}-\xi_h)\varrho_h}$ und $v = |u| = e^{(x-\xi_1)\sigma_1 + \dots + (\xi_{h-1}-\xi_h)\sigma_h}$. Für $\bar{y}$ selbst ist also die Abschätzung nach oben gesichert.

Wir können $\bar{y}$ aber auch mittels des Systems (11) über eine Kette von nullstrebigen Funktionen $\bar{y}_n, \bar{y}_{n-1}, \dots, \bar{y}_1$ gewinnen. Dabei kann man $\bar{y}_\nu$ als Lösung der Gleichung

$$(D - \varrho_\nu)(D - \varrho_{\nu+1}) \dots (D - \varrho_n) y_\nu = \varphi(x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

auffassen, und zwar ist es die nullstrebige Lösung mit $\bar{y}_\nu(0) = 0$, $\bar{y}_\nu'(0) = 0, \dots$, soweit über diese Werte beliebig verfügt werden kann. Es ergeben sich also für alle diese Funktionen die Abschätzungen

$$|\bar{y}_\nu| \leqq \eta_\nu(x) = o(1) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Daraus folgt schließlich nach (13)

$$|\bar{y}'| \leqq |\varrho_1|\, \eta_1(x) + \eta_2(x), \quad y'' \leqq |\varrho_1|^2\, \eta_1(x) + (|\varrho_1| + |\varrho_2|)\, \eta_2(x) + \eta_3(x), \dots,$$

also

$$|\bar{y}^{(\nu)}| \leqq (1 + |\varrho_1| + |\varrho_2| + \dots + |\varrho_n|)^n (\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_n(x) + \mu(x))$$
$$= \eta(x) = o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n),$$

und $\eta(x)$ hängt nur von den a_ν und von $\mu(x)$ ab.

Für $x \geqq x_0 \geqq 0$ gilt (49) mit demselben $\eta(x)$ auch für die nullstrebige Lösung mit $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(g-1)}(x_0) = 0$. Man erhält diese Lösung nämlich, wenn man in (50) rechts in den g ersten Integralen als untere Grenze x_0 anstatt 0 setzt. Daraus entnimmt man für $x \geqq x_0$ sofort die Abschätzung

$$|y| \leqq |\bar{t}(x)| = \eta_1(x) \leqq \eta(x)$$

und Entsprechendes gilt für $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

II. Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten.

§ 1.

Es seien in der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = \varphi(x) \tag{51}$$

die Koeffizienten $a_\nu(x)$ für $x \geqq 0$ stetige Funktionen, die mit wachsen-

dem x gegen endliche Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} a_\nu(x) = a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{52}$$

streben. Die rechtsstehende Funktion $\varphi(x)$ sei für $x \geqq 0$ stetig. Unter diesen Voraussetzungen gibt es immer genau eine Lösung von (51), die an einer Stelle $x_0 \geqq 0$ beliebig vorgegebene Werte $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ annimmt und bei jeder Lösung sind die Ableitungen bis zur n-ten Ordnung für $x \geqq 0$ überall stetig.

Wir betrachten zugleich mit (51) die Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\bar{y}^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \bar{y}^{(\nu)} = \varphi(x) \tag{53}$$

und untersuchen, ob zwischen dem asymptotischen Verhalten der Lösungen von (51) und (53) Beziehungen bestehen.

Wir können (51) auch die Form

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y^{(\nu)} = \varphi(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \delta_\nu(x)\, y^{(\nu)} \tag{51a}$$

mit

$$\delta_\nu(x) = a_\nu - a_\nu(x), \qquad \lim_{x\to\infty} \delta_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

geben, wofür wir noch abkürzend symbolisch

$$L[y] = \varphi(x) + V_x[y]$$

schreiben wollen. Die Gleichung (51a) suchen wir nun durch sukzessive Approximationen zu lösen:

Ausgehend von einer Lösung $\bar{y} = y_0$ von (53) bestimmen wir nacheinander Funktionen

$$y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots \tag{54}$$

als Lösungen der Gleichungen

$$L[y_k] = \varphi(x) + V_x[y_{k-1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{55$^{(k)}$}$$

Damit ist gleichbedeutend die Bestimmung von Funktionen

$$u_0 = y_0, \; u_1 = y_1 - y_0, \; \ldots, \; u_k = y_k - y_{k-1}, \ldots \tag{56}$$

als Lösungen der Gleichungen

$$L[u_k] = V_x[u_{k-1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{57$^{(k)}$}$$

Aus einer Folge (56) erhält man wieder eine Folge (54) durch

$$y_k = u_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} u_\varkappa = y_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} u_\varkappa.$$

Konvergieren die Funktionen y_k — in deren Wahl noch ein weiter Spielraum gegeben ist — und ihre ersten n Ableitungen $y_k', y_k'', \ldots, y_k^{(n)}$ gleichmäßig gegen Grenzfunktionen

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y, \quad \lim_{k\to\infty} y_k^{(\nu)} = y^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist y eine Lösung von (51).

Wir nehmen nun an, (53) habe eine Lösung $\bar{y} = y_0$, die mitsamt ihren ersten $n-1$ Ableitungen für $x \geqq 0$ beschränkt ist:

$$|y_0^{(\nu)}| \leqq C \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{58}$$

Dann ist

$$|V_x[y_0]| \leqq C(|\delta_0(x)| + |\delta_1(x)| + \ldots + |\delta_{n-1}(x)|) = C\,\delta(x) = o(1).$$

Nach Hilfssatz 1 aus I, § 2, 2 mit $\delta(x) = \mu(x)$ hat dann die Gleichung

$$L[y_1] = V_x[y_0] \tag{57$^{(1)}$}$$

sicher dann nullstrebige Lösungen, wenn keine Wurzel $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ der charakteristischen Gleichung

$$\varrho^n + a_{n-1}\varrho^{n-1} + \ldots + a_1\varrho + a_0 = 0 \tag{59}$$

rein imaginär ist, und ebenso auch, wenn zwar rein imaginäre ϱ_ν vorkommen, aber dann über (52) hinaus

$$\int_0^\infty x^{p-1}\delta(x)\,dx \tag{60}$$

konvergiert; dabei ist p die größte bei rein imaginären Wurzeln vorkommende Vielfachheit. Wir setzen voraus, daß einer dieser beiden Fälle vorliegt.

Aus den dann vorhandenen nullstrebigen Lösungen von (57$^{(1)}$) greifen wir nun diejenige heraus, die an einer bestimmten Stelle $x_0 \geqq 0$, über die noch geeignet verfügt werden wird, die Werte $u_1(x_0) = u_1'(x_0) = \ldots = u_1^{(g-1)}(x_0) = 0$ hat; g ist dabei wieder die Anzahl der ϱ_ν mit negativem Realteil. Diese Lösung genügt nach Hilfssatz 1 für $x \geqq x_0$ einer Beziehung

$$|u_1^{(\nu)}| \leqq C\,\eta(x) \leqq C\eta \qquad (\eta = \operatorname*{Max}_{x \geqq x_0} \eta(x);\ \nu = 0, 1, \ldots, n),$$

so daß also

$$|V_x[u_1]| \leqq C\eta\,\delta(x)$$

ist; $\eta(x)$ ist dabei von x_0 unabhängig. Man kann daher weiter u_3 und ebenso dann $u_3, u_4, \ldots, u_k, \ldots$ eindeutig als nullstrebige Lösungen der Gleichungen (57) unter der Nebenbedingung

$$u_k(x_0) = u_k'(x_0) = \ldots = u_k^{(g-1)}(x_0) = 0$$

bestimmen, und man erhält für sie für $x \geqq x_0$ die Abschätzung

$$|u_k^{(\nu)}| \leqq C\eta^{k-1}\eta(x) \leqq C\eta^k \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{61}$$

Wir wählen nun x_0 so, daß

$$\eta = \operatorname*{Max}_{x \geqq x_0} \eta(x) < 1 \tag{62}$$

wird; wegen $\eta(x) = o(1)$ ist das möglich. Dann konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

für $x \geqq x_0$ gleichmäßig, und wir haben in

$$y = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \bar{y} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{63}$$

für $x \geqq x_0$ eine Lösung von (51). Wegen (61) zeigt sie das Verhalten

$$y^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu)} + O(\eta(x)) = \bar{y}^{(\nu)} + o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{64}$$

Ferner hat sie die Werte

$$y^{(\nu)}(x_0) = \bar{y}^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g-1). \tag{65}$$

Nachträglich kann man sie nach links bis $x = 0$ fortsetzen.

Die so erhaltene Lösung y ist auch die einzige, die den Bedingungen (64) und (65) genügt.

Ist nämlich y^* irgendeine derartige Lösung, dann gilt wegen (64) für $y^* - \bar{y} = r_0(x)$

$$|r_0^{(\nu)}(x)| = o(1) \leqq C_1 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Man kann daher zu $r_0(x)$ nacheinander Funktionen $r_1(x), \ldots, r_k(x), \ldots$ als nullstrebige Lösungen der Gleichungen

$$L[r_k(x)] = V_x[r_{k-1}(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

unter der Nebenbedingung $r_k(x_0) = r_k'(x_0) = \ldots = r_k^{(g-1)}(x_0) = 0$ hinzubestimmen, und für diese Funktionen gilt

$$|r_k(x)| \leqq C_1 \eta^k.$$

Es ist also für jedes feste $x \geqq x_0$

$$\lim_{k \to \infty} r_k(x) = 0,$$

woraus für y^* die Darstellung

$$y^* = \bar{y} + \sum_{k=1}^{\infty} (r_{k-1}(x) - r_k(x))$$

folgt. Nun sind aber die Funktionen

$$u_1^* = r_0(x) - r_1(x),\ u_2^* = r_1(x) - r_2(x),\ \ldots,\ u_k^* = r_{k-1}(x) - r_k(x),\ \ldots$$

die nullstrebigen Lösungen der Gleichungen (57) mit den Werten $u_k^*(x_0) = u_k^{*\prime}(x_0) = \ldots = u_k^{*(g-1)}(x_0) = 0$. Sie sind daher mit den obigen Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ identisch, folglich y^* mit der Lösung (63).

Es gibt also zu jeder Lösung $\bar{y}$ von (53) mit dem Verhalten (58) genau eine Lösung y von (51), die den Bedingungen (64) und (65) genügt.

Umgekehrt habe (51) eine Lösung y mit

$$|y^{(\nu)}| < C \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Es ist dann

$$|V_x[y]| < C\,\delta(x),$$

und die Gleichung

$$L[v] = V_x[y] = \psi(x)$$

hat genau eine nullstrebige Lösung v mit $v(x_0) = v'(x_0) = \ldots = v^{(g-1)}(x_0) = 0$. Wegen (51a) hat daher (53) genau die Lösung

$$\bar{y} = y - v(x)$$

mit dem Verhalten

$$\bar{y}^{(\nu)} = y^{(\nu)} + o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{66}$$

$$\bar{y}^{(\nu)}(x_0) = y^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g-1); \tag{67}$$

hier braucht x_0 nicht der Bedingung (62) zu genügen.

Wir erhalten so den

Satz III. *Es seien in der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = \varphi(x) \tag{51}$$

die Koeffizienten $a_\nu(x)$ für $x \geqq 0$ stetig und streben mit wachsendem x gegen endliche Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} a_\nu(x) = a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{52}$$

Wenn unter den Wurzeln ϱ_ν der charakteristischen Gleichung

$$\varrho^n + a_{n-1}\varrho^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{59}$$

rein imaginäre vorkommen, deren höchste Vielfachheit p sei, konvergiere außerdem

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,\delta(x)\,dx \tag{60}$$

$$(\delta(x) = |\delta_0(x)| + |\delta_1(x)| + \ldots + |\delta_{n-1}(x)|;\ \delta_\nu(x) = a_\nu - a_\nu(x)).$$

$\varphi(x)$ sei für $x \geqq 0$ stetig.

Dann haben die Gleichungen (51) *und*

$$\bar{y}^{(n)} + a_{n-1}\,\bar{y}^{(n-1)} + \ldots + a_1\,\bar{y}' + a_0\,\bar{y} = \varphi(x) \tag{53}$$

immer gleichzeitig Lösungen, die samt ihren ersten $n-1$ Ableitungen beschränkt bleiben

Zu jeder derartigen Lösung $\bar{y}$ von (53) *gibt es, unter g die Anzahl der ϱ_ν mit negativem Realteil verstanden, genau eine Lösung y von* (51) *mit dem Verhalten*

$$y^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu)} + o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{64}$$

$$y^{(\nu)}(x_0) = \bar{y}^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g-1). \tag{65}$$

x_0 ist dabei der Bedingung (62) *entsprechend hinreichend groß zu wählen.*

Umgekehrt gibt es zu jeder derartigen Lösung y von (51) *genau eine Lösung $\bar{y}$ von* (53) *mit*

$$\bar{y}^{(\nu)} = y^{(\nu)} + o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{66}$$

$$\bar{y}^{(\nu)}(x_0) = y^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g-1). \tag{67}$$

x_0 kann hier beliebig gewählt werden.

Man kann diesen Satz noch verallgemeinern. Wir machen zu diesem Zweck die Substitution

$$y = e^{sx} v, \tag{68}$$

wo $s \neq 0$ irgendeine reelle Zahl ist. Dadurch geht (51) über in

$$v^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^* v^{(\nu)} = \varphi(x) e^{-xs} \tag{69}$$

mit

$$a_\nu^*(x) = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} s^{\mu-\nu} a_\mu(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} a_\nu^*(x) = \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} s^{\mu-\nu} a_\mu = a_\nu^* \quad (a_n = 1;\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Die zu (69) gehörige charakteristische Gleichung

$$\varrho^n + a_{n-1}^* \varrho^{n-1} + \ldots + a_1^* \varrho + a_0^* = 0 \tag{70}$$

hat also die Wurzeln $\varrho_\nu^* = \varrho_\nu - s$.

Durch Anwendung von Satz III auf (69) — die Bedingung (60) ändert sich entsprechend — erhält man den

Satz IIIa. *Es sei in der Differentialgleichung* (51) *die Voraussetzung* (52) *erfüllt, und für alle Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von* (50) *gelte $\sigma_\nu \neq s$. Dann haben* (51) *und* (53) *immer gleichzeitig Lösungen mit dem Verhalten*

$$y^{(\nu)} = O(e^{sx}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{71}$$

Das gilt auch noch, wenn es Wurzeln ϱ_ν mit $\sigma_\nu = s$ gibt, deren höchste Vielfachheit p_s sei, wofern dann noch mit dem $\delta(x)$ des Satzes III

$$\int_0^\infty x^{p_s - 1} \delta(x)\, dx \tag{72}$$

konvergiert. Genauer gibt es, unter g_s die Anzahl der ϱ_ν mit $\sigma_\nu < s$ verstanden, bei genügend großem x_0 zu jeder derartigen Lösung $\bar{y}$ von (53) *eine einzige Lösung y von* (51) *mit*

$$y^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu)} + o(e^{sx}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{73}$$

$$y^{(\nu)}(x_0) = \bar{y}^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g_s - 1); \tag{74}$$

und zu jeder solchen Lösung y von (51) *bei beliebigem $x_0 \geqq 0$ eine einzige Lösung $\bar{y}$ von* (53) *mit*

$$\bar{y}^{(\nu)} = y^{(\nu)} + o(e^{sx}), \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{75}$$

$$\bar{y}^{(\nu)}(x_0) = y^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g_s - 1). \tag{76}$$

Aus den obigen Ausführungen folgert man leicht auch den

Satz IIIb. *Es möge unter den Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von* (59) *solche mit $\sigma_\nu = s$ geben, und es konvergiere*

$$\int_0^\infty x^\lambda \delta(x)\, dx \tag{77}$$

für irgendein reelles $\lambda \geqq p_s - 1$.

Dann gibt es bei genügend großem x_0 zu jeder Lösung $\bar{y}$ von (53) *mit*

$$\bar{y}^{(\nu)} = O(e^{sx} x^{\lambda - p_s + 1}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{78}$$

eine einzige Lösung y von (51) *mit*

$$y^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu)} + o(e^{sx}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{79}$$

$$y^{(\nu)}(x_0) = \bar{y}^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g_s - 1). \tag{80}$$

Entsprechendes gilt im umgekehrten Falle.

Es ist nämlich im Falle $s = 0$ für eine Lösung $\bar{y}$ mit dem Verhalten (78) $V_x[\bar{y}] = O(x^{-(p_s-1)}(x^\lambda \delta(x)))$, weshalb (57[(1)]) wieder *eine* nullstrebige Lösung u_1 mit $u_1(x_0) = \ldots = u_1^{(g_s-1)}(x_0) = 0$ hat usw. Den allgemeinen Fall mit beliebigem s erledigt man wieder mittels der Substitution (68).

Daß in Satz III die Voraussetzung (60) nicht ganz unwesentlich ist, zeigen die Gleichungen

$$y' = 0 \quad \text{mit} \quad y = c,$$

$$y' - \frac{1}{x+1} y = 0 \quad \text{mit} \quad y = c(x+1),$$

$$y' + \frac{1}{x+1} y = 0 \quad \text{mit} \quad y = \frac{c}{x+1}.$$

§ 2.

Wir verwenden die Ergebnisse des letzten Paragraphen, um bei bekanntem asymptotischen Verhalten von $\varphi(x)$ Schlüsse auf das asymptotische Verhalten der Lösungen von (51) zu ziehen.

Speziell betrachten wir den Fall, daß $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ stetig und beschränkt ist.

Man zeigt dann genau wie in I, § 1, daß, wenn keine Wurzel $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von (59) rein imaginär und g die Anzahl der ϱ_ν mit $\sigma_\nu < 0$ ist, zu beliebigen Werten $\bar{y}(x_0), \bar{y}'(x_0), \ldots, \bar{y}^{(g-1)}(x_0)$ genau eine Lösung $\bar{y}$ von (53) existiert, die mitsamt ihren ersten n Ableitungen beschränkt bleibt.

Nach Satz III gibt es dazu, wenn x_0 genügend groß ist, genau eine Lösung von (51) mit dem Verhalten

$$y^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu)} + o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{64}$$

$$y^{(\nu)}(x_0) = \bar{y}^{(\nu)}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g-1), \tag{65}$$

und das ist auch die einzige Lösung von (51), die die Anfangswerte (64) hat und mitsamt ihren n ersten Ableitungen beschränkt bleibt. Denn zu jeder derartigen Lösung Y gibt es eine Lösung $\overline{Y}$ von (53) mit

$$\overline{Y}^{(\nu)} = Y^{(\nu)} + o(1) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n);$$

$$\overline{Y}^{(\nu)}(x_0) = Y^{(\nu)}(x_0) = \bar{y}(x_0) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, g-1).$$

Nach dem eben Gesagten muß aber $\overline{Y}$ mit $\bar{y}$ identisch sein, mithin Y mit y.

Wir zeigen weiter, daß die so erhaltenen Lösungen die einzigen beschränkten Lösungen überhaupt sind, d. h. daß es keine beschränkte Lösung von (51) gibt, deren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung nicht auch beschränkt sind. Das folgt aus

Hilfssatz 2. *Es habe $f(x)$ für $x \geqq 0$ stetige Ableitungen bis zur m-ten Ordnung, und es sei für alle x mit* $\operatorname{Max}_{0 \leqq \xi \leqq x} |f^{(\nu)}(\xi)| \neq 0$

$$Q_{\mu\nu}(x) = \frac{\operatorname{Max}_{0 \leqq \xi \leqq x} |f^{(\mu)}(\xi)|}{\operatorname{Max}_{0 \leqq \xi \leqq x} |f^{(\nu)}(\xi)|} \qquad \left(0 \leqq \begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix} \leqq m\right), \tag{81}$$

wodurch $Q_{\mu\nu}(x)$ bei nicht identisch verschwindendem $f^{(\nu)}(x)$ sicher für alle hinreichend großen x definiert ist. Es gilt: Wenn $f'(x)$ für $x \geqq 0$ nicht identisch verschwindet und

$$\lim_{x \to \infty} Q_{01}(x) = 0 \tag{82}$$

ist, dann verschwindet auch keine der höheren Ableitungen identisch, und es gilt allgemein

$$\lim_{x \to \infty} Q_{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (\mu < \nu \leqq m). \tag{83}$$

Da $\operatorname{Max}_{0 \leqq \xi \leqq x} |f(\xi)|$ mit wachsendem x sicher nicht abnimmt, muß wegen (82) $\operatorname{Max}_{0 \leqq \xi \leqq x} |f'(\xi)|$ zunehmen, und man kann $x = x^*$ beliebig groß

) bestimmen, daß

$$\text{84)} \qquad \operatorname*{Max}_{0 \leqq \xi \leqq x^*} |f'(x)| = |f'(x^*)| \neq 0$$

ird. Bei hinreichend großem x^* ist dabei noch $0 < Q_{01}(x^*) < \frac{x^*}{4}$. us der Taylorschen Formel erhält man

$$\frac{h^2}{2} \frac{f''(x^*-\vartheta h)}{f'(x^*)} = h + \frac{f(x^*-h)-f(x^*)}{f'(x^*)} \qquad (0 \leqq h \leqq x^*;\ 0 < \vartheta < 1),$$

nd indem man hier $h = 4\,Q_{01}(x^*)$ setzt:

$$8\,Q_{01}^2(x^*) \left| \frac{f''(x^*-\vartheta h)}{f'(x^*)} \right| \geqq 2\,Q_{01}(x^*) > 0.$$

$''(x)$ kann also nicht identisch verschwinden, und es ist

$$Q_{12}(x^*) \leqq \left| \frac{f'(x^*)}{f''(x^*-\vartheta h)} \right| \leqq 4\,Q_{01}(x^*).$$

Mit wachsendem $x = x^*$ strebt daher $Q_{12}(x) \to 0$, wegen (84) also mit achsendem x überhaupt. Gleichzeitig strebt auch $Q_{02}(x) = Q_{01}(x) \cdot Q_{12}(x)$ egen Null. Die weiteren Beziehungen (83) entnehmen wir daraus durch nduktion (man setzt $f'(x) = f_1(x)$, $f''(x) = f_1'(x)$ usw.).

Gesetzt nun, (51) habe eine beschränkte Lösung y, deren Ableitungen is zur n-ten Ordnung nicht alle beschränkt sind; $y^{(n-m+1)}$ $(1 \leqq m \leqq n)$ ei die erste unter ihnen, für die $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} |y^{(n-m+1)}| = \infty$ ist.

Wir setzen dann $y^{(n-m)} = f(x)$ und wenden Hilfssatz 2 an (unter en obigen Voraussetzungen sind die Ableitungen $y^{(\nu)}$ ja sicher stetig).)a $y^{(n-m)} = f(x)$ noch beschränkt ist, strebt $Q_{01}(x) \to 0$, also auch $_{0m}(x)$, $Q_{1m}(x)$, ..., $Q_{m-1,m}(x)$. Läßt man $x = x^*$ speziell die Werte urchlaufen, für die $\operatorname*{Max}\limits_{0 \leqq \xi \leqq x^*} |y^{(n)}(\xi)| = |y^{(n)}(x^*)| \neq 0$ ist (es gibt beliebig roße derartige Zahlen), dann streben die Quotienten

$$\frac{y^{(n-m)}}{y^{(n)}}, \quad \frac{y^{(n-m+1)}}{y^{(n)}}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{(n-1)}}{y^{(n)}} \quad \text{und weiter auch} \quad \frac{y}{y^{(n)}}, \quad \frac{y'}{y^{(n)}}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{(n-m-1)}}{y^{(n)}}$$

egen Null. Aus (51) folgt dann (*auch wenn die $a_\nu(x)$ für $x \geqq 0$ nur tetig und beschränkt sind*)

$$\lim_{x^* \to \infty} \frac{\varphi(x^*)}{y^{(n)}(x^*)} = 1,$$

as bei beschränktem $\varphi(x)$ nicht sein kann.

Zusammenfassend haben wir also:

Satz IV. *Es seien in* (51) *die Koeffizienten $a_\nu(x)$ für $x \geqq 0$ stetig nd genügen der Voraussetzung* (52); *$\varphi(x)$ sei für $x \geqq 0$ stetig und beschränkt.*

Dann bleiben für alle etwaigen beschränkten Lösungen y auch $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ beschränkt.

Ist keine Wurzel $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von (59) rein imaginär und g die Anzahl der ϱ_ν mit $\sigma_\nu < 0$, dann gibt es bei genügend großem x_0 zu beliebigen Werten $y(x_0), y'(x), \ldots, y^{(g-1)}(x_0)$ genau eine derartige Lösung. Im Falle $g = 0$ gibt es überhaupt nur eine einzige.

Allgemein gibt es unter der Voraussetzung (52) bzw. (60) bei beschränktem $\varphi(x)$ genau dann beschränkte Lösungen, wenn (53) solche hat.

Ein Vergleich der Sätze IV und III mit Satz I ergibt den

Zusatz. *Strebt die für $x \geqq 0$ stetige Funktion $\varphi(x)$ für $x \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = b, \tag{85}$$

so zeigen, wenn (52) erfüllt und keine Wurzel ϱ_ν von (59) rein imaginär ist, die beschränkten Lösungen von (51) alle das Verhalten

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{b}{a_0}, \quad \lim_{x\to\infty} y' = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{x\to\infty} y^{(n)} = 0. \tag{86}$$

Wenn (59) rein imaginäre Wurzeln hat und (60) erfüllt ist, gibt es genau dann Lösungen y mit endlichem $\lim_{x\to\infty} y$, wenn in bezug auf jede rein imaginäre l-fache Wurzel $\varrho = i\tau$ die Integrale (20) existieren (bei $a_0 = 0$ muß $b = 0$ sein).

Substitutionen von der Form (68) liefern allgemeiner

Satz IVa. *Es sei in (51) die Voraussetzung (52) erfüllt und*

$$\varphi(x) = O(e^{sx}). \tag{87}$$

Dann ist für alle Lösungen y mit $y = O(e^{sx})$ auch

$$y^{(\nu)} = O(e^{sx}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{88}$$

Gilt $\sigma_\nu \neq s$ für alle $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ und ist g_s die Anzahl der ϱ_ν mit $\sigma_\nu < s$, dann gibt es bei genügend großem x_0 zu beliebigen Werten $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(g_s-1)}(x_0)$ genau eine Lösung mit dem Verhalten (88).

Satz V. *Es sei in der Gleichung (51) die Voraussetzung (52) erfüllt, und es sei*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|\varphi(x)| \leqq s. \tag{89}$$

(Die Koeffizienten $a_\nu(x)$ und $\varphi(x)$ sollen wie immer für $x \geqq 0$ stetig sein.) g_s^* sei die Anzahl der Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von (59) mit $\sigma_\nu \leqq s$.

Dann gibt es bei genügend großem x_0 zu beliebigen Werten $y(x_0,)$ $y'(x_0), \ldots, y^{(g_s^*-1)}(x_0)$ genau eine Lösung y mit

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|y^{(\nu)}(x)| \leqq s \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{90}$$

Für kleines $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich genau g_s^* Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ mit $\sigma_\nu < s + \varepsilon$, und außerdem ist

$$\varphi(x) = O(e^{(s+\varepsilon)x}).$$

Es gibt daher nach Satz IVa zu beliebigen Werten $y(x_0)$, $y'(x_0)$, ..., $y^{(g_s^*-1)}(x_0)$ genau eine Lösung y mit

$$y^{(\nu)} = O(e^{(s+\varepsilon)x}) \quad \text{oder} \quad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|y^{(\nu)}(x)| \leqq s + \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Dabei hängt es zunächst von ε ab, wie groß x_0 mindestens zu wählen ist. Da man aber x_0 zugleich auch für ein beliebig gegebenes, positives $\varepsilon' < \varepsilon$ passend wählen kann, ist für die so gefundenen Lösungen zugleich auch

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|y^{(\nu)}| \leqq s + \varepsilon' \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Läßt man hier $\varepsilon' \to 0$ streben, so erhält man Satz V.

§ 3.

Wir machen einige Anwendungen auf die homogene Gleichung

$$w^{(n)} + a_{n-1}(x)\, w^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) w' + a_0(x) w = 0. \tag{91}$$

Satz V besagt hier:

Es sei in (91) *die Voraussetzung* (52) *erfüllt. Dann gibt es bei genügend großem (von s abhängigem) x_0 zu beliebigen Werten $w(x_0)$, $w'(x_0)$, ..., $w^{(g_s^*-1)}(x_0)$ genau eine Lösung von* (91) *mit*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|w^{(\nu)}| \leqq s \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{92}$$

Es gibt also genau g_s^* linear unabhängige Lösungen mit diesem Verhalten. Dabei ist g_s^* gleich der Anzahl der Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ von (59) *mit $\sigma_\nu \leqq s$.*

Daraus entnimmt man folgendes *Analogon zum Perronschen Satz für Differenzengleichungen*[10]):

---

[10]) Ein im wesentlichen damit übereinstimmendes Ergebnis findet sich, wie ich nachträglich bemerkte, in O. Perron, „Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist". Journ. f. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 25—50.

Satz VI. *Es seien in* (91) *die Koeffizienten* $a_\nu(x)$ *für* $x \geqq 0$ *stetige, den Voraussetzungen* (52) *genügende Funktionen.*

$$-\infty < s_1 < s_2 < \ldots < s_m < \infty$$

seien die verschiedenen Realteile der Wurzeln $\varrho_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu$ *von* (59). *Die Anzahl der Wurzeln* ϱ_ν *mit* $\sigma_\nu = s_\mu$ *sei* e_μ (*mehrfache mehrfach gezählt*).

Dann gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen, das derart in m Klassen zerfällt, daß für die Lösungen der μ*-ten Klasse und deren lineare Verbindungen*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|w^{(\nu)}| = \sigma_\mu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ist. Die Anzahl der Lösungen in der μ*-ten Klasse ist gleich* e_μ.

Bei genügend kleinem ε gibt es nämlich genau $e_1 + e_2 + \ldots + e_{\mu-1}$ linear unabhängige Lösungen von (91) mit

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|w^{(\nu)}| \leqq s_\mu - \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

und genau $e_1 + e_2 + \ldots + e_\mu$ linear unabhängige Lösungen mit

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|w^{(\nu)}| \leqq s_\mu + \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Aus $\varepsilon \to 0$ folgt daher die Existenz von genau e_μ linear unabhängigen Lösungen mit

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{x} \log|w^{(\nu)}| = s_\mu .$$

Es seien jetzt $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ die verschiedenen l_1-, l_2-, …, l_k-fachen Wurzeln von (59). Dann hat die der Gleichung (91) entsprechende Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\bar{w}^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + a_1 w' + a_0 w = 0 \tag{93}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$\bar{w}_{\varkappa\lambda} = x^{\lambda-1} e^{\varrho_\varkappa x} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l_k;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Satz IIIb liefert daher

Satz VII. *Es seien in* (91) *die Koeffizienten* $a_\nu(x)$ *stetige, der Voraussetzung* (52) *genügende Funktionen, und* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ *seien die verschiedenen* l_1-, l_2-, …, l_k*-fachen Wurzeln von* (59). *Weiter konvergiere*

$$\int_0^\infty x^{2L-2}\, \delta(x)\, dx \tag{94}$$

mit

$$\delta(x) = |\delta_0(x)| + |\delta_1(x)| + \ldots + |\delta_{n-1}(x)|,$$
$$\delta_\nu(x) = a_\nu(x) - a_\nu \quad \text{und} \quad L = \operatorname*{Max}_{\varkappa = 1, 2, \ldots k} l_\varkappa .$$

Dann hat die Gleichung (91) *ein Fundamentalsystem von Lösungen* $w_{\varkappa\lambda}$ *mit dem Verhalten*

$$w_{\varkappa\lambda}^{(\nu)} = \overline{w}_{\varkappa\lambda}^{(\nu)} + o(e^{\sigma_\lambda x}) \tag{95}$$

$(\overline{w}_{\varkappa\lambda} = x^{\lambda-1} e^{\varrho_\varkappa x};\ \nu = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k)$.

Für diese Lösungen gilt also weiter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w_{\varkappa\lambda}^{(\nu)}}{w_{\varkappa\lambda}} = \varrho_\varkappa^\nu. \tag{96}$$ [11])

(Die lineare Unabhängigkeit dieser Lösungen ergibt sich ohne weiteres aus ihrem asymptotischen Verhalten.)

---

[11]) Durch Übertragung des Hilfssatzes 3 aus I, § 4 meiner oben zitierten Arbeit über Differenzengleichungen kann man allgemeiner aus der Konvergenz von

$$\int_0^\infty x^{L-1} \delta(x)\, dx$$

auf die Existenz eines Fundamentalsystems von der Form

$$w_{\varkappa\lambda}^{(\nu)} = \overline{w}_{\varkappa\lambda}^{(\nu)} + o(\overline{w}_{\varkappa\lambda}) \qquad (\overline{w}_{\varkappa\lambda} = x^{\lambda-1} e^{\varrho_\varkappa x}),$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w_{\varkappa\lambda}^{(\nu)}}{w_{\varkappa\lambda}} = \varrho_\varkappa^\nu$$

schließen.

(Eingegangen am 30. Juli 1927.)

On Lipschitz numbers.

Von

A. S. Besicovitch in Cambridge.

§ 1.

Let $f(x)$ be a measurable function and k a positive number < 1. We say that the function $f(x)$ is of the Lipschitz class k at a point x if the upper and lower limits of the ratio

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^k} \quad \text{as} \quad h \to 0$$

are finite and at least one of them is not zero.

We write

$$\overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^k} = L_{r+} f(x), \qquad \underline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^k} = L_{r-} f(x),$$

$$\overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h^k} = L_{l+} f(x), \qquad \underline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h^k} = L_{l-} f(x),$$

and we call the numbers $L_{r+} f(x)$, $L_{r-} f(x)$, $L_{l+} f(x)$, $L_{l-} f(x)$ the right upper, right lower, left upper, left lower Lipschitz numbers of the function $f(x)$.

At any point x at which $L_{r+} f(x) < 0$, the right derivative of $f(x)$ is $-\infty$ and consequently at almost all points $L_{r+} f(x) \geqq 0$. We have for the same reason that at almost all points

$$L_{r-} f(x) \leqq 0, \qquad L_{l+} \geqq 0, \qquad L_{l-} \leqq 0.$$

We shall prove the following theorem:

§ 2.

Theorem 1. *Let $f(x)$ be a function of the Lipschitz class k at all points of a set E. At almost all points of the set E*

$$L_{r+} f(x) = L_{l+} f(x) \quad \text{and} \quad L_{r-} f(x) = L_{l-} f(x).$$

Let M be an arbitrarily large positive number and E_1 the set of those of points of E at which the moduli of all Lipschitz numbers are less than M. Further let b be an arbitrarily small positive number and η another positive number. Denote by E_2 the set of those of points of E_1 at which the inequalities

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^k} < L_{r+}f(x)+b, \tag{1}$$

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h^k} < L_{l+}f(x)+b \tag{2}$$

are satisfied for all $0 < h \leqq \eta$.

Evidently we have $\lim_{\eta \to 0} mE_2 = mE_1$. Suppose η to be so small that

$$mE_2 > 0{,}9\, mE_1. \tag{3}$$

Denote by e_i the set of those of points of E_2 at which

$$ib \leqq L_{r+}f(x) < ib+b.$$

We have

$$E_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_i. \tag{4}$$

In virtue of the remark above e_i is of measure zero for all negative values of i. Let e be one of the sets e_i with positive measure. Writing $ib = a$ we shall have

$$a \leqq L_{r+}f(x) < a+b \tag{5}$$

at all points of e.

Take a positive number n such that

$$\frac{M+b}{n^k} < b. \tag{6}$$

Let c be any point of density of the set e (i. e. a point at which the density of the set e is 1), belonging to the set e. Corresponding to c there exist arbitrarily small values of $h < \eta$ such that

$$f(c+h)-f(c) > (a-b)h^k; \tag{7}$$

the point c being a point of density, we can choose among these values of h such a value that

$$m\left[e \times (c, c+h)\right] > \left(1-\frac{1}{4n}\right)h. \tag{8}$$

To each point of density c of the set e corresponds an interval $(c, c+h)$, $h < \eta$, for which the inequalities (7), (8) are satisfied.

In virtue of Young's lemma we can choose from these intervals a finite set H of non-overlaping intervals such that $mH > me - \varepsilon$, ε being an arbitrarily small positive number. Let then

$$mH > 0{,}9\, me. \tag{9}$$

Let $(c, c+h)$ be any of intervals of H. By (8)

$$m\left\{e \asymp \left(c + \frac{n-1}{n}h, c+h\right)\right\} > \frac{3}{4n}h. \tag{10}$$

Take any point $c+h_1$, of the set $e \asymp \left(c + \frac{n-1}{n}h, c+h\right)$. By (1) and (6)

$$\begin{aligned} f(c+h) - f(c+h_1) &< \{L_{r+}f(c+h_1) + b\}(h-h_1)^k \\ &< (M+b)\frac{h^k}{n^k} < bh^k, \end{aligned} \tag{11}$$

and by (7) and (11)

$$\begin{aligned} f(c+h_1) - f(c) &= \{f(c+h) - f(c)\} - \{f(c+h) - f(c+h_1)\} \\ &> (a-2b)h^k > (a-2b)h_1^k. \end{aligned} \tag{12}$$

On the other hand by (2)

$$\frac{f(c) - f(c+h_1)}{-h_1^k} < L_{l+}f(c+h_1) + b$$

or

$$f(c+h_1) - f(c) < \{L_{l+}f(c+h_1) + b\}h_1^k. \tag{13}$$

By (12), (13)

$$L_{l+}f(c+h_1) > a - 3b$$

and by (5)

$$L_{l+}f(c+h_1) > L_{r+}f(c+h_1) - 4b. \tag{14}$$

Denoting by x any point of the set $e \asymp \left(c + \frac{n-1}{n}h, c+h\right)$ we rewrite (14) in the form

$$L_{l+}f(x) > L_{r+}f(x) - 4b. \tag{15}$$

Denote by H' the set of intervals $\left(c + \frac{n-1}{n}h, c+h\right)$ corresponding to all intervals $(c, c+h)$ of the set H. The inequality (10) being true for all intervals of H' we have

$$m(e \asymp H') > \frac{3}{4n}mH. \tag{16}$$

Denote by e' the set $e \asymp H'$. By (9) and (16)

$$me' > \frac{2{,}7}{4n}me. \tag{17}$$

We construct in a similar way the sets e_i' corresponding to all sets e_i with positive measure. We write $E_1' = \sum e_i'$.

By (4) and (17) $mE_1' > \frac{2,7}{4n} mE_2$ and by (3)

$$mE_1' > \frac{1}{2n} mE_1. \tag{18}$$

At all points of the set E_1' the inequality (15) is true. Thus, corresponding to the set E_1 we have constructed a subset E_1' of measure greater than $\frac{1}{2n} mE_1$, at all points of which the inequality (15) is satisfied. The existence of the subset E_1' has followed only from the fact that at all points of E_1 the moduli of all Lipschitz numbers are less than M. Therefore we can construct an analogous subset corresponding to any part of the set E_1. Let then E_1'' be the subset of the set $E_1 - E_1'$, E_1''' the subset of the set $E_1 - E_1' - E_1''$ and so on.

We have

$$mE_1'' > \frac{1}{2n} m(E_1 - E_1'), \quad mE_1''' > \frac{1}{2n} m(E_1 - E_1' - E_1''), \quad \ldots. \tag{19}$$

By (18) and (19)

$$m(E_1 - E_1') < \left(1 - \frac{1}{2n}\right) mE_1, \quad m(E_1 - E_1' - E_1'') < \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 mE_1,$$

and so on. Hence

$$m(E_1 - E_1' - E_1'' - E_1''' - \ldots) = 0. \tag{20}$$

At all points of the sets E_1'', E_1''', ... the inequality (15) is satisfied.

Thus, by (20) the inequality (15) is satisfied at almost all points of E_1. Take a decreasing sequence

$$b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n \to 0. \tag{21}$$

The number b in (15) being arbitrary we can put b equal to any number b_n of the sequence (21). Thus, for any value of n the inequality

$$L_{l+}f(x) > L_{r+}f(x) - 4b_n \tag{22}$$

is true at almost all points of E_1. Consequently at almost all points of E_1 the inequality (22) is true for all values of n and thus at almost all points of E_1

$$L_{l+}f(x) \geqq L_{r+}f(x). \tag{23}$$

For sufficiently large values of M the measure of E_1 is as near as we please to mE, and consequently the inequality (23) is true at almost all points of the set E.

In a similar way we can also prove that at almost all points of the set E

$$L_{r+}f(x) \geqq L_{l+}f(x) \tag{24}$$

and thus at almost all points of the set E

$$L_{r+}f(x) = L_{l+}f(x). \tag{25}$$

By applying this result to the function $-f(x)$ we obtain that at almost all points

$$L_{r-}f(x) = L_{l-}f(x) \tag{26}$$

and thus the theorem is proved.

§ 3.

If a function $f(x)$ has finite derivative numbers $D_{r+}f(x), \ldots$ then at almost all points not only

$$D_{r+}f(x) = D_{l+}f(x), \qquad D_{r-}f(x) = D_{l-}f(x),$$

but also they are all equal to each other. That is not the case for Lipschitz numbers. In fact the following theorem is true.

Theorem 2. *If $\varphi(x)$ is any measurable non-negative function and $\psi(x)$ any measurable non-positive function, then there exists a function $f(x)$ such that*

$$L_{r+}f(x) = \varphi(x) \quad \text{and} \quad L_{r-}f(x) = \psi(x)$$

at almost all points.

We shall not dwell on a proof of this theorem but we shall construct a function $f(x)$ such that at almost all points

$$L_{r+}f(x) = 1 \quad \text{and} \quad L_{r-}f(x) = -2. \tag{27}$$

This construction will make clear the general idea on which may be based the proof of Theorem 2.

Let α be a positive number. Define the function $f(x, \alpha)$ by the following equations:

$$f(x, \alpha) = \alpha^k - (\alpha - x)^k \qquad \text{for } 0 \leqq x \leqq \alpha,$$

$$f(x, \alpha) = 2(\alpha + 2^{-1/k}\alpha - x)^k \qquad \text{for } \alpha \leqq x \leqq \alpha + 2^{-1/k}\alpha,$$

$$f(x + \alpha + 2^{-1/k}\alpha, \alpha) = f(x, \alpha) \qquad \text{for all values of } x.$$

The function $f(x)$ is periodic of period $\beta = \alpha + 2^{-1/k}\alpha$. We call all the intervals $(n\beta,\ n\beta + \alpha)$ (n any integer) *the odd intervals* of the function $f(x, \alpha)$ and all the intervals $(n\beta + \alpha,\ n\beta + \alpha + 2^{-1/k}\alpha)$ *the even intervals.*

Define a sequence of positive numbers

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots, \quad \alpha_n \to 0$$

in the following way.

Put α_1 equal to some number less than one, for instance $\alpha_1 = \frac{1}{100}$, and $\alpha_{n+1} = \alpha_1^{2^n(n!)}$, so that $\alpha_{n+1} = \alpha_n^{2^n}$. Define the function $f(x)$ by the equation

$$f(x) = f(x, \alpha_1) + f(x, \alpha_2) + f(x, \alpha_3) + \ldots .$$

The function $f(x)$ satisfies the conditions (27). Consider it in some finite interval (a, b).

The proof may be based upon the following facts:

1. At any point x inside odd intervals of the function $f(x, \alpha)$

$$\max \frac{f(x+h, \alpha) - f(x, \alpha)}{h^k} = 1$$

and at any point x inside even intervals

$$\min \frac{f(x+h, \alpha) - f(x, \alpha)}{h^k} = -2.$$

2. For $\alpha_{i-1}^{i-1} > h > \alpha_i^i$ the difference

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h^k} - \frac{f(x+h, \alpha_i) - f(x, \alpha_i)}{h^k}$$

is small in a large part* of the interval (a, b).

Consequently in a large part of the set of odd intervals of $f(x, \alpha_i)$ included in the interval (a, b), $\max \frac{f(x+h) - f(x)}{h^k}$ is near to 1 and in a large part of the set of even intervals $\min \frac{f(x+h) - f(x)}{h^k}$ is near to -2.

3. For large values of l the set of all odd intervals of the functions

$$f(x, \alpha_{n+1}), \quad f(x, \alpha_{n+2}), \quad \ldots, \quad f(x, \alpha_{n+l})$$

which are included in (a, b), and the set of all even intervals are each a large part of the interval (a, b).

4. For $\alpha_n^n > h > \alpha_{n+l}^{n+l}$ the maximum and the minimum of the ratio $\frac{f(x+h) - f(x)}{h^k}$ are near to 1 and -2 in a large part of the interval.

---

* I call a part of a set E whose measure tends to mE *a large part of the set* E.

(Eingegangen am 11. Mai 1927.)

Über die Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper.

Von

F. Pollaczek in Berlin.

Einleitung.

Ist ein algebraischer Zahlkörper K relativ-galoissch in bezug auf einen Grundkörper k, so wird durch die Substitutionen der Relativgruppe auch das Einheitensystem von K in sich selbst übergeführt.

Aus dieser Eigenschaft kann im einfachsten Fall, dem der Relativgruppe von Primzahlgrad, der vielfach angewandte Satz von den relativen Grundeinheiten relativ-zyklischer Körper von Primzahlrelativgrad gefolgert werden.

Während nun dieser Satz (s. den ersten Abschnitt des folgenden) rein normativen Charakter hat, kann der nächsteinfache und unter den relativ-abelschen Körpern hauptsächlich interessierende Fall der Abelschen Relativgruppe vom Typus (l, l) (l eine ungerade Primzahl), den wir hier behandeln, durch Normierungen nicht mehr erledigt werden. Die Kenntnis des Relativgruppentypus' allein, ohne Eingehen auf die speziell vorliegenden Körper K und k, reicht dann nicht mehr aus zur eindeutigen Übersicht über die multiplikativen Vertauschungen, die die Einheiten von K durch die Relativsubstitutionen erfahren, sondern es gibt (wenn man sich auf eine sinngemäße Verallgemeinerung der dem eben erwähnten Satze zugrunde liegenden Fragestellung beschränkt) für jeden Absolutgrad von k endlichviele Möglichkeiten (§§ 2, 3).

Das diesbezügliche Verhalten der Einheiten hängt ab von den Klassengruppen des Körpers K bzw. seiner Unterkörper. Insbesondere läßt sich für einen gewissen aus den Klassenzahlen der Körper K, k und der zwischen K und k liegenden Körper gebildeten Quotienten[1]) unter An-

[1]) Ein ähnlicher Quotient bei G. Herglotz, Über einen Dirichletschen Satz, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 255–261.

wendung der Dirichletschen Klassenzahlformel ein arithmetischer Ausdruck herleiten (§§ 4, 5) und dieser Ausdruck kann auf Grund der hier über die Einheiten angestellten Überlegungen abgeschätzt werden (§ 6). Es wird sodann ein spezieller, der direkten Rechnung zugänglicher Fall (§ 7) behandelt und schließlich das Operieren mit den Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper zur Führung eines Existenzbeweises aus dem Gebiete der Klassenkörpertheorie herangezogen (§ 8). — Das hier für ungerades l Ausgeführte gilt mit wenigen Ausnahmen auch für $l = 2$; ebenso lassen sich die Betrachtungen auf Abelsche Relativgruppen von Primzahlpotenzgrad und beliebigem Typus erstrecken.

§ 1.

Relative Grundeinheiten (RGE) in relativ-zyklischen Zahlkörpern von ungeradem Primzahlrelativgrad.

Es sei K ein relativ-zyklischer Oberkörper vom Primzahlrelativgrad l in bezug auf einen Grundkörper k, und S ($S^l \equiv 1 =$ Identität) bezeichne eine von der Identität verschiedene Substitution der Relativgruppe. Ist r_1 bzw. $2r_2$ die Anzahl der zu k in bezug auf den natürlichen Rationalitätsbereich konjugierten reellen bzw. imaginären Körper, so sind bei ungeradem l die entsprechenden Anzahlen für K gleich lr_1 bzw. $2lr_2$; in k gibt es $r = r_1 + r_2 - 1$ unabhängige Fundamentaleinheiten und die entsprechende Zahl für K ist $R = l(r_1 + r_2) - 1 = l(r+1) - 1$. Bezeichnet man nun, wie üblich, diejenigen Einheiten, die selbst, oder deren l-te Potenzen in k liegen, mit $[\eta]$, und schreibt Produkte von Relativkonjugierten zu irgendwelchen Zahlen A aus K als symbolische Potenzen von A:

$$\prod_{\nu=1}^{l-2} [S^\nu(A)]^{a_\nu} = A^{\sum_{\nu=0}^{l-2} a_\nu S^\nu},$$

so lautet der Satz über die RGE folgendermaßen[1a]):

In K können (auf mannigfache Weise) Systeme von $r+1$ Einheiten $E_1, \ldots, E_{r+1}$, die RGE, angegeben werden, von der Art, daß die f-te Potenz einer jeden Einheit H aus K eindeutig in der Form

$$H^f = E_1^{F_1(S)} \ldots E_{r+1}^{F_{r+1}(S)} [\eta] \tag{1}$$

darstellbar ist; hierbei sind die $F_i(S)$ ganzzahlige Polynome $(l-2)$-ten Grades in S, und f ist eine zu l prime, dem gewählten System von RGE zugehörige ganze Zahl.

[1a]) Hilbert, Zahlbericht, § 55.

Dieser Satz ist, trotz seiner körpertheoretischen Verkleidung, im wesentlichen eine einfache Aussage über die Eigenschaften einer Klasse ganzzahliger Matrizen. Es soll gezeigt werden, daß sein Inhalt der folgende ist: Gewisse quadratische Matrizen aus ganzen Zahlen können mittels gewisser ganzzahliger Transformationen auf eine bestimmte Normalform gebracht werden.

Zu diesem Zwecke seien die f-ten Potenzen der R Einheiten

$$H_1, H_2, \ldots, H_R$$

eines Fundamentalsystems für die Einheiten von K gemäß (1) ausgedrückt durch die $(l-1)(r+1)$ Einheiten $E_1, \ldots, E_{r+1}^{S^{l-1}}$, nebst r Basiseinheiten $[\eta_1] \ldots [\eta_r]$ der Gruppe $[\eta]$ und etwaigen Einheitswurzeln. Nimmt man zu beiden Seiten einer jeden dieser R Gleichungen die Logarithmen der absoluten Beträge, so erhält man eine ganzzahlige lineare Substitution zwischen den Größen $f \log |H_i|$, $i = 1, 2, \ldots, R$, und den Größen $\log |E_1|, \ldots, \log [\eta_r]$, also

$$f(\log |H|) = F(\log |E|;\ \log |[\eta]|), \tag{2}$$

mit einer $R \times R$-reihigen ganzzahligen Matrix F[2]). Wir merken an, daß die Determinante $|F|$ von F zu l prim ist; kehrt man nämlich die lineare Substitution (2) um, so wird

$$(\log |E|;\ \log |[\eta]|) = f F^{-1} (\log |H|), \tag{2a}$$

und da die H_i Fundamentaleinheiten sind, muß die Matrix $f F^{-1}$ ganzzahlig sein; ihre Determinante ist gleich $\frac{f^R}{|F|}$, so daß für $|F|$ als Teiler von f^R gilt:

$$|F| \not\equiv 0, \mod l. \tag{3}$$

Drückt man nun die R Größen H_i^S, die ja wieder Einheiten in K sind, durch die Fundamentaleinheiten H_i aus, so gelangt man analog (2) zu der Formel

$$(\log |H^S|) = A (\log |H|) \tag{4}$$

mit einer ganzzahligen $R \times R$-reihigen Matrix A.

Die Iteration der letzten Beziehung ergibt

$$(\log |H^{S^2}|) = A (\log |H^S|) = A^2 (\log |H|), \ldots, (\log |H^{S^l}|) = A^l (\log |H|),$$

[2]) Matrizen werden hier durchgehends mit großen Buchstaben bezeichnet und ihre Determinanten durch Hinzusetzen von Absolutstrichen gekennzeichnet; unter fF usw. wird die Matrix mit den Elementen $f f_{ik}$ verstanden.

und da $S^l = 1$ ist und zwischen den Einheiten H_i keine multiplikative Relation mit ganzzahligen Exponenten besteht, folgt weiter

$$A^l = E_R \quad (E_R = \text{Einheitsmatrix } R\text{-ter Ordnung}). \tag{5}$$

Geht man nun von den Fundamentaleinheiten über zu irgendeinem anderen System von R unabhängigen Einheiten $\theta_1, \ldots, \theta_R$, die nicht notwendig Fundamentaleinheiten sein müssen, so gilt

$$(\log|\theta|) = T(\log|H|), \tag{6}$$

mit einer ganzzahligen Matrix T, deren Determinante nicht verschwindet.

Drückt man jetzt wieder die Einheiten θ_i^S durch die θ_i aus mittels

$$(\log|\theta^S|) = A(\log|\theta|), \tag{7}$$

so folgt für die (nicht notwendig ganzzahlige) Matrix A' leicht aus (7), (6) und (4):

$$A' = TAT^{-1}, \tag{8}$$

d. h. A' entsteht aus A durch „Transformation" mittels der Matrix T.

Es liegt daher nahe, die Matrix A mittels eines geeigneten T, dem noch gewisse einschränkende Bedingungen auferlegt werden können, in ein möglichst einfaches A' zu transformieren, und gerade dies wird durch den Übergang zu den relativen Grundeinheiten E_i erzielt.

Wie aber die Größen $\log|E_1|, \log|E_1^S|, \ldots, \log|[\eta_r]|$ durch Ausübung der Substitution S transformiert werden, ist unmittelbar ersichtlich. Setzt man

$$(\log|E^S|;\ \log|[\eta]|) = B(\log|E|;\ \log|[\eta]|), \tag{9}$$

so ist die $R \times R$-reihige Matrix B von der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} Z & 0 & \ldots & 0 & N_1 \\ 0 & Z & \ldots & 0 & N_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & Z & N_{r+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & E_r \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei mit Z die $(l-1) \times (l-1)$-reihige Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

und mit $N_1, \ldots, N_{r+1}$ ganzzahlige $r \times (l-1)$-reihige Matrizen bezeichnet sind (daß in unserem besonderen Falle in jedem N_i alle Zeilen außer der letzten verschwinden, ist unwesentlich).

Nimmt man also $E_1, E_1^S, \ldots, [\eta]$ als System unabhängiger Einheiten, so ist $A' = B$ und, nach (2a), $T = fF^{-1}$ zu setzen und dies gibt, in (8) eingesetzt,

$$B = F^{-1}AF, \quad |F| \not\equiv 0, \bmod l. \tag{12}$$

Aus dem Satze über die RGE folgt also, daß A mittels einer Matrix, deren Determinante zu l prim ist (ohne diese Einschränkung wäre die Aussage trivial), in die Normalform B (Gl. (10)) transformiert werden kann.

Beim Hilbertschen Beweise werden nun keine anderen Eigenschaften der Einheiten von K benutzt außer der, daß sie eine unendliche Abelsche Gruppe vom Range R bilden, und daß H^S wieder eine Einheit ist, woraus dann die Existenz der Matrix A mit (5) folgt, und dem A ist nur die eine weitere Einschränkung auferlegt, die charakteristische Wurzel 1 genau r-fach zu besitzen (infolgedessen, daß der Rang der Einheitenschar $[\eta]$ gleich r ist). Es wird daher durch den Beweis für die Existenz der RGE auch mitbewiesen, daß jedes ganzzahlige A mit $A^l = E_R$ und r-facher charakteristischer Wurzel 1 mittels einer Transformation (12) auf die Normalform (10) gebracht werden kann; umgekehrt folgt aus der letzteren Tatsache natürlich auch die Existenz der RGE.

Um eine symbolische $G(S)$-te Potenz einer Einheit H^f wieder auf die Normalform (1) zu bringen, hat man in dem Exponenten die Produkte $F_i(S)\,G(S)$ offenbar modulo $1 + S + \ldots + S^{l-1}$ zu kürzen, d. h. man hat so zu rechnen, als ob S eine primitive l-te Einheitswurzel ζ wäre.

Bildet man $r+1$ neue Einheiten E_i gemäß den Formeln

$$E_i' = \prod_{k=1}^{r+1} E_k^{G_{i,k}'}[\eta] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1) \tag{13}$$

mit ganzzahligen Polynomen $(l-2)$-ten Grades $G_{i,k}'(S)$, so stellen sie, wie leicht zu erkennen ist, dann und nur dann ein System von RGE dar, wenn die Determinante $|G_{i,k}'(\zeta)|$ prim ist zu l, also auch zu $\lambda = 1 - \zeta$, dem Primteiler von l in $K(\zeta)$.

§ 2.

Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper vom Gruppentypus (l, l).

Wir gehen jetzt zu dem eingangs erwähnten Körper vom Relativgrad l^2 über. Der größeren Anschaulichkeit halber sei die (ansonst unwesentliche) Voraussetzung gemacht, daß die Grundkörper k die primitive l-te Einheitswurzel ζ enthalte. Jeder bezüglich k relativ-abelsche Körper

vom Gruppentypus (l, l) kann dann erzeugt werden durch Adjunktion zweier l-ter Wurzeln $\sqrt[l]{\mu}$ und $\sqrt[l]{\nu}$, wobei μ und ν zwei derartige Zahlen aus k bedeuten, daß weder ν noch die l Produkte

$$\mu\nu^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{14}$$

l-te Potenzen in k sind. Die l^2 Substitutionen der Relativgruppe können dargestellt werden durch

$$S^i T^k, \quad i, k = 0, 1, \ldots, l-1, \quad (ST = TS; S^l = T^l = 1), \tag{15}$$

wobei S, T bzw. die Substitutionen

$$S = \left(\sqrt[l]{\mu} : \zeta \sqrt[l]{\mu}\right), \quad T = \left(\sqrt[l]{\nu} : \zeta \sqrt[l]{\nu}\right) \tag{15a}$$

bezeichnen.

Der Körper $K\left(k, \sqrt[l]{\mu}, \sqrt[l]{\nu}\right)$, der mit $K_{\mu,\nu}$ bezeichnet sei, enthält genau $l+1$ Unterkörper über k, nämlich die Körper

$$K_\nu = K\left(k, \sqrt[l]{\nu}\right) \tag{16a}$$

und

$$K_{\mu\nu^i} = K\left(k, \sqrt[l]{\mu\nu^i}\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{16b}$$

welche bzw. zu den folgenden Untergruppen der Gruppe (15) „gehören“:

$$1, S, \ldots, S^{l-1} \tag{17a}$$

bzw.

$$1, S^{-i}T, \ldots, (S^{-i}T)^{l-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1). \tag{17b}$$

Bezeichnet man mit $2m$ den Grad des Körpers k, welcher, als Oberkörper von $K(\zeta)$, samt allen seinen absolut-konjugierten ein imaginärer Körper ist, so gibt es nach früherem in k genau $m-1$ unabhängige Fundamentaleinheiten, in jedem der Körper K_ν bzw. $K_{\mu\nu^i}$ gibt es $lm-1$, und in $K_{\mu,\nu}$ l^2m-1 solcher Einheiten.

Anstatt nunmehr die ganzzahligen Transformationen zu betrachten, die die Logarithmen der letztgenannten Einheiten durch die Operationen S und T erfahren, ist es kürzer, von vornherein $K_{\mu,\nu}$ als zyklischen Oberkörper, etwa über K_ν (und daher mit der Relativgruppe (17a)) aufzufassen, und lm RGE

$$E_1, \ldots, E_{lm} \quad (\text{bezüglich } K_\nu) \tag{18}$$

einzuführen, wodurch der Eigenschaft der Einheitengruppe von $K_{\mu,\nu}$, durch S in sich selbst überzugehen, völlig Rechnung getragen ist. Man hat dann nur noch Folgerungen daraus zu ziehen, daß die Einheiten $(E_i^T)^f$ gemäß (1) durch die Einheiten (18) ausdrückbar sind:

$$E_i^{fT} = \prod_{k=1}^{lm} E_k^{P_{ik}(S)}[\eta_\nu] \qquad (i = 1, 2, \ldots, lm), \tag{19}$$

wobei mit $P_{ik}(S)$ ganzzahlige Polynome und mit $[\eta_\nu]$ Einheiten bezeichnet sind, deren l-te Potenz in K_ν liegt.

Die Nenner der dem Körper $K(\zeta)$ angehörigen Größen $\frac{1}{f}P_{ik}(\zeta)$ sind zu $\lambda = 1-\zeta$ prim, so daß ihre $lm \times lm$-reihige Matrix

$$A = \frac{1}{f}\{P_{ik}(\zeta)\} \tag{19a}$$

modulo λ ganz ist. Für A folgert man durch wiederholte Ausübung der Operation T auf (19), ähnlich wie bei (4), (5).

$$A^l = E_{lm}. \tag{20}$$

Geht man nun von den E_i mittels (13) zu einem anderen System von RGE E_i über, so tritt, analog Gleichung (8), an Stelle von A die Matrix

$$A' = \Gamma' A \Gamma'^{-1} \quad (\Gamma'(\zeta) = \{G'_{ik}(\zeta)\}) \tag{21}$$

mit

$$|\Gamma'(\zeta)| \not\equiv 0, \mod \lambda. \tag{21a}$$

Man wird nun versuchen, mittels eines geeigneten Γ' die Matrix A auf eine möglichst einfache Form zu bringen und benötigt hierzu die Kenntnis ihrer charakteristischen Wurzeln.

Diese sind zufolge (20) sämtlich l-te Einheitswurzeln; zur Feststellung des Vielfachheitsgrades einer jeden charakteristischen Wurzel dient die Betrachtung der in den Unterkörpern (16a) bzw. (16b) enthaltenen Einheiten, die allgemein mit η_ν bzw. $\eta_{\mu\nu^i}$ bezeichnet seien. Diese Einheiten sind multiplikativ voneinander unabhängig in folgendem Sinne:

Aus dem Bestehen einer Gleichung

$$[\eta_\nu]\cdot\eta_\mu\cdot\eta_{\mu\nu}\cdot\ldots\cdot\eta_{\mu\nu^{l-1}} = 1 \tag{22}$$

folgt

$$[\eta_\nu] = [\eta_0]; \quad \eta_{\mu\nu^i} = [\eta_0] \quad (i = 0, 1, \ldots, l-1),$$

(η_0 und $[\eta_0]^l$ sind Einheiten aus k).

Zum Beweise hat man in (22) die Relativnorm bezüglich K_ν zu bilden, d. h. man hat (22) zur symbolischen Potenz $1 + S + \ldots + S^{l-1}$ zu erheben; da durch S $[\eta_\nu]$ höchstens mit einer Einheitswurzel multipliziert wird, während die $\eta_{\mu\nu^i}$ in ihre Relativkonjugierten bezüglich k übergehen, folgt daraus

$$[\eta_\nu]^l \eta_0 = 1, \quad [\eta_\nu] = [\eta_0]$$

und ebenso folgt, wenn man in (22) die Relativnorm bezüglich $K_{\mu\nu^i}$ bildet, $\eta_{\mu\nu^i} = [\eta_\nu]$.

Ist dann

$$\eta_{\mu\nu^i,1}, \ldots, \eta_{\mu\nu^i,m} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{23}$$

je ein System von RGE in $K_{\mu\nu^i}$, so kann auch zwischen diesen lm Einheiten, ihren Relativkonjugierten bezüglich k und den Einheiten $[\eta_\nu]$ keine multiplikative Relation mit ganzzahligen von Null verschiedenen Exponenten bestehen. Es seien nun die Einheiten (23) in der angeschriebenen Reihenfolge mit ϑ_j, $j = 1, \ldots, lm$, bezeichnet:

$$\vartheta_j = \eta_{\mu\nu^i, k} \quad \text{für } j = im + k, \tag{23a}$$

und durch die RGE (18) ausgedrückt:

$$\vartheta_j = \prod_{k=1}^{lm} E_k^{G_{jk}(S)} [\eta_\nu], \qquad (j = 1, 2, \ldots, lm) \tag{24}$$

und hierin ist wegen der multiplikativen Unabhängigkeit der ϑ_j

$$|\Gamma(\zeta)| = G_{ik}(\zeta)| \neq 0. \tag{24a}$$

Für jedes $\eta_{\mu\nu^i}$, als Zahl von $K_{\mu\nu^i} = K\left(k, \sqrt[i]{\mu\nu^i}\right)$, gilt (s. (15a)):

$$\eta^T_{\mu\nu^i} = \eta^{S^i}_{\mu\nu^i};$$

bildet man daher die Einheiten ϑ_j^T und drückt sie wieder durch die ϑ_j bzw. deren Relativkonjugierte bezüglich k aus (in jedem $K_{\mu\nu^i}$ kann (17a) als Relativgruppe bezüglich k und daher S als Erzeugende der Gruppe benutzt werden), so lautet die Matrix der Exponenten:

$$\Delta(\zeta) = \begin{pmatrix} E_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \zeta E_m & \ldots & 0 \\ \cdot & & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \zeta^{l-1} E_m \end{pmatrix}, \tag{25}$$

was symbolisch so ausgedrückt sei:

$$(\vartheta_j^T) = \Delta(\vartheta_j). \tag{26}$$

Analog (26) kann anstatt der Formel (24), unter Abstraktion von den für die folgenden Schlüsse gleichgültigen $[\eta_\nu]$, geschrieben werden

$$(\vartheta_j) = \Gamma(E_i), \tag{27}$$

und an Stelle von (19), (19a):

$$(E_i^T) = A(E_i). \tag{28}$$

Übt man auf (27) die Operation T aus und ersetzt hierauf die E_i^T gemäß (28), so folgt

$$(\vartheta_j^T) = \Gamma A(E_i).$$

Andrerseits folgt aus (26), (27)

$$(\vartheta_j^T) = \Delta\Gamma(E_i),$$

und die Vergleichung der beiden letzten Formeln gibt gemäß einer schon früher angewandten Schlußweise

$$\Gamma A = \Delta \Gamma,$$

oder, da zu Γ wegen (24a) eine Inverse Γ^{-1} existiert,

$$A(\zeta) = \Gamma^{-1}(\zeta)\, \Delta(\zeta)\, \Gamma(\zeta). \tag{29}$$

$A(\zeta)$ hat daher, da es auf die Normalform (25) transformiert werden kann, jede l-te Einheitswurzel, inklusive 1, zur m-fachen charakteristischen Wurzel.

Wir betrachten jetzt die Transformationsmatrix Γ, deren Determinante i. a. durch λ teilbar ist (in einem im folgenden behandelten Beispiele ist $\Gamma(\zeta)$ genau durch $\lambda^{\frac{ml(l-1)}{2}+2}$ teilbar), so daß Γ nicht zu den gemäß (21), (21a) zulässigen Matrizen gehört. Um Γ behandeln zu können, wenden wir die für Matrizen aus ganzen rationalen bzw. ganzen algebraischen Zahlen entwickelte Elementarteilertheorie[3]) auf den hier vorliegenden Bereich der mod λ ganzen Zahlen des $K(\zeta)$ an, d. h. auf die im Nenner zu λ primen Zahlen von $K(\zeta)$, mit $\lambda = 1 - \zeta$ als einzigem in Betracht zu ziehendem Primfaktor. Ist M irgendeine rechteckige oder quadratische Matrix mit mod λ ganzen Zahlen von $K(\zeta)$, so sei die höchste λ-Potenz, die in den Zählern aller $r \times r$-reihigen Determinanten von M aufgeht, als r-ter Determinantenteiler d_r, und der Quotient $e_r = \frac{d_r}{d_{r-1}}$ als r-ter Elementarteiler von M bezeichnet. Entsprechend der eben genannten Theorie gilt hier der Satz:

Jede $n \times n$-reihige Matrix M ($|M| \not\equiv 0$) mod l ganzer Zahlen kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$M = F_1^{-1} \Lambda F_2, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e_n \end{pmatrix}; \qquad e_i = \lambda^{\varepsilon_i}, \quad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \dots \leqq \varepsilon_n, \tag{30}$$

wobei F_1 und F_2 ganzzahlige $n \times n$-reihige Matrizen aus $K(\zeta)$ sind, mit

$$|F_1| \not\equiv 0, \quad |F_2| \not\equiv 0, \quad \text{mod } \lambda. \tag{30a}$$

Stellt man daher die Matrix Γ in der Form (30) dar und setzt in (27) ein, so ist

$$(\vartheta_j) = F^{-1} \Lambda F_2 (E_i). \tag{31}$$

---

[3]) Weierstraß, Ges. Werke 2, S. 21; vgl. auch E. Steinitz, Rechteckige Systeme und Module in Zahlkörpern, I. Teil, Math. Annalen 71 (1912), S. 238, II. Teil, ebenda 72 (1912), S. 297.

Hierin können wegen (30a) die lm Einheiten

$$(E_i') = F_2(E_i) \tag{32}$$

als neue RGE (bezüglich K_ν) eingeführt werden und man erhält, wenn (31) linksseitig mit F_1 multipliziert wird,

$$F_1(\vartheta_i) = \Lambda(E_i'). \tag{33}$$

Wegen $|F_1| \not\equiv 0, \mod \lambda$ gilt auch $f = N_\zeta |F_1(\zeta)| \not\equiv 0, \mod l$, so daß die lm Einheiten $F_1(\vartheta_j)$ (jede dieser Einheiten ist ein Produkt von Einheiten der l Unterkörper (16b)) eine Relativbasis der Einheiten (ϑ_i) bilden: jedes ϑ_j^f ist durch Potenzprodukte symbolischer S^k-ter Potenzen der Einheiten $F_1(\vartheta_j)$, nebst $[\eta_0]$, darstellbar.

Der durch die Formel (38), in Verbindung mit (32), (30) gegebene Satz kann daher so formuliert werden:

Im Körper $K_{\mu,\nu}$ kann ein solches System von RGE eingeführt werden, daß eine Körpereinheit $H = \prod_{i=1}^{lm} E_i'^{F_i(S)}$ dann und nur dann ein Produkt von Einheiten $\eta_{\mu\nu^i}$ $(i = 0, 1, \ldots, l-1)$ und $[\eta_\nu]$ ist, wenn

$$F_i(\zeta) \equiv 0, \mod \lambda^\varepsilon, \qquad (i = 1, \ldots, lm)$$

gilt. Hierbei sind die lm ganzen Zahlen ε_i (noch von der Wahl des Unterkörpers K_ν abhängige) Invarianten von $K_{\mu,\nu}$; der Index der Gruppe der ϑ_i, $[\eta_\nu]$ bezüglich der Gruppe aller Einheiten von $K_{\mu,\nu}$ ist gleich

$$l^{\sum_{i=1}^{lm} \varepsilon_i}, \tag{33a}$$

d. h. der höchsten in $N_\zeta(\Gamma(\zeta))$ enthaltenen l-Potenz.

Um eine obere Schranke für die Zahlen ε_i zu erhalten, sei zunächst gezeigt, daß die l-te Potenz einer jeden Einheit (bzw. Körperzahl, Ideal) aus $K_{\mu,\nu}$ gleich ist einem Produkte von Einheiten (bzw. Körperzahlen, Idealen) der $l+1$ Unterkörper (16a, b).

Zum Beweis dient folgende Kongruenz nach einem Doppelmodul in zwei Unbestimmten S und T:

$$\begin{aligned} &l + (1 + S + \ldots + S^{l-1})(1 + T + \ldots + T^{l-1}) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{l-1} S^k + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} (TS^{-i})^k, \qquad \mathrm{modd}\,(S^l - 1), (T^l - 1). \end{aligned} \tag{34}$$

Versteht man dann unter S, T die Substitutionen (15a), für welche $S^l = T^l = 1$ gilt, und erhebt z. B. eine Einheit H aus $K_{\mu,\nu}$ zur symbolischen Potenz (34), so folgt (s. (17a, b)):

$$H^l \cdot N_k^{K_{\mu,\nu}}(H) = N_{K_\nu}^{K_{\mu,\nu}} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} N_{K_{\mu\nu^i}}^{K_{\mu,\nu}}(H). \tag{34a}$$

Die Relativnorm auf der linken Seite ist eine Einheit in k, während die Relativnormen der rechten Seite Einheiten in den Körpern (16a) bzw. (16b) sind, so daß H^l tatsächlich als Produkt von Einheiten aus allen diesen Unterkörpern dargestellt werden kann:

$$H^l = \eta_\nu \prod_{i=0}^{l-1} \eta_{\mu_\nu i}. \tag{34b}$$

Wendet man dies insbesondere auf die Einheiten $E_i'^l$ an, so folgt in Verbindung mit dem über die E_i' bewiesenen Sätze (und da in $K(\zeta)$ die Idealgleichung $(l) = (\lambda)^{l-1}$ besteht) für die Exponenten ε_i der Elementarteiler unmittelbar:

$$0 \leqq \varepsilon_i \leqq l-1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, lm) \tag{35}$$

§ 3.

Transformation der Matrix A.

Um A gemäß (21), (21a) auf eine Normalform zu bringen, kann zunächst der in der Algebra zur Transformation auf Normalform befolgte Modus eingehalten werden. Um eine Matrix A so umzuformen, daß alle Elemente rechts von der Hauptdiagonale verschwinden, hat man sie bekanntlich mittels einer Matrix Γ' zu transformieren, deren Elemente rational von den Elementen und den charakteristischen Wurzeln von A abhängen. Γ' gehört in unserem Falle also auch dem $K(\zeta)$ an und bei Verfolgung des Vorganges der Transformation auf die erwähnte Gestalt erkennt man leicht, daß Γ derart gewählt werden kann, daß auch (21a) erfüllt ist.

Man kann daher nach (13) zu neuen RGE übergehen von der Art, daß in A die Elemente rechts von der Hauptdiagonale verschwinden, und in der Hauptdiagonale zuerst m-mal die charakteristische Wurzel 1, sodann m-mal die Wurzel ζ, usw., steht. Wegen (20) hat dann A nach bekannten Matrizensätzen folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ M_{21} & \zeta E_m & 0 & \ldots & 0 \\ M_{31} & M_{32} & \zeta^2 E_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{l,1} & M_{l,2} & M_{l,3} & \ldots & \zeta^{l-1} E_m \end{pmatrix} \tag{36}$$

mit $\frac{l^2-l}{2}$ $m \times m$-reihigen Matrizen M_{ik} $(i > k)$ aus (mod l) ganzen Zahlen des $K(\zeta)$.

Die Matrix (36), die das Bestehen der Gleichung (20) in Evidenz setzt, kann, wie leicht ersichtlich durch Transformation mittels einer geeigneten

Matrix (21a) noch so umgeformt werden, daß die M_{ik} nur ganze rationale Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, l-1$ enthalten; dies ist aber noch nicht der einfachste Typus, da zwei verschiedene Matrizen der letzterwähnten Art einander noch im Sinne von (21), (21a) äquivalent sein können.

Die Aufgabe, Matrizen aus $K(\zeta)$ von der Form (36) mittels einer Matrix (21a) auf Normalform zu transformieren, ist ähnlich der Aufgabe der algebraischen Normalteilertheorie, eine Matrix mit lauter gleichen charakteristischen Wurzeln (z. B. $= 1$) zu normieren. Während nun, wie diese Theorie lehrt, derartige Matrizen auf folgende Form transformiert werden können:

$$(37)\qquad \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_n \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad (37a)\quad M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

gilt für die der Einschränkung (21a) unterworfene Transformation der Matrizen (36) kein analoger Satz. Von Bedeutung wäre, wie das Folgende zeigt, die Transformation von (36) auf die Gestalt (37) mit

$$(37b)\qquad M_i = \begin{vmatrix} \zeta' & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \zeta'' & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \zeta''' & & \\ \vdots & & 1 & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \zeta^{(\nu)} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \zeta' + \zeta'' + \ldots + \zeta^{(\nu)}; \\ \zeta'^{l} = \zeta''^{l} = \ldots = 1; \end{matrix}$$

doch dies ist i. a. unter (21a) nicht möglich, wie schon das Beispiel der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta & 0 \\ 0 & 1-\zeta & \zeta^2 \end{pmatrix}$$

zeigt.

Um nämlich den Satz über die RGE relativ-zyklischer Körper sinngemäß auf $K_{\mu,\nu}$, als relativ-abelscher Körper über k aufgefaßt, zu verallgemeinern, hätte man die Existenz von n Einheiten $H_1, \ldots, H_n$ nachzuweisen, von der Art, daß

$$(38)\qquad H_i^{P_i(T,S)} = [\eta_\nu], \quad P_i(T,S) = T^{r_i} + a_1(S)\,T^{r_i-1} + \ldots + a_{r_i}(S); \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i = l\,m$$

wäre, und daß die f-te Potenz ($f \not\equiv 0 \bmod l$) einer jeden Einheit H aus

$K_{\mu,\nu}$ sich eindeutig in der Form

$$H^f = \prod_{i=1}^{n} H_i^{F_i(T,S)}[\eta_\nu], \quad (F_i(T,S) \text{ vom Grade } r_i - 1 \text{ in } T \text{ und vom Grade } l-2 \text{ in } S) \tag{38a}$$

darstellen ließe. Man kann nun — etwa durch Eingehen auf die Theorie des Ringes der ganzzahligen Polynome in S und T, modd $(T^l - 1)$ und $(S^l + S^{l-2} + \ldots + 1)$ — leicht zeigen, daß die Polynome $P_i(T, S)$ von der Form $(T - S_1)(T - S_2)\ldots(T - S_{r_i})$, worin mit S_1, S_2 usw. lauter verschiedene S-Potenzen bezeichnet sind, sein müßten, d. h. sie wären Produkte aus einigen der sogenannten Nullteiler $T-1$, $T-S$, …, $T-S^{l-1}$ dieses Ringes.

Wegen (38), (38a) würden daher die $\sum_{i=1}^{n} r_i = lm$ Einheiten

$$H_i^{(T-S_2)\ldots(T-S_{r_i})},\ H_i^{(T-S_3)\ldots(T-S_{r_i})},\ \ldots,\ H_i^{T-S_{r_i}},\ H_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ein System von RGE bezüglich K_ν (im bisherigen Sinne) bilden, und ihre Logarithmen würden durch die Operation T eine Substitution A von der Gestalt (37), (37b) erfahren. Da aber, wie erwähnt, A im allgemeinen nicht auf diese Gestalt gebracht werden kann, läßt sich aus der bloßen Kenntnis der Relativgruppe der Begriff der RGE in dem angegebenen Sinne nicht verallgemeinern.

Auf die Konstruktion eines vollständigen Systems von einander (im Sinne von (21a)) nichtäquivalenten Matrizen (36) wird hier nicht eingegangen; die entsprechende Normierung der RGE E_i ist kaum mehr als Verallgemeinerung des Satzes über die RGE relativ-zyklischer Körper anzusehen.

§ 4.

Eine Formel für einen aus Klassenzahlen gebildeten Quotienten q.

Mittels der Dirichletschen Klassenzahlformel soll jetzt der Index der aus den Produkten der Einheiten $\eta_{\mu\nu}$ und $[\eta_\nu]$ gebildeten Gruppe bezüglich der Gruppe aller Einheiten des $K_{\mu,\nu}$, d. i. nach § 2 die in $N_\zeta(|\Gamma(\zeta)|)$ enthaltene Potenz von l, durch einen Quotienten aus Klassenzahlen ausgedrückt werden.

Bezeichnet $\zeta(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N\mathfrak{p}^{-s}}$ die Zetafunktion, h die Klassenzahl, R den Regulator, d die Diskriminante eines Körpers K und w die Anzahl der in ihm enthaltenen Einheitswurzeln, so ist

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\,\zeta(s) = \frac{2^{r_1 + r_2}\,\pi^{r_2}\,R}{w\sqrt{|d|}}\,h, \tag{39}$$

und aus dieser Formel kann ein arithmetischer Ausdruck für den Quotienten

$$q = \frac{h_{\mu,\nu} h_0^l}{h_\nu \prod_{i=0}^{l-1} h_{\mu\nu^i}} \tag{40}$$

($h_{\mu,\nu}$ statt $h_{K_{\mu,\nu}}$; h_0 statt h_k, usw.)

abgeleitet werden. Wendet man nämlich auf beide Seiten von (39) die Quotientenbildung

$$\frac{(\ )_{\mu,\nu} \cdot (\ )_0^l}{(\ )_\nu \cdot \prod_{i=1}^{l-1} (\ )_{\mu\nu^i}} \tag{41}$$

an, so ergeben sich, wie gezeigt werden soll, für jeden Faktor, außer h und R, die Quotienten (41) als gleich 1, so daß man erhält

$$q = \frac{R_\nu \prod_{i=0}^{l-1} R_{\mu\nu^i}}{R_{\mu,\nu} R_0^l} \tag{42}$$

Daß der dem Faktor $\frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}}{w}$ aus (39) entsprechende Quotient (41) gleich 1 ist (zwei Fälle: 1. $w_{\mu,\nu} = \ldots = w_0$; 2. $w_{\mu,\nu} = l\, w_0$), ist unmittelbar ersichtlich.

Um das gleiche für $\zeta(s)$ identisch in s zu zeigen, hat man die Anteile (41), die von den einzelnen Primidealen aus k herrühren, gesondert zu behandeln.

Ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k zur Relativdiskriminante von $K_{\mu,\nu}$ bezügl. k relativ prim, so ist entweder

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \qquad ((\ ) = l\text{-tes Rest-Symbol in } k) \tag{43a}$$

oder

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \tag{43b}$$

wobei im letzteren Falle „ν“ für eine geeignete der l Zahlen (14) geschrieben ist.

Im ersten Falle zerfällt $\mathfrak{p}$ in $K_{\mu,\nu}$ in l^2 und in jedem der Körper (16a, b) in l Primideale, so daß sein Anteil zum ζ-Quotienten (41)

$$\frac{(1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-l^2}(1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-l}}{[(1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-l}]^{l+1}} = 1 \tag{44}$$

ist. Im letzteren Falle zerfällt $\mathfrak{p}$ in K_ν bzw. $K_{\mu,\nu}$ in l Primideale ersten bzw. l-ten Relativgrades (bezüglich k) und ist in den Körpern $K_{\mu\nu^i}$ Primideal l-ten Relativgrades. Der entsprechende Anteil (41) ist daher

$$\frac{(1-N\mathfrak{p}^{-s^l})^{-l}(1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-l}}{(1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-l}(1-N\mathfrak{p}^{-s^l})^{-l}} = 1. \tag{45}$$

Ebenso ergibt sich, daß die den einzelnen Primteilern der Relativdiskriminante von $K_{\mu,\nu}/k$ entsprechenden Quotienten (41) gleich 1 sind; unmittelbar folgt dies aber auch daraus, daß wegen des Bestehens der Heckeschen Funktionalgleichung der ζ-Funktionen ein Quotient aus solchen Funktionen nicht gleich sein kann dem Quotienten zweier Produkte aus endlich vielen Binomen $1 - a^{-s}$.

Es ist also

$$\frac{\zeta_{\mu,\nu}(s)\,\zeta_0^l(s)}{\zeta_\nu(s)\prod_i \zeta_{\mu\nu^i}(s)} = 1. \quad (46)$$ [4])

Der arithmetische Beweis dafür, daß der Diskriminantenquotient (41) gleich 1 wird, ist umständlich; wir wenden daher, ähnlich wie H. Herglotz (loc. cit.) die Funkionalgleichung der ζ-Funktionen auf (46) an, was unmittelbar

$$\frac{d_{\mu,\nu}\,d_0^l}{d_\nu \prod_i d_{\mu\nu^i}} = 1$$

gibt; aus (46), (47) folgt dann (42).

Es ist nun elementar einzusehen, daß der Klassenzahlquotient $q \gtrless 1$ eine Potenz von l allein ist. Für den Augenblick seien in jedem unserer Körper diejenigen seine Idealklassen (bzw. Ideale), deren Ordnungen zu l prim sind, als akzessorische Klassen (bzw. Ideale) bezeichnet; die Ordnungen h_0', h_ν', h_μ', ... der akzessorischen Klassengruppen sind nur um l-Potenzen von den Klassenzahlen h_0, h_ν, h_μ, ... verschieden.

Man sieht dann:

1. ein akzessorisches Ideal $\mathfrak{j}_0$ aus k ($\mathfrak{j}_0 \neq 1$ in k) kann z. B. in K_ν nicht in der Hauptklasse liegen; denn aus $\mathfrak{j}_0 = (\alpha_\nu)$ würde durch Relativnormbildung

$$\mathfrak{j}_0^l = (\alpha_\nu^{X(T)}) = (\alpha_0), \qquad \alpha_\nu \text{ in } K_\nu, \qquad \alpha_0 \text{ in } k \quad (48)$$

folgen, d. h. $\mathfrak{j}_0^l$ wäre in k Hauptideal, entgegen dem über die Ordnung von $\mathfrak{j}_0$ vorausgesetzten. Daher ist die akzessorische Klassengruppe von K_ν (von der Ordnung h_ν') das Produkt aus der akzessorischen Klassengruppe von k (Ordnung $= h_0'$) und der Gruppe derjenigen akzessorischen Idealklassen von K_ν, deren Ideale nichtäquivalent sind mit Idealen von k. Die letzteren Klassen seien als akzessorische Relativklassen (bezüglich k) bezeichnet, die Ordnung ihrer Gruppe ist $\frac{h_\nu'}{h_0'}$; analoges gilt für die Körper (16b).

---

[4]) Gl. (46) fällt unter E. Artins ζ-Identitäten (Abhandl. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. II (1924), S. 89

2. Ein Produkt eines akzessorischen Ideals $\mathfrak{j}_0$ mit Idealen $\mathfrak{j}_\nu, \mathfrak{j}_\mu, \mathfrak{j}_{\mu\nu}, \ldots$, die den akzessorischen Relativklassen der $l+1$ Körper (16a, b) angehören, ist in $K_{\mu,\nu}$ nur dann Hauptideal, wenn jedes der Ideale $\mathfrak{j}_\nu$ bzw. $\mathfrak{j}_\mu$ usw. in seinem Körper K_ν bzw. K_μ usw. einem Ideale $\mathfrak{j}_0$ äquivalent ist, d. h. zur Hauptklasse der akzessorischen Relativgruppe des betreffenden Körpers gehört. Aus

$$\mathfrak{j}_0 \mathfrak{j}_\nu \mathfrak{j}_\mu \cdots \mathfrak{j}_{\mu\nu^{l-1}} = (A_{\mu,\nu}) \qquad (A_{\mu,\nu} \text{ in } K_{\mu,\nu})$$

folgt nämlich durch Bildung der Relativnorm bezüglich K_ν:

$$\mathfrak{j}_\nu^l \mathfrak{j}_0' = (A_{\mu,\nu}^{X(S)}) = (\alpha_\nu),$$

so daß in K_ν $\mathfrak{j}_\nu \sim \mathfrak{j}_0$ wird; durch Bildung der Relativnorm bezüglich $K_{\mu\nu^l}$ folgt das entsprechende für $\mathfrak{j}_{\mu\nu^l}$.

3. In der Form

$$\mathfrak{j}_0 \mathfrak{j}_\nu \mathfrak{j}_\mu \cdots \mathfrak{j}_{\mu\nu^{l-1}} \tag{51}$$

sind daher genau

$$h_0' \cdot \frac{h_\nu'}{h_0'} \prod_0^{l-1} \frac{h_{\mu\nu^l}'}{h_0'} = \frac{h_\nu' \prod_0^{l-1} h_{\mu\nu^l}'}{h_0'^l} \tag{52}$$

einander nicht äquivalente akzessorische Ideale von $K_{\mu,\nu}$ enthalten; andererseits ist analog (34a, b) auch die l-te Potenz $\mathfrak{J}^l$ eines jeden Ideals $\mathfrak{J}$ aus $K_{\mu,\nu}$ in der Form (51) darstellbar, so daß sich insbesondere jedes akzessorische Ideal aus $K_{\mu,\nu}$ in der Form (51) darstellen läßt. Der Ausdruck (52) ist daher gleich $h_{\mu,\nu}'$ und daraus folgt, daß sich in q (40) alle von l verschiedenen Faktoren fortheben.

§ 5.

Bestimmung eines Quotienten von Regulatoren.

Es soll jetzt der Ausdruck (42) für q umgeformt werden. Aus der Formel (2a), welche den Zusammenhang zwischen den RGE E_i und den Fundamentaleinheiten H_i eines relativ-zyklischen Körpers K gibt, folgt mittels des Multiplikationssatzes für Determinanten:

$$R_k' = \pm R_k \frac{f^R}{|F|},$$

wobei R_k' die analog dem Regulator R_k aus den Logarithmen der RGE und ihrer Relativkonjugierten nebst r Basiseinheiten $[\eta]$ gebildete Determinante bezeichnet; der ganzzahlige Faktor $\frac{f^R}{|F|}$ ist nach Früherem zu l prim; ersetzt man daher in (42) $R_{\mu,\nu}$ bzw. $R_{\mu\nu^l}$ durch $R_{\mu,\nu}'$ bzw. $R_{\mu\nu^l}'$, unter Verwendung der RGE (18) bzw. (23), so unterscheidet sich der

neue Quotient q' nur um einen in Zähler und Nenner zu l primen Bruch von q und man hat im endgültigen Ausdruck für q' alle derartigen Faktoren zu vernachlässigen, um q, eine Potenz von l allein, zu erhalten.

Es sei nun z. B. der aus den m RGE $\eta_{\mu,i}$ (23), ihren $m\,(l-2)$ Relativkonjugierten und aus $m-1$ Basiseinheiten der Gruppe $[\eta_0]$ gebildete Regulator R'_μ angeschrieben als das $\frac{1}{lm}$-fache einer $lm \times lm$-reihigen Determinante, deren erste Zeile die Logarithmen der Beträge dieser $lm-1$ Einheiten und sodann die Zahl 1 enthält und deren übrige $lm-1$ Zeilen den $lm-1$ zu K_μ absolut konjugierten Paaren imaginärer Körper entsprechen; hierbei mögen immer je l zueinander relativ-konjugierte Zeilen aufeinander folgen.

Durch Anwendung elementarer Determinantensätze findet man nun

$$R'_\mu = l^{m-1-\gamma_0} R^*_\mu R_0 \qquad (R_0 = \text{Regulator von } k),$$

wobei $\gamma_0 = 1$ bzw. $= 0$ zu setzen ist, je nachdem, ob μ von der Form $\eta_0 \alpha_0^l$ (η_0, α_0 in k) ist oder nicht. Mit R^*_μ (Relativregulator) ist folgende Determinante bezeichnet:

$$R^*_\mu = \begin{vmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m,1} & \cdots & M_{m,m} \end{vmatrix}, \tag{53}$$

und die $(l-1) \times (l-1)$-reihigen Matrizen M_{ik}, in denen sich der erste Index auf das i-te zu k, $\bar{k}$ konjugierte Körperpaar $k^{(i)}$, $\bar{k}^{(i)}$, und der zweite auf die k-te relative Grundeinheit $\eta_{\mu,k}$ bezieht, sind erklärt durch

$$M_{ik} = \{a_{mn}\} \quad \text{mit} \quad a_{mn} = \log \left| \frac{\eta^{(i) S^{m+n-2}}}{\sqrt{\eta_{\mu,k}^{(i) X(S)}}} \right| \quad (m, n = 1, 2, \ldots, l-1). \tag{53a}$$

Allgemein gilt

$$R'_{\mu\nu^i} = l^{m-1-\gamma_i} R^*_\nu \cdot R_0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{54}$$

mit

$$\gamma_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad = 0,$$

je nachdem, ob $\mu\nu^i$ von der Form $\eta_0 \alpha^l$ ist oder nicht.

Wir greifen jetzt auf die Formel (24) oder (27) zurück, aus welcher

$$\log(|\vartheta_j|;\ \log|[\eta_\nu]|) = \Gamma_1(\log|E_i|;\ \log|[\eta_\nu]|) \tag{55}$$

folgt mit

$$\Gamma_1(\zeta) = \begin{pmatrix} \Gamma(\zeta) & 0 \\ 0 & E_{ml-1} \end{pmatrix}. \tag{55a}$$

Gemäß (55) können die Logarithmen der Beträge der $(l-1)lm$ Einheiten

$$\vartheta_j^{S^k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, lm;\ k = 0, 1, \ldots, l-2),$$

sowie der $lm-1$ Basiseinheiten der Gruppe $[\eta_\nu]$, und die Zahl 1 (d. s. im ganzen $l^2 m$ Zahlen) linear ausgedrückt werden durch die $(l-1)lm$ Zahlen $\log|E_i^{S^k}|$ nebst den Logarithmen der Basiseinheiten $[\eta_\nu]$ und der Zahl 1. Die so entstehenden $l^2 m$ Gleichungen, deren letzte $1=1$ lautet, gelten für alle $l^2 m$ zu $K_{\mu,\nu}$ konjugierten Körperpaare; daher kann die Determinante $\tilde{R}$ der Größen $\log|\vartheta^{S^k}|$, $\log|[\eta_\nu]|$, 1 und ihrer Konjugierten ausgedrückt werden als Produkt aus der Determinante $|T|$ der Transformationskoeffizienten und der Determinante der Größen $\log|E_i^{S^k}|$; $\log|[\eta_\nu]|$, 1. Die letzte Determinante ist gleich $l^2 m R'_{\mu,\nu}$, so daß gilt:

$$\tilde{R} = |T| l^2 m R'_{\mu,\nu}. \tag{56}$$

Für die Matrix T der Transformationskoeffizienten findet man, wenn

$$\Gamma(\zeta) = \{a_{ik}(\zeta)\} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, lm) \tag{57}$$

$$a_{11} = a_0 + a_1 \zeta + \ldots + a_{l-2}\zeta^{l-2} \text{ usw.}$$

ist, den Ausdruck (s. (11))

$$T = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1,lm} & U_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ A_{lm,1} & \ldots & A_{lm,lm} & U_{lm} \\ 0 & \ldots & 0 & E_{lm} \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$\text{mit } A_{11} = \begin{pmatrix} a_0 & , & a_1 & , & a_2 & , \ldots, & a_{l-2} \\ -a_{l-2} & , & a_0 - a_{l-2} & , & a_1 - a_{l-2} & , \ldots, & a_{l-3} - a_{l-2} \\ a_{l-2} - a_{l-3} & , & -a_{l-3} & , & a_0 - a_{l-3} & , \ldots, & a_{l-4} - a_{l-3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_2 - a_1 & , & a_3 - a_1 & , & a_4 - a_1 & , \ldots, & a_0 - a_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_0 E_{l-1} + a_1 Z + \ldots + a_{l-2} Z^{l-2} \text{ usw.,}$$

wobei mit U_i Matrizen von $l-1$ Zeilen und lm Kolonnen bezeichnet sind.

Mit Hilfe der Relation

$$\Phi^{-1} A_{11} \Phi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha'_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \ldots & \alpha_{11}^{(l-2)} \end{pmatrix} \text{ mit } \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \zeta & \zeta' & \ldots & \zeta^{(l-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta^{l-2} & \zeta'^{l-2} & \ldots & \zeta^{(l-2)l-2} \end{pmatrix}$$

folgt dann leicht für die Determinante von (58):

$$|T| = N_\zeta(\Gamma(\zeta)). \tag{60}$$

Für $\tilde{R}$, den Regulator von $\log|\vartheta^{Sk}|$, $\log|[\eta_\nu]|$, 1, ergibt sich (s. auch (23a)), wenn man die Zeilen entsprechend den Substitutionen $1, T, \ldots, T^{l-1}$ in Gruppen anordnet und sodann die Determinante in elementarer Weise vereinfacht, das Produkt aus $l^{lm-\gamma^*} \cdot lm R_\nu$ ($\gamma^* = 1$ bzw. $= 0$, je nachdem ob μ von der Form $\eta_\nu \alpha_\nu^l$ ist oder nicht) und folgender Determinante:

$$\tilde{R} = l^{lm-\gamma^*} lm R_\nu \cdot \begin{vmatrix} R_\mu^* & R_{\mu\nu}^* & \ldots & R_{\mu\nu^{l-1}}^* \\ R_\mu^* & Z_m R_{\mu\nu}^* & \ldots & Z_m^{l-1} R_{\mu\nu^{l-1}}^* \\ R_\mu^* & Z_m^2 R_{\mu\nu}^* & \ldots & Z_m^{2(l-1)} R_{\mu\nu^{l-1}}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_\mu^* & Z_m^{l-1} R_{\mu\nu}^* & \ldots & Z_m^{(l-1)^2} R_{\mu\nu^{l-1}}^* \end{vmatrix}; \tag{61}$$

hierin ist unter R_μ^* usw. ausnahmsweise die Matrix (53) usw. zu verstehen und mit Z_m ist (s. (11)) die folgende Matrix $m(l-1)$-ter Ordnung bezeichnet:

$$Z_m = \begin{pmatrix} Z & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Z & & 0 \\ \cdot & & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & Z \end{pmatrix} \quad (m\text{-mal}) \tag{61a}$$

Als Wert der Determinante in (61) wird leicht

$$\prod_{i=0}^{l-1} R_{\mu\nu^i}^* \cdot \prod_{k<i\leqq l-1} |Z_m^i - Z_m^k| = \prod_{i=0}^{l-1} R_{\mu\nu^i}^* \cdot l^{\frac{ml(l-1)}{2}}$$

gefunden; daher folgt durch Einsetzen von (61) und (60) in (56):

$$l^{lm+1-\gamma^*} m R_\nu \prod_i R_{\mu\nu^i}^* \cdot l^{\frac{ml(l-1)}{2}} = l^2 m R'_{\mu,\nu} N_\zeta(\Gamma(\zeta)).$$

Drückt man hierin die Relativregulatoren $R_{\mu\nu^i}^*$ gemäß (54) aus, so wird

$$\frac{R_\nu \prod_i R'_{\mu\nu^i}}{R'_{\mu,\nu} R_0^l} \cdot l^{\frac{ml(l-1)}{2} + l - 1 + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i - \gamma^*} = N_\zeta(\Gamma(\zeta)).$$

Abstrahiert man hier auf beiden Seiten von den zu l primen Faktoren, so wird nach (42) und (33a)

$$q l^{\frac{ml(l-1)}{2} + l - 1 + \sum_0^{l-1} \gamma_i - \gamma^*} = l^{\sum_1^{lm} \varepsilon_i}, \tag{62}$$

wodurch wir zu einer Formel für den Klassenzahlquotienten (41) gelangen.

§ 6.

Abschätzung von q.

Um mittels (62) q nach oben abschätzen zu können, hat man einige der früher für die Einheiten H angestellten Betrachtungen auf die ambigen Hauptideale $(\overline{H})$ des $K_{\mu,\nu}$ (als Oberkörper von K_ν aufgefaßt) zu übertragen, d. s. diejenigen Zahlen, für welche $(\overline{H})^S = (\overline{H})$ und daher

$$\overline{H}^{1-S} = H$$

gilt.

Gibt es in $K_{\mu,\nu}/K_\nu$ genau δ^* multiplikativ unabhängige ambige Hauptideale, so kann man nach einem aus der Klassenkörpertheorie geläufigen Schlusse die RGE von $K_{\mu,\nu}$ so normieren, daß einige von ihnen, $E_1, \ldots, E_{\delta^*+\gamma^*-1}$ die Relativnorm 1 haben, während die Relativnormen der übrigen RGE in K_ν eine Einheitenschar vom Range $lm - (\delta^* + \gamma^* - 1)$ bilden. Aus $E_i^{X(S)} = 1$ folgt

$$E_i = \overline{E}_i^{1-S} \qquad (i = 1, \ldots, \delta^* + \gamma^* - 1), \tag{63}$$

und man erkennt nun (es sei gesetzt

$$\overline{E}_i = E_i \qquad (i = \delta^* + \gamma^*, \ldots, lm)), \tag{63a}$$

daß sämtliche ambigen Hauptideale („Ambigen") von K_ν eindeutig in der Form

$$\overline{H} = \prod_1^{lm} \overline{E}_i^{F_i(S)} [\alpha_\nu] \tag{64}$$

($F_i(S)$ vom Grade $l-2$ in S; $[\alpha_\nu] = \alpha_\nu (\sqrt[l]{\mu})^x$) darstellbar sind; die lm Ambigen $\overline{E}_i$ sind als relative Grundambigen (RGA) zu bezeichnen.

Es können nun die Ambigen $\overline{E}_i^T$ wieder durch die RGA ausgedrückt werden und man hat, wenn in der Bezeichnungsweise von den Faktoren $[\alpha_\nu]$ abstrahiert wird, analog (28)

$$(\overline{E}_i^T) = \bar{A}\,(\overline{E}_i); \qquad \bar{A}^l = E_{lm}. \tag{65}$$

Ähnlich wie die ϑ_i können (s. (28)) auch die RGA der einzelnen Körper K_{μ,ν^i}, deren Gesamtheit, in der gleichen Reihenfolge wie (23a) genommen, mit

$$\overline{\vartheta}_i \qquad (j = 1, \ldots, lm)$$

bezeichnet sei, durch die $\overline{E}_i$ ausgedrückt werden:

$$(\overline{\vartheta}_i) = \overline{\Gamma}(\overline{E}_i) \tag{66}$$

und analog (29) gilt

$$\bar{A} = \overline{\Gamma}^{-1} \Delta \overline{\Gamma}. \tag{67}$$

Es ist klar, daß $\bar{A}$ aus A hervorgeht durch Transformation mittels einer Matrix von der Determinante $\pm \lambda^{\delta^* + \gamma^* - 1}$; bezeichnet man weiter mit δ_i die dem δ^* in $K_{\mu\nu l}$, als Oberkörper über k, entsprechende Zahl (d. h. der Rang der Schar der Relativnormen der Einheiten $\eta_{\mu\nu l}$ möge $m - (\delta_i + \gamma_i - 1)$ sein), so folgt aus (66), (27), (63):

$$N_\zeta(\Gamma(\zeta)) = N_\zeta(\bar{\Gamma}(\zeta)) \cdot l^{\sum_{i=0}^{l-1} (\delta_i + \gamma_i - 1) - (\delta^* + \gamma^* - 1)} \tag{68}$$

Die Elementarteiler von $\bar{\Gamma}(\zeta)$ seien (s. (30)) bezeichnet mit $\bar{e}_i = \lambda^{\bar{\varepsilon}_i}$; aus (68) und (62) folgt dann:

$$q l^{\frac{ml(l-1)}{2} + 2(l-1) - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i + \delta^*} = l^{\sum_1^{lm} \bar{\varepsilon}_i}. \tag{69}$$

Hier kann nun die rechte Seite, d. i. die höchste in $N_\zeta(\bar{\Gamma})$ enthaltene l-Potenz, folgendermaßen abgeschätzt werden. Ist M ($|M| \neq 0$) irgendeine mod λ ganze Matrix aus K_ζ, durch welche $\bar{A}$ auf die Normalform Δ (25) transformiert wird, also

$$M\bar{A} = \Delta M, \tag{70}$$

so folgt durch Multiplikation von (64) mit M:

$$M(\bar{E}_i^T) = M\bar{A}(\bar{E}_i) = \Delta M(\bar{E}_i)$$

oder

$$(M(\bar{E}_i))^T = \Delta \cdot M(\bar{E}_i). \tag{70a}$$

(70a) bedeutet, daß die lm Zahlen $M(\bar{E}_i)$, die für den Augenblick mit $\theta_1, \ldots, \theta_{lm}$ bezeichnet seien, durch die Operation T in die Zahlen $\Delta(\theta_i)$, nebst Faktoren $[\alpha_\nu]$, übergeführt werden. Es gilt also, wenn $i = km + j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) gesetzt wird, nach (15):

$$\theta_{km+j}^T = \theta_{km+j}^{S^k} \cdot \alpha_\nu (\sqrt[l]{\mu})^x \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Multipliziert man dann die θ_i der k-ten Abteilung mit einer geeigneten Potenz eines geeigneten θ dieser Abteilung, so gelangt man zu Größen θ_i', für welche

$$\theta_{km+1}'^{T-S^k} = \alpha_\nu (\sqrt[l]{\mu})^x;\ \theta_{km+j}'^{T-S^k} = \alpha_\nu \qquad (j = 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{71}$$

gilt und welche von den $\bar{E}_i$ folgendermaßen abhängen:

$$(\theta_i') = U' M(\bar{E}_i); \qquad |U'| = \pm 1. \tag{71a}$$

Aus (71) folgt weiter, daß die $(T - S^k)$-ten Potenzen der Zahlen

$$\theta''_{km+1} = \theta_{km+1}'^{1-S}, \quad \theta''_{km+j} = \theta'_{km+j} \quad (j = 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{72}$$

dem Körper K_ν angehören: $\theta_i''^{T-S^K} = \alpha_\nu$. Bildet man hierin die Relativ-

norm bezüglich $K_{\mu\nu^i}$, so folgt unter Verwendung eines allgemeinen Satzes[5]) über die Zahlen von der Relativnorm 1:

$$\alpha_\nu^{X(T)} = 1, \quad \alpha_\nu = \alpha_\nu'^{T-1} = \alpha_\nu'^{T-S^k}, \quad \left(\frac{\theta_\nu''}{\alpha_\nu'}\right)^{T-S^k} = 1, \quad \frac{\theta_{km+i}}{\alpha_\nu'} = \alpha_{\mu\nu^k}.$$

Die $\frac{\theta_{km+i}''}{\alpha_\nu'}$, die nach (71a), (72) jedenfalls Ambigen (bezüglich der Operation S) sind, gehören also dem $K_{\mu\nu^i}$ an, d. h. sie sind Ambigen des $K_{\mu\nu^i}$; von den RGA $\bar{E}_i$ hängen sie so ab:

$$\left(\frac{\theta_i''}{\alpha_\nu'}\right) = U''U'M(\bar{E}_i), \quad |U''(\zeta)| = \lambda^l. \tag{72a}$$

Da die Zahlen $\frac{\theta_i''}{\alpha_\nu'}$ jedenfalls durch die ϑ_j, die RGA der einzelnen Körper $K_{\mu\nu^i}$, ausdrückbar sind, muß nach (66) die Determinante $|U''U'M|$ mindestens durch die gleiche λ-Potenz teilbar sein wie $|\bar{\Gamma}(\zeta)|$. — Die Gleichung (70), in der das gegebene $\bar{A}$ als vom Typus (36) vorausgesetzt werden darf und in der wir

$$M = \{M_{ik}\} \qquad (i, k = 1, \ldots, l;\ M_{ik} = 0,\ i < k) \tag{73a}$$

schreiben, kann offensichtlich durch (mod λ) ganze Matrizen M_{ik} befriedigt werden, wenn

$$M_{ii} = \lambda^{i-1} E_m \tag{73b}$$

gesetzt wird. Um $\bar{A}$ auf die Diagonalform (25) zu bringen, genügt daher eine Matrix, deren Determinante $|M|$ höchstens durch $\lambda^{m+2m+\cdots+(l-1)m} = \lambda^{\frac{ml(l-1)}{2}}$ teilbar ist; dies sei nun von M vorausgesetzt, so daß nach dem Letztgesagten für $\lambda^{\sum_1^{lm} \bar{\varepsilon}_i}$, den λ-Faktor von $\bar{\Gamma}(\zeta)$, folgt:

$$\sum_1^{lm} \bar{\varepsilon}_i \leqq \frac{ml(l-1)}{2} + l.$$

Das gibt, in (69) eingesetzt,

$$q \leqq l^{\sum_{i=0}^{l-1} \delta_{i-i^*-l+2}}. \tag{73c}$$

Diese Abschätzung kann noch verschärft werden mittels einer Überlegung, die hier nur skizziert sei:

Wäre $\bar{A}$ durch kein M, dessen Determinante $\not\equiv 0$, mod $\lambda^{\frac{ml(l-1)}{2}}$ ist, auf Diagonalform transformierbar, so müßte $\bar{A}$ im Sinne von Gl. (21), (21a) äquivalent sein mit der folgenden Matrix:

---

[5]) Hilbert, Zahlbericht, § 54.

$$(74) \qquad \bar{A}' = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E_m & \zeta E_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_m & \zeta^2 E_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & E_m & \zeta^{l-1} E_m \end{pmatrix},$$

d. h. die RGA von $K_{\mu,\nu}$ könnten so gewählt werden, daß

$$(74a) \qquad \bar{E}_{km+i} = \bar{E}_{(l-1)m+i}^{(T-S^{k+1})\dots(T-S^{l-1})} \cdot [\alpha_\nu] \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 0, 1, \dots, l-2),$$

$$(74b) \qquad \bar{E}_{(l-1)m+i}^{(T-1)\dots(T-S^{i-1})} = [\alpha_\nu] \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

gälte; hierbei könnte noch in (74a) der Faktor $[\alpha_\nu]$ durch Normierung der $\bar{E}_{km+i}$ entfernt werden, während in (74b) aus der Kongruenz

$$(T-1)\dots(T-S^{l-1}) \equiv \frac{(T-1)^l - T^l + 1}{l} X(S), \ \text{modd}\ T^l - 1,\ S^l - 1$$

$$\bar{E}_{(l-1)m+i}^{(T-1)\dots(T-S^{l-1})} = (\bar{E}_{(l-1)m+i}^{X(S)})^{\frac{(T-1)^l - T^l + 1}{l}} = \alpha_\nu$$

folgen würde. Im Falle der extremalen Matrix (74) hätte man daher in der ersten Gleichung (71) den Faktor $\left(\sqrt[l]{\mu}\right)^x$ fortzulassen, so daß die zu (72), (72a) gehörigen Betrachtungen entfallen und die obere Grenze in (73c) um l^l kleiner ausfallen würde. Auf alle Fälle kann also rechts in (73c) noch ein Faktor l gestrichen werden, so daß folgt:

$$(75) \qquad q \leqq l^{\sum_0^{l-1} \delta_l - \delta^* - (l-1)}.$$

Aus den letzten Entwicklungen können auch für die einzelnen Elementarteilerexponenten $\bar{\varepsilon}_i$ Schranken gefolgert werden. Die Elementarteiler der Matrix $U'' U' M$, welche rechtsseitig durch $\bar{\Gamma}$ teilbar ist, lassen sich nämlich angeben, und da nach einem bekannten Satz der i-te Elementarteiler eines Matrizenproduktes durch den i-ten Elementarteiler eines jeden Faktors teilbar ist, kann $\bar{\varepsilon}_i$ nach oben abgeschätzt werden.

Bezüglich $U'' U' M$ gilt:

α) Das aus (70) mit (72a, b) folgende M ist, wie unmittelbar nachzurechnen, rechtsseitig teilbar durch die „Diagonal"matrix

$$\Lambda \qquad (L_{ii} = \lambda^{i-1} E_m;\ L_{ik} = 0,\ i \neq k;\ i, k = 1, \dots, l);$$

also

$$M = M' \Lambda \quad \text{mit} \quad |M'| = 1.$$

M und $U'M$ (wegen $|U'| = \pm 1$) besitzen daher die gleichen Elementarteiler wie Λ, nämlich m-mal jede der Potenzen λ^{i-1} $(i = 1, \ldots, l)$.

β) Das Produkt $U''U'M$ aus der „Diagonal"matrix U'' $(|U''| = \lambda^l)$ und der rechts von der „Diagonale" nur Nullen enthaltenden Matrix $U'M$ hat, wie elementar zu zeigen, zu Elementarteilern die Zahlen

$$1 \ ((m-1)\text{-mal}); \quad \lambda, \ldots, \lambda^{l-1} \text{ (je } m\text{-mal)}; \quad \lambda^l \text{ (einmal)}.$$

Nach dem früher Gesagten sind daher die nach wachsendem i geordneten $\bar{\varepsilon}_i$ (die ebenso wie die ε_i, (Gl. 35), $\leqq l-1$ sein müssen) nicht größer als die bezüglichen Zahlen der Reihe

$$(75a) \qquad 0 \ ((m-1)\text{-mal}), \ 1 \ (m\text{-mal}), \ \ldots, \ l-2 \ (m\text{-mal}), \ l-1 \ ((m+1)\text{-mal}).$$

Wird die Abschätzung (75a) in (69) eingeführt, so gelangt man wieder zu der Ungleichung (75). Die Schranken (75) und (75a) werden in dem Beispiel des nächsten Paragraphen erreicht.

§ 7.

Ein Beispiel.

Die Formel (69) soll jetzt in einem besonderen Falle, dessen Verhältnisse sich übersehen lassen, durch arithmetische Betrachtungen verifiziert werden. l sei jetzt als reguläre Primzahl, d. i. eine solche, für die die Klassenzahl des Körpers K_ζ der l-ten Einheitswurzeln zu l prim ist, vorausgesetzt; als Grundkörper sei K_ζ genommen $\left(\text{also } k = K_\zeta;\ l \nmid h_0;\ m = \frac{l-1}{2}\right)$ und μ und ν seien zwei reelle Fundamentaleinheiten von K_ζ $(\mu + \eta^l, \nu + \mu^i \eta'^l)$. Eine Basis für die Einheitengruppe dieses Körpers bilden dann ζ, μ, ν nebst $m-3$ weiteren reellen Einheiten $\eta_4, \ldots, \eta_m$. Wegen $l \nmid h_0$ sind die Einheiten ν bzw. $\mu\nu^i$ sicher nicht primär, so daß nach bekannten Sätzen in $K_\nu = K\left(\zeta, \sqrt[l]{\nu}\right)$ das Primideal (λ) aus K_ζ die l-te Potenz eines Primideals $\mathfrak{L}_\nu$ wird:

$$(76) \qquad \mathfrak{L}_\nu^l = (\lambda), \quad \mathfrak{L}_\nu^T = \mathfrak{L}_\nu;$$

$\mathfrak{L}_\nu$ ist das einzige ambige Primideal von K_ν.

Die Einheiten

$$(77) \qquad \eta_{\nu,i} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

seien ein System von RGE in K_ν; da die Relativnormen der Einheiten von K_ν in k eine Schar von einem Range $\leqq m$ bilden, muß sich aus den $m+1$ Einheiten (77) nebst $\sqrt[l]{\mu}$ mindestens eine Einheit η_ν bilden lassen,

derart daß

$$\eta_\nu^{X(T)} = 1 \quad (X(T) = 1 + T + \ldots + T^{l-1}), \tag{78}$$

$$\eta_\nu \neq \eta_\nu'^{\,T-1}$$

und daher (s. Anm. [5]))

$$\eta_\nu = \alpha_\nu^{T-1}, \quad \alpha_\nu \neq \eta_\nu' \alpha_0 \qquad (\alpha_0 \text{ in } k) \tag{79}$$

ist. (79) zeigt, daß das Ideal (α_ν) ambig, also gleich dem Produkte aus einer Potenz des einzigen ambigen Primideals $\mathfrak{L}_\nu$ und einem Ideal $\mathfrak{j}_0$ aus k ist:

$$(\alpha_\nu) = \mathfrak{L}_\nu^c \mathfrak{j}_0, \quad c \not\equiv 0, \mod l. \tag{79a}$$

Hierin darf wegen $l \nmid h_0$ $\mathfrak{j}_0$ als Hauptideal vorausgesetzt werden ($\mathfrak{j}_0 = (\alpha_0)$), so daß aus (79a) in Verbindung mit (78) folgt, daß auch $\mathfrak{L}_\nu$ in K_ν durch ein Hauptideal repräsentiert wird.

$$\mathfrak{L}_\nu = (\lambda_\nu), \quad \lambda_\nu^{X(T)} = \lambda \eta';$$

λ_ν^{T-1} ist dann eine Einheit, die (78) befriedigt und die als eine der RGE angenommen werden kann:

$$\eta_{\nu,1} = \lambda_\nu^{T-1}. \tag{80}$$

Da nun jede Einheit mit (78), wie unsere Überlegung zeigt, von der Form $\eta_\nu = (\lambda_\nu^c \eta_\nu')^{T-1} = \eta_{\nu,1}^c \cdot \eta_\nu'^{\,T-1}$ wäre, kann unter den RGE (77) keine zweite von der Relativnorm 1 sein, und man kann sie so normiert annehmen, daß etwa

$$\eta_{\nu,2}^{X(T)} = \mu, \quad \eta_{\nu,3}^{X(T)} = \zeta; \quad \eta_{\nu,i}^{X(T)} = \eta_i \qquad (i = 4, \ldots, m) \tag{81}$$

gilt; wegen $\nu = \left(\sqrt[l]{\nu}\right)^{X(T)}$ sind also sämtliche Einheiten aus k Relativnormen von Einheiten η_ν. Eine Relativbasis für das Ambigen von K_ν bilden die lm RGA

$$\bar{\eta}_{\nu,1} = \lambda_\nu; \quad \bar{\eta}_{\nu,i} = \eta_{\nu,i} \qquad (i = 2, \ldots, m). \tag{82}$$

Da voraussetzungsgemäß $l \nmid h_0$ ist und der relativ-zyklische Oberkörper K_ν ein einziges ambiges Primideal enthält, gilt auch $l \nmid h_\nu$; dies folgt aus einem allgemeineren Satze der Klassenkörpertheorie und kann so eingesehen werden:

Wäre in K_ν ein Ideal $\mathfrak{j}_\nu$ von der Ordnung l vorhanden, so gäbe es wegen

$$\mathfrak{j}_\nu^{(T-1)^{l-1}} = \mathfrak{j}_\nu^{X(T)-l(T-1)^{l-2}-\ldots-l} \sim 1$$

einen kleinsten Exponenten c, derart, daß

$$\mathfrak{j}_\nu^{(T-1)^c} = (\alpha_\nu) \qquad (1 \leqq c \leqq l-1) \tag{83}$$

wäre; hieraus folgt durch Bildung der Relativnorm

$$\alpha_\nu^{X(T)} = \eta_0 \qquad (\eta_0 = \text{Einheit aus } k). \tag{83a}$$

Nach Früherem aber ist jedes η_0 Relativnorm einer Einheit η_ν:

$$\eta_\nu^{X(T)} = \eta_0,$$

woraus nach Division durch (83a) (s. Anm. [5])

$$\left(\frac{\alpha_\nu}{\eta_\nu}\right)^{X(T)} = 1, \qquad \frac{\alpha_\nu}{\eta_\nu} = \alpha_\nu'^{\,T-1}, \qquad \alpha_\nu = \eta_\nu \alpha_\nu'^{\,T-1}$$

folgt. Die letzte Gleichung aber ergäbe, in (83) eingesetzt,

$$\left(\frac{\mathfrak{j}_\nu^{(T-1)c-1}}{\alpha_\nu'}\right)^{T-1} = (1), \qquad \mathfrak{j}_\nu^{(T-1)c-1} = (\alpha_\nu')\,\mathfrak{j}_0 = (\alpha_\nu'')$$

in Widerspruch zu dem über c Vorausgesetzten. Daher ist

$$l \nmid h_\nu \tag{84}$$

und analog

$$l \nmid h_{\mu\nu^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1). \tag{84a}$$

Wir betrachten jetzt den Körper $K_{\mu,\nu} = K\left(K_\nu, \sqrt[l]{\mu}\right)$. Da die Einheit μ auch in K_ν nicht primär wird, wird $\mathfrak{L}_\nu$, der einzige Primteiler von λ in K_ν, in $K_{\mu,\nu}$ gleich der l-ten Potenz eines Primideals $\mathfrak{L}_{\mu,\nu}$:

$$\mathfrak{L}_\nu = \mathfrak{L}_{\mu,\nu}^l, \qquad \mathfrak{L}_{\mu,\nu}^S = \mathfrak{L}_{\mu,\nu}. \tag{85}$$

Da $\mathfrak{L}_{\mu,\nu}$ das einzige ambige Primideal von $K_{\mu,\nu}$ ist, und für die Klassenzahl des Unterkörpers K_ν (84) gilt, folgt aus dem eben Ausgeführten auch für die Klassenzahl von $K_{\mu,\nu}$

$$l \nmid h_{\mu,\nu}, \tag{86}$$

so daß insbesondere $\mathfrak{L}_{\mu,\nu}$ ein Hauptideal ist:

$$\mathfrak{L}_{\mu,\nu} = (\lambda_{\mu,\nu});$$

ferner sind sämtliche Einheiten von K_ν Relativnormen von Einheiten des $K_{\mu,\nu}$.

Eine Basis der Einheitsschar von K_ν bilden zusammen mit μ (s. (80), (81)) die $l\,m - 1$ Einheiten

$$\eta_{\nu,1}^{T^k} = \lambda_\nu^{(T-1)T^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-2, \qquad \left(\eta_{\nu,1}^{T^{l-1}} = \left(\prod_0^{l-2} \eta_{\nu,1}^{T^k}\right)^{-1}\right), \tag{87a}$$

$$\eta_{\nu,2}^{T^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-2, \qquad \left(\eta_{\nu,2}^{T^{l-1}} = \left(\sqrt[l]{\mu}\right)^l \left(\prod_0^{l-2} \eta_{\nu,2}^{T^k}\right)^{-1}\right), \tag{87b}$$

$$\sqrt[l]{\nu}\,, \tag{87c}$$

$$\eta_{\nu,i}^{T^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1; \; i = 3, \ldots, m \tag{87d}$$

und man erhält nun ein System von RGE des $K_{\mu,\nu}$ in

$$H_1 = \lambda_{\mu,\nu}^{S-1} \tag{88}$$

nebst $lm-1$ weiteren Einheiten, deren Relativnormen den $lm-1$ Einheiten (87a—d) gleich sind.

Da in K_ν nach (85) die Hauptideale $\mathfrak{L}_{\mu,\nu}^{X(S)} = (\lambda_{\mu,\nu}^{X(S)})$ und $\mathfrak{L}_\nu = (\lambda_\nu)$ übereinstimmen, und da jede Einheit von K_ν Relativnorm einer Einheit H ist, kann $\lambda_{\mu,\nu}$ so normiert werden, daß

$$\lambda_{\mu,\nu}^{X(S)} = \lambda_\nu$$

wird; nach (87a) ist dann

$$\eta_{\nu,1} = \lambda_\nu^{T-1} = (\lambda_{\mu,\nu}^{T-1})^{X(S)}. \tag{89a}$$

Setzt man weiter

$$H_2^{X(S)} = \eta_{\nu,2}; \quad H'^{X(S)} = \sqrt{\nu}; \quad H_i^{X(S)} = \eta_{\nu,i} \qquad (i = 3, \ldots, m), \tag{89b}$$

so können gemäß (88), (89a, b) als RGE des $K_{\mu,\nu}$ die folgenden lm Einheiten genommen werden:

$$\begin{cases} H_1 = \lambda_{\mu,\nu}^{S-1} & \\ \lambda_{\mu,\nu}^{(T-1)T^k} & (k = 0, 1, \ldots, l-2), \\ H_2^{T^k} & (k = 0, 1, \ldots, l-2), \\ H' & \\ H_i^{T^k} & (k = 0, 1, \ldots, l-1;\ i = 3, \ldots, m). \end{cases} \tag{90}$$

Schreibt man dann

$$\overline{H}_1 = \lambda_{\mu,\nu}, \quad \overline{H}' = H', \quad \overline{H}_i = H_i \qquad (i = 2, \ldots, m), \tag{91}$$

so bilden die lm Ambigen

$$\overline{H}_1^{T^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{92a}$$

$$\overline{H}_2^{T^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-2), \tag{92b}$$

$$\overline{H}' \tag{92c}$$

$$\overline{H}_2^{T^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1;\ i = 3, \ldots, m) \tag{92d}$$

ein System von RGA des $K_{\mu,\nu}$ bezüglich K_ν.

Gemäß (65) müssen nun die T-ten Potenzen dieser Ambigen wieder durch (92) ausdrückbar sein; dies trifft für alle RGA außer $\overline{H}_2^{T^{l-2}}$ und $\overline{H}'$ eo ipso zu, und um nun für $(\overline{H}_2^{T^{l-2}})^T = \overline{H}_2^{T^{l-1}}$ und H'^T eine Rechnung mit unbestimmten Exponenten zu umgehen, sollen $\overline{H}_2$ und $\overline{H}'$ noch entsprechend normiert werden:

α) Nach (91), (89b), (81) ist

$$\overline{H}_2^{X(S)} = \eta_{\nu,2}, \quad \overline{H}_2^{X(S)X(T)} = \mu; \tag{93}$$

wählt man daher von vornherein als $\bar{H}_3$ diejenige Einheit, für die

$$\bar{H}_3^{X(T)} = \sqrt[l]{\mu} \tag{94}$$

gilt (eine solche Einheit muß in $K_{\mu,\nu}$, analog der zweiten Gleichung (89b), vorhanden sein), und in K_ν als RGE $\eta_{\nu,3}$ die Einheit $\bar{H}_2^{X(S)}$, so erfüllt das gemäß (94) normierte $\bar{H}_3$ auch die Gleichung (93) und kann daher als RGA des $K_{\mu,\nu}$ dienen.

β) Um $\bar{H}'$, welches nach (91), (89b) nur die Bedingung $H'^{X(S)} = \sqrt[l]{\nu}$ erfüllen muß, zu normieren, sei die Einheit $\bar{H}_2^{1-S}\bar{H}_3^{X(T)+X(S)-l}$ betrachtet, deren Relativnorm bezüglich K_μ nach (94), (91), (89b), (84) gleich ist $\bar{H}_2^{X(T)(1-S)}\bar{H}^{X(S)X(T)} = \zeta^{-1}\cdot\zeta = 1$; es existiert daher (Anm. [5])) eine Ambige $\bar{H}^*$ (in diesem Spezialfalle stimmen, da $\mathfrak{L}_{\mu,\nu}$ offensichtlich auch das einzige bezüglich K_μ ambige Primideal ist, die Ambigen bezüglich K_μ mit denen bezüglich K_ν überein) derart, daß

$$\bar{H}^{*T-1} = \bar{H}_2^{1-S}\bar{H}_3^{X(T)+X(S)-l} \tag{95}$$

ist. Nimmt man hier die Relativnorm bezüglich K_ν, so wird

$$\begin{gathered}\bar{H}^{*X(S)(T-1)} = \bar{H}_3^{X(S)X(T)} = \zeta = (\sqrt[l]{\nu})^{T-1};\\ \left(\frac{\bar{H}^{*X(S)}}{\sqrt[l]{\nu}}\right)^{T-1} = 1, \qquad \bar{H}^{*X(S)} = \sqrt[l]{\nu}\cdot\bar{\eta}_0,\end{gathered} \tag{96}$$

worin $\bar{\eta}_0$, eine Zahl aus k, von der Form $\bar{\eta}_0 = \lambda^a\eta_0$ sein muß.

Jedes derartige $\bar{\eta}_0$ muß nun, analog dem für K_ν ausgeführten, die Relativnorm einer Ambige $\bar{\eta}_\mu = \lambda_\mu^a\eta_\mu$ des K_μ sein:

$$\bar{\eta}_0 = \bar{\eta}_\mu^{X(S)}$$

und dies gibt, in die dritte Gleichung (96) eingesetzt,

$$\left(\frac{\bar{H}^*}{\bar{\eta}_\mu}\right)^{X(S)} = \sqrt[l]{\nu}. \tag{97}$$

Die Einheit $\frac{\bar{H}^*}{\bar{\eta}_\mu}$, die so wie $\bar{H}^*$ der Gleichung (95) und so wie $\bar{H}'$ der Gleichung (97) genügt, wählen wir jetzt als $\bar{H}'$; es gilt daher

$$\bar{H}'^{T-1} = \bar{H}_2^{1-S}\bar{H}_3^{X(T)+X(S)-l}. \tag{98}$$

Nunmehr ist es evident, daß die T-ten Potenzen des gemäß (94), (98) normierten Systems (92a—d) wieder durch das System ausdrückbar sind, und daß für die zugehörige Matrix $\bar{A}$ $\bar{A}^l = E_{lm}$ gilt.

Zur Aufstellung der Matrix $\bar{\Gamma}$ benötigt man Systeme von RGA der einzelnen Unterkörper $K_{\mu\nu'}$. Ein solches System für $K_{\mu\nu'}$ liefern aber die

Relativnormen

$$\left.\begin{aligned} &(99) && \overline{H}_1^{X(TS^{-i})}, \\ &(100) && \overline{H}'^{X(T,S^{-i})},\ \overline{H}_j^{X(TS^{-i})},\ j=3,\dots,m \end{aligned}\right\} i=0,1,\dots,l-1.$$

Denn die Relativnormen der $m-1$ Einheiten (100) bezüglich $k=K_\zeta$ sind wegen $X(S)X(TS^{-i})=X(T)X(S)$ nach (91), (89b), (81) gleich

$$\nu,\ \zeta;\ \eta_i \qquad (i=4,\dots,m)$$

und bilden daher zusammen mit $\mu\nu^i$ eine Basis der Einheitenschar von k.

Um die Einheit $\overline{H}'^{X(TS^{-i})}$ aus (100) durch die RGA (92) auszudrücken, hat man (s. (98)) zu schreiben

$$(101)\qquad \begin{aligned} \overline{H}'^{X(TS^{-i})} &= \overline{H}'^{X(S^{-i})+(T-1)\frac{X(TS^{-i})-X(S^{-i})}{T-1}} \\ &= \overline{H}'^{X(S^{-i})}\,\overline{H}_2'^{(1-S)\frac{X(TS^{-i})-X(S^{-i})}{T-1}}\,\overline{H}_3^{(X(T)+X(S)-l)\frac{X(TS^{-i})-X(S^{-i})}{T-1}}, \end{aligned}$$

worin der auf $\overline{H}_2$ bezügliche Faktor gleich ist

$$\prod_{k=0}^{l-2}\overline{H}_2^{T^k(l-1-k)(1-S)} \qquad (\text{für } i=0),$$

bzw.

$$\prod_{k=0}^{l-2}(\overline{H}_2^{T^k})^{(1-S)\frac{S^{-i(k+1)}-1}{1-S^i}} \qquad (\text{für } i\neq 0).$$

Man kann jetzt $|\overline{\Gamma}(\zeta)|$ berechnen, und erhält, wenn man die Exponentendeterminante der durch die RGA (92a–d) ausgedrückten Ambigen (99a, b), (101) bildet, unmittelbar:

$$|\overline{\Gamma}(\zeta)| = \pm \begin{vmatrix} l, & (l-1)\lambda, & (l-2)\lambda, & \dots, & \lambda \\ 0, & \frac{\zeta^{-1}-1}{1-\zeta^{-1}}\lambda, & \frac{\zeta^{-2}-1}{1-\zeta^{-1}}\lambda, & \dots, & \frac{\zeta^{-(l-1)}-1}{1-\zeta^{-1}}\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & \frac{\zeta^{-(l-1)}-1}{1-\zeta^{-(l-1)}}\lambda, & \frac{\zeta^{-2(l-1)}-1}{1-\zeta^{-(l-1)}}\lambda, & \dots, & \frac{\zeta^{-(l-1)^2}-1}{1-\zeta^{-(l-1)}}\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ 1 & \zeta^{-1} & \dots \zeta^{-(l-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\zeta^{-(l-1)} & \dots \zeta^{-(l-1)^2} \end{vmatrix}^{m-} =$$

und hieraus:

$$(103)\qquad N_\zeta(|\overline{\Gamma}(\zeta)|) = l^{\frac{ml(l-1)}{2}+l-1}.$$

Diese Potenz stimmt aber mit der linken Seite von Gleichung (61) überein, da in unserem Beispiel alle Zahlen δ gleich 1 sind und auch für den Klassenzahlquotienten (40) zufolge (84a) und (86) $q=1$ gilt.

§ 8.

Beweis eines Existenzsatzes zur Klassenkörpertheorie.

Zum Schlusse bedienen wir uns der Einheiten der Relativkörper $K_{\mu,\nu}$, um einen Existenzbeweis der Klassenkörpertheorie zu führen.

In jedem relativ-zyklischen unverzweigten Oberkörper von Primzahlrelativgrad l geht nach Furtwängler[6]) mindestens eine Neben- (d. h. Nicht-Haupt-) Klasse c des Grundkörpers k ($c \neq 1$, $c^l = 1$ in k) in die Hauptklasse über, und dadurch die Gruppe („Klassenverband")

$$c^x \qquad (x = 0, 1, \ldots, l-1); \tag{104}$$

für ungerades l soll hier nun gezeigt werden, daß es Körper k und zugehörige unverzweigte Oberkörper K von der Eigenschaft gibt, daß in K mindestens *zwei* voneinander unabhängige Nebenklassen aus k, c und $c' \neq c^x$, in die Hauptklasse übergehen. — Daß für $l = 2$ dieser Fall eintreten kann, folgt aus einem von Furtwängler gegebenen Zahlenbeispiel ($k = K(\sqrt{-21})$[7]).

Zum Beweise gehen wir von einem Grundkörper k vom Grade $2m$ aus, der etwa wieder den $K(\zeta)$ enthalte, und unter dessen singulären Primzahlen (das sind diejenigen Zahlen ω, die einer Kongruenz $\omega \equiv \alpha^l$, mod λ^l genügen, und für die $(\omega) = \mathfrak{j}^l$ gilt) mindestens eine Einheit μ ($\mu = \eta \neq \eta'^l$) und mindestens zwei Nichteinheiten ν, ν' ($\nu \neq \alpha^l \eta$, $\nu' \neq \alpha'^l \eta'$) vorhanden seien; daß es unendlich viele derartige Körper gibt, ist leicht einzusehen. — Aus der Annahme, daß in K_ν bzw. in K_μ nur je ein Nebenklassensystem (104) aus k in die Hauptklasse übergehe, und desgleichen in $K_{\mu,\nu}$ nur je ein System (104) aus K_ν bzw. aus K_μ, soll nun ein Widerspruch hergeleitet werden.

Da in K_μ annahmegemäß die Ideale $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ ($(\nu) = \mathfrak{j}^l$, $(\nu') = \mathfrak{j}'^l$) nicht zugleich Hauptideale werden können, darf jedenfalls vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{j}$ auch in K_μ Nebenideal bleibt. Wir untersuchen nun zuerst die RGE von K_ν. Dieser Körper könnte, da in ihm $\mathfrak{j} = (\sqrt[l]{\nu})$ Hauptideal wird, unserer Annahme zufolge keine weitere von $\sqrt[l]{\nu}$ unabhängige Ambige und daher keine RGE mit der Relativnorm 1 enthalten. Die Schar der Relativnormen der Einheiten von K_ν wäre vom Range m, und man könnte die RGE derart normieren, daß etwa

$$\eta_{\nu,1}^{X(T)} = \mu, \quad \eta_{\nu,2}^{X(T)} = \zeta_a; \quad \eta_{\nu,i}^{X(T)} = \eta_i \qquad (i = 3, \ldots, m) \tag{105}$$

wäre, wobei μ, ζ_a ($= e^{\frac{2\pi i}{l^a}}$, $a \geqq 1$), $\eta_{\nu,i}$ ($i = 3, \ldots, m$) eine Basis der Einheitenschar von k bezeichnen.

---

[6]) Ph. Furtwängler, Math. Annalen **63** (1907), S. 1–37.

[7]) Ph. Furtwängler, Über das Verhalten der Ideale des Grundkörpers im Klassenkörper, Monatshefte f. Mathematik u. Physik **27** (1916), S. 1–15 (S. 10).

Falls unsere Annahme zuträfe, so würde in K_μ ein einziges Nebenideal $\mathfrak{j}_1$ aus k ($\mathfrak{j}_1 \neq \mathfrak{j}^u(\alpha)$) in die Hauptklasse gelangen und durch eine Ambige $\bar{\eta}_{l_\mu}$ repräsentiert werden; dieses $\mathfrak{j}_1$, das annahmegemäß in K_ν Nebenideal bleibt, wäre daher auch das einzige Nebenideal aus K_ν, das in $K_{\mu,\nu} = K(K_\nu, \sqrt[l]{\mu})$ Hauptideal wird.

Da $K_{\mu,\nu}$ relativ-unverzweigt ist und daher keine ambigen Primideale enthält, ist jedes (bezüglich K_ν) ambige Hauptideal einem in K_ν liegenden Ideale gleich. Alle Ambigen von $K_{\mu,\nu}$ (bezüglich K_ν) sind daher in der Form $\bar{\eta}_{l_\mu}^x H \alpha_\nu$ ($H =$ Einheit aus $K_{\mu,\nu}$; α_ν in K_ν) enthalten, und alle Einheiten von der Relativnorm 1 in der Form

$$(\bar{\eta}_{l_\mu}^x H \alpha_\nu)^{1-S} = (\bar{\eta}_{l_\mu}^{1-S})^x H^{1-S}.$$

Wählt man daher die schon dem K_μ angehörige Einheit

$$H' = \bar{\eta}_{l_\mu}^{1-S} \tag{106}$$

als RGE des $K_{\mu,\nu}$, so kann man (da $K_{\mu,\nu}$ durch Adjunktion der l-ten Wurzel aus der Einheit μ entsteht) die $lm-1$ übrigen RGE so normieren, daß ihre Relativnormen gleich den Einheiten

$$\eta_{\nu,1}^{T^k} \ (k = 0, 1, \ldots, l-2); \text{ bzw. } \eta_{\nu,i}^{T^k} \ (k = 0, 1, \ldots, l-1; \ i = 2, \ldots, m) \tag{107}$$

werden, welche gemäß (105) zusammen mit μ eine Basis für die Einheitenschar von K_ν bilden.

Ist nun

$$H_1^{X(S)} = \eta_{\nu,1}; \quad H_i^{X(S)} = \eta_{\nu,i}, \qquad (i = 2, \ldots, m) \tag{108}$$

so würden die Einheiten

$$H_1^{T^k} \ (k = 0, 1, \ldots, l-2); \ H'; \ H_i^{T^k} \ (k = 0, 1, \ldots, l-1; \ i = 2, \ldots, m) \tag{109}$$

ein System von RGE des $K_{\mu,\nu}$ (bezüglich K_ν) bilden.

Faßt man andrerseits $K_{\mu,\nu}$ auf als $K(K_\mu, \sqrt[l]{\nu})$, so wäre annahmegemäß $\mathfrak{j}^l \sim \nu$ seine einzige Ambige, so daß jede Einheit des K_μ Relativnorm einer Einheit aus $K_{\mu,\nu}$ sein müßte. Man könnte daher, ähnlich wie im vorigen §, die Einheit H_1, von der nach (108) und (105) nur $H_1^{X(S)X(T)} = \mu$ verlangt wird, so normieren, daß

$$H_1^{X(T)} = \sqrt[l]{\mu} \tag{110}$$

gälte. Da aus (106)

$$H'^{T-1} = 1 \tag{111}$$

folgt, würde durch (110), (111) der Forderung genügt werden, daß die T-ten Potenzen der RGE (109) derart durch (109) ausdrückbar sind, daß für die zugehörige Exponentenmatrix $A^l = E_{lm}$ gilt.

Sucht man aber auch die Einheit H^* mit

$$H^{*X(T)} = H' = \bar{\eta}_\mu^{1-S},$$

die nach dem eben Gesagten existieren müßte, durch die RGE (109) auszudrücken, so erhält man eine Gleichung

$$\left[H'^{F'(S)} H_1^{F_1(T,S)} \prod_{i=2}^{m} H_i^{F_i(T,S)} [\eta_\nu]\right]^{X(T)} = H'$$

(worin die Polynome $F_i(T, S)$ vom Grade $l-1$ in T und, so wie $F'(S)$, vom Grade $l-2$ in S sind) oder mit (110), (111)

$$H'^{lF'(S)} (\sqrt[l]{\mu})^{F_1(1,S)} \prod_{i=2}^{m} H_i^{X(T)F_i(1,S)} \eta_0 = H'.$$

Dies bedeutet aber, daß die Einheit $H'^{1-lF'(S)}$ ausdrückbar ist durch die $F_i(1, S)$-ten Potenzen der Einheiten $H_2^{T^k}$ $(i = 2, \ldots, m)$ nebst einem $[\eta_\nu]$, und steht daher im Widerspruch zu der Eigenschaft von H', zusammen mit den übrigen Einheiten (109) ein System von RGE bezüglich K_ν zu bilden.

Hieraus ist zu schließen, daß mindestens in einem der vier Relativkörper K_u/k, K_ν/k, $K_{\mu,\nu}/K_\nu$, $K_{\mu,\nu}/K_\nu$ zwei voneinander unabhängige Klassen des Grundkörpers in die Hauptklasse gelangen.

(Eingegangen am 4. März 1928.)

Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke.

Von

Ljubomir Tschakaloff in Sofia.

Bekanntlich heißt ein Kreisbogenzweieck quadrierbar, wenn es folgenden Bedingungen genügt: 1. die Zentriwinkel $\psi = 2\varphi$, $\psi' = 2\varphi'$ der beiden zugehörigen Kreisbogen sind mit elementargeometrischen Hilfsmitteln (d. h. mit Zirkel und Lineal allein) konstruierbar; 2. das Kreisbogenzweieck kann durch dieselben Hilfsmittel in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden[1]). Nehmen wir weiter an, daß die Zentriwinkel ψ und ψ' kommensurabel sind, d. h. $\psi' : \psi = m : n$, wo m und n ganze teilerfremde Zahlen bedeuten, so führt die analytische Behandlung der Aufgabe, wie Landau gezeigt hat[2]), zu der Gleichung

$$\left(\frac{\sin m\theta}{\sin n\theta}\right)^2 = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

wo θ das größte gemeinsame Maß von φ und φ' ist. Unter der genannten Einschränkung wird das Problem ein algebraisches: es reduziert sich nämlich darauf, alle teilerfremden Wertepaare m, n zu bestimmen, für welche die trigonometrischen Funktionen des durch (1) bestimmten Winkels θ Quadratwurzelzahlen sind.

Die bisher bekannten 5 Fälle quadrierbarer Kreisbogenzweiecke entsprechen den folgenden Werten von m und n:

$m = 2,\ n = 1;$ $\quad m = 3,\ n = 1;$ $\quad m = 3,\ n = 2$ (Hippokrates),
$m = 5,\ n = 1;$ $\quad m = 5,\ n = 3$ (Clausen).

In neuerer Zeit hat Landau (vgl. die unter [2]) zitierte Arbeit) den Satz bewiesen:

---

[1]) Man betrachtet dabei die gemeinsame Sehne der beiden Kreisbogen als bekannt.

[2]) Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrg. 2 (1903), S. 1–6.

Ist das Verhältnis der beiden Zentriwinkel ψ' und ψ eine nicht-Gaußsche Primzahl p, so ist das Kreisbogenzweieck nicht quadrierbar.

Im folgenden soll zunächst (§ 1) eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf kürzerem Wege bewiesen werden, die die Landauschen Ergebnisse auf unendlich viele neue Fälle zu erweitern gestattet.

Der erwähnte Satz von Landau läßt die Frage unentschieden, ob das Kreisbogenzweieck quadrierbar ist, wenn p zu den Gaußschen Primzahlen gehört. Für die kleinsten Gaußschen Primzahlen $p = 3$ und $p = 5$ ist allerdings diese Frage, nach den Ergebnissen von Hippokrates und Clausen, bejahend zu beantworten. Es ist daher interessant, den Fall $\psi' : \psi = 17$, der der nächstfolgenden Gaußschen Primzahl entspricht, näher zu untersuchen. Dies geschieht im § 2 der vorliegenden Arbeit, wo ich zu dem negativen Resultat gelange: Auch im Falle $\psi' : \psi = 17$ ist das Kreisbogenzweieck nicht quadrierbar.

§ 1.

Satz I. *Es bedeute p eine nicht Gaußsche Primzahl und n irgendeine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Ist das Verhältnis der beiden Zentriwinkel ψ' und ψ gleich $p : n$, so ist das entsprechende Kreisbogenzweieck nicht quadrierbar.*

Beweis. Da n und p teilerfremd sind, so ist $\theta = \frac{\varphi}{n} = \frac{\varphi'}{p}$ das größte gemeinsame Maß von $\varphi = \frac{\psi}{2}$ und $\varphi' = \frac{\psi'}{2}$, und man kann zwei ganze positive Zahlen u und v bestimmen, welche die Gleichung $nu - pv = 1$ befriedigen. Aus $\theta = (nu - pv)\theta = u\varphi - v\varphi'$ folgt dann, daß θ mit elementargeometrischen Hilfsmitteln konstruierbar ist, falls dies für die Zentriwinkel ψ und ψ' gilt. Nehmen wir nun an, das Kreisbogenzweieck sei quadrierbar, dann genügt θ der Gleichung

$$\left(\frac{\sin p\theta}{\sin n\theta}\right)^2 = \frac{p}{n}, \tag{2}$$

wobei $\sin\theta$ eine Quadratwurzelzahl ist. Setzt man nacheinander $e^{i\theta} = z$, $y = x^2$, $z = y - 1$, so erhält man aus (2) die Gleichungen

$$\left(\frac{x^{2p}-1}{x^{2n}-1}\right)^2 = \frac{p}{n}x^{2p-2n}, \qquad n\left(\frac{y^p-1}{y-1}\right)^2 = py^{p-n}\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right)^2,$$

$$n\left\{\frac{(z+1)^p-1}{z}\right\}^2 - p(z+1)^{p-n}\left\{\frac{(z+1)^n-1}{z}\right\}^2 = 0,$$

$$n\left\{z^{p-1} + \binom{p}{1}z^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}\right\}^2$$

$$- p(z+1)^{p-n}\left\{z^{n-1} + \binom{n}{1}z^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\right\}^2 = 0.$$

Die letzte Gleichung, nach fallenden Potenzen von z geordnet, hat die Gestalt

$$nz^{2p-2} + a_1 z^{2p-3} + \ldots + a_{2p-2} = 0,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-2}$ ganze, durch p teilbare Zahlen sind, während der Koeffizient n des höchsten Gliedes zu p teilerfremd ist. Außerdem ist das konstante Glied $a_{2p-2} = np(p-n)$ zwar durch p, aber nicht durch p^2 teilbar. Nach dem Schönemannschen Irreduzibilitätskriterium ist diese Gleichung im Bereich der rationalen Zahlen irreduzibel. — Wäre sie nun durch Quadratwurzelziehen auflösbar, so müßte ihr Grad $2(p-1)$, gegen die Voraussetzung, eine Potenz von 2 sein. Damit ist Satz I bewiesen.

§ 2.

Setzt man in (2) $n=1$, $p=17$, $2\cos 2\theta = x$, so erhält man für x die algebraische Gleichung 8. Grades

$$(3) \quad x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 - \sqrt{17} = 0,$$

deren Koeffizienten dem quadratischen Körper $k(\sqrt{17})$ angehören. *Diese Gleichung ist irreduzibel auch in* $k(\sqrt{17})$. Ist nämlich $g(x)$ das in bezug auf $k(\sqrt{17})$ irreduzible Polynom in $k(\sqrt{17})$, welches mit (3) die Wurzel $x = 2\cos 2\theta$ gemeinsam hat, so ist sein Grad ν höchstens gleich 8. Bedeutet ferner $g_1(x)$ das zu $g(x)$ „konjugierte" Polynom, so gehören die Koeffizienten von $h(x) = g(x)\,g_1(x)$ dem natürlichen Rationalitätsbereich an. Folglich hat auch das Polynom 4ν-ten Grades $y^{2\nu} h\left(y + \frac{1}{y}\right)$ rationale Koeffizienten und verschwindet für $y = e^{2i\theta}$. Andererseits genügt $e^{2i\theta}$ (vgl. § 1) der irreduziblen Gleichung $\left(\frac{y^{17}-1}{y-1}\right)^2 - 17\,y^{16} = 0$ vom Grade 32. Daher ist $4\nu \geqq 32$, d. h. $\nu \geqq 8$, was in Verbindung mit $\nu \leqq 8$ die Gleichung $\nu = 8$ liefert. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $g(x)$ mit der linken Seite von (3) (bis auf einen konstanten Faktor) übereinstimmt, d. h., wenn Gleichung (3) in bezug auf $k(\sqrt{17})$ irreduzibel ist.

Wir wollen untersuchen, ob (3) durch wiederholtes Quadratwurzelziehen gelöst werden kann. Zu dem Zwecke schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Es sei* $f(x)$ *ein Polynom* 8. *Grades im Körper* Ω *mit folgenden Eigenschaften*: 1. $f(x)$ *ist irreduzibel in* Ω *und* 2. *die Gleichung* $f(x) = 0$ *ist durch wiederholtes Quadratwurzelziehen über* Ω *auflösbar. Sind* $x_1, x_2, \ldots, x_8$ *die Wurzeln dieser Gleichung, so gibt es eine Permutation* $(x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h)$ *derselben von der Beschaffenheit, daß die Summen*

$$x_a + x_b,\ x_c + x_d,\ x_e + x_f,\ x_g + x_h$$

einer Gleichung 4. Grades genügen, deren Koeffizienten ebenfalls zu Ω gehören.

Beweis. n sei eine ganze rationale Zahl. Bei allen Permutationen der Buchstaben $x_1, x_2, \ldots, x_8$ nimmt die Funktion

$$F = (x_1 + x_2 + n)(x_3 + x_4 + n)(x_5 + x_6 + n)(x_7 + x_8 + n)$$

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ verschiedene Werte an, welche einer Gleichung in Ω vom Grade 105 genügen. Sämtliche Wurzeln dieser Gleichung sind dabei Quadratwurzelzahlen über Ω. Ich behaupte nun, daß mindestens eine ihrer Wurzeln zu Ω gehört. In der Tat zerfällt ihre linke Seite $\Phi(u)$ in eine gewisse Anzahl irreduzibler Faktoren in bezug auf Ω, von denen mindestens einer von ungeradem Grade sein muß. Ist $L(u)$ ein solcher Faktor, so kann sein Grad nicht größer als 1 sein, da der Grad eines irreduziblen Polynoms in Ω, dessen Wurzeln Quadratwurzelzahlen über Ω sind, notwendig eine Potenz von 2 sein muß. Die Gleichung $\Phi(u) = 0$ hat daher eine Wurzel $u = \overline{F}$ in Ω, welche aus F dadurch entsteht, daß man auf die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_8$ eine gewisse Permutation $\mathfrak{P}_n$ anwendet. In der unendlichen Folge der Permutationen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, die den Werten $n = 1, 2, 3, \ldots$ entsprechen, gibt es (mindestens) eine Permutation, die unendlich oft auftritt. Ist $\mathfrak{P} = (x_a, x_b, x_c, x_d, x_e, x_f, x_g, x_h)$ eine solche Permutation, so gehört das Produkt

$$(x_a + x_b + n)(x_c + x_d + n)(x_e + x_f + n)(x_g + x_h + n)$$

zu Ω für unendlich viele n. Dafür ist aber offenbar notwendig und hinreichend, daß die elementarsymmetrischen Funktionen von $y_1 = x_a + x_b$, $y_2 = x_c + x_d$, $y_3 = x_e + x_f$, $y_4 = x_g + x_h$ ebenfalls zu Ω gehören, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Sind $x_1, x_2, \ldots, x_8$ die Wurzeln von (3), so ist*

$$P = \prod_{\substack{m,n \\ m>n}} (x_m + x_n) = -(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1)^2.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $f(x)$ die linke Seite von (3) und setzen zur Abkürzung $1 - \sqrt{17} = \lambda$. Dann ist

$$(4) \qquad f(-x_1) f(-x_2) \ldots f(-x_8) = \prod_{m,n} (x_m + x_n)$$
$$= 2^8 \lambda \prod_{\substack{m,n \\ m>n}} (x_m + x_n)^2 = 2^8 \lambda P^2.$$

Aus der Identität

$$f(-x) - f(x) = -2x(x^2 - 2)(x^4 - 4x^2 + 2)$$
$$= -2x(\sqrt{2} - x)(-\sqrt{2} - x)(\alpha - x)(-\alpha - x)(\beta - x)(-\beta - x),$$

wo $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$ die Wurzeln des Polynoms $x^4 - 4x^2 + 2$ bedeuten, folgt ferner, wenn man sukzessiv x durch $x_1, x_2, \ldots, x_8$ ersetzt und die

entstandenen Gleichungen gliedweise multipliziert,

$$(5) \qquad f(-x_1)\,f(-x_2)\ldots f(-x_8) = 2^8\lambda f(\sqrt{2})f(-\sqrt{2})f(\alpha)f(-\alpha)f(\beta)f(-\beta).$$

Andererseits ist

$$f(x) = (x^4 - 4x^2 + 2)(x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1) + \lambda - 2,$$

also $f(\alpha) = f(-\alpha) = f(\beta) = f(-\beta) = \lambda - 2$. Ebenso leicht findet man $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = \lambda$. Der Vergleich von (4) und (5) liefert $P^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^4$, d. h.

$$(6) \qquad P = \pm\lambda(\lambda - 2)^2 = \mp(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1)^2.$$

Hierin ist das obere Vorzeichen das richtige, wie man durch numerische Rechnungen feststellen kann. Wir unterdrücken aber den Beweis dafür, da das Vorzeichen von P für das folgende belanglos ist.

Wir nehmen nun an, daß Gleichung (3) durch Quadratwurzelziehen auflösbar ist. Sie hat zwei reelle und sechs imaginäre Wurzeln mit den Näherungswerten (bis zur siebenten Dezimalstelle):

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}9144892, \qquad x_2 = -2{,}0615005, \\ x_{3,4} &= 1{,}2502564 \pm \text{i.}\ 0{,}2251771, \\ x_{5,6} &= -0{,}1642399 \pm \text{i.}\ 0{,}4216598, \\ x_{7,8} &= -1{,}5125108 \pm \text{i.}\ 0{,}3268478. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1 lassen sich diese Wurzeln derart in vier Paare

$$(7) \qquad (x_a, x_b),\ (x_c, x_d),\ (x_e, x_f),\ (x_g, x_h)$$

einteilen, daß die Summen

$$x_a + x_b,\ x_c + x_d,\ x_e + x_f,\ x_g + x_h$$

einer Gleichung 4. Grades genügen, deren Koeffizienten dem reellen Körper $k(\sqrt{17})$ angehören. Wir sind also darauf geführt, alle möglichen Einteilungen der Wurzeln x_k in vier Paare

$$(8) \qquad (x_m, x_n),\ (x_p, x_q),\ (x_r, x_s),\ (x_t, x_u)$$

von der Beschaffenheit zu bestimmen, daß die Summen

$$x_m + x_n,\ x_p + x_q,\ x_r + x_s,\ x_t + x_u$$

einer Gleichung 4. Grades *mit reellen Koeffizienten* genügen. Man sieht leicht ein, daß bei obiger Numerierung der Wurzeln eine beliebige Lösung (8) der Aufgabe folgenden (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen genügen muß: 1. die reellen Wurzeln x_1 und x_2 gehören zu einem und demselben Paare; 2. von den übrigen drei Paaren gibt es mindestens eins, das aus zwei konjugierten komplexen Wurzeln besteht. Nach dieser Be-

merkung läßt unsere Aufgabe nur die nachstehenden sieben Lösungen zu (wenn man von der Reihenfolge absieht):

$$\begin{array}{llll}
(x_1, x_2) & (x_3, x_4) & (x_5, x_6) & (x_7, x_8);\\
(x_1, x_2) & (x_3, x_4) & (x_5, x_7) & (x_6, x_8);\\
(x_1, x_2) & (x_3, x_4) & (x_5, x_8) & (x_6, x_7);\\
(x_1, x_2) & (x_5, x_6) & (x_3, x_7) & (x_4, x_8);\\
(x_1, x_2) & (x_5, x_6) & (x_3, x_8) & (x_4, x_7);\\
(x_1, x_2) & (x_7, x_8) & (x_3, x_5) & (x_4, x_6);\\
(x_1, x_2) & (x_7, x_8) & (x_3, x_6) & (x_4, x_5).
\end{array}$$

Die vier Wurzelpaare (7) sind also unter diesen sieben Lösungen zu suchen. Infolgedessen muß das Produkt

$$\varrho = (x_a + x_b)(x_c + x_d)(x_e + x_f)(x_g + x_h)$$

einen der folgenden sieben Werte haben:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varrho_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6)(x_7 + x_8) = -\,0{,}3652725,\\
\varrho_2 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_7)(x_6 + x_8) = -\,1{,}2394696,\\
\varrho_3 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_8)(x_6 + x_7) = -\,1{,}0368192,\\
\varrho_4 = (x_1 + x_2)(x_5 + x_6)(x_3 + x_7)(x_4 + x_8) = \;\;0{,}01803684,\\
\varrho_5 = (x_1 + x_2)(x_5 + x_6)(x_3 + x_8)(x_4 + x_7) = \;\;0{,}003820450,\\
\varrho_6 = (x_1 + x_2)(x_7 + x_8)(x_3 + x_5)(x_4 + x_6) = \;\;0{,}7105744,\\
\varrho_7 = (x_1 + x_2)(x_7 + x_8)(x_3 + x_6)(x_4 + x_5) = \;\;0{,}5416760.
\end{array}\right.$$

Andererseits sind die Wurzeln x_k ganze algebraische Zahlen, so daß sowohl ϱ als auch $\frac{P}{\varrho}$ ganze Zahlen des Körpers $k(\sqrt{17})$ darstellen; mit anderen Worten ϱ ist ein Teiler im Körper $k(\sqrt{17})$ der ganzen Zahl

$$P = (1 - \sqrt{17})(1 + \sqrt{17})^2 = -\,\varepsilon(\omega + 1)^5(\omega - 2)^7,$$

wo $\omega = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ und $\varepsilon = 4 + \sqrt{17}$ die Grundeinheit des Körpers ist. Nun gilt in diesem Körper der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in „Primfaktoren“ [3]). Da $\omega + 1$ und $\omega - 2$ „Primzahlen“ sind, so muß notwendig ϱ (als Teiler von P) die Form

$$(10)\qquad \varrho = \pm\,\varepsilon^k(\omega + 1)^m(\omega - 2)^n$$

haben, wo m und n nur die Werte

$$(11)\qquad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

[3]) Vgl. z. B. J. Sommer, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig (1907), S. 355.

annehmen können. Unsere weitere Aufgabe besteht also im folgenden: zu verifizieren, ob eine Zahl von der Form (10) [mit den Nebenbedingungen (11)] mit einer der Zahlen (9) zusammenfällt. Zu diesem Zwecke

Tabelle

der ganzen Zahlen von der Form $\alpha = \varepsilon^k(\omega+1)^m(\omega-2)^n$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), welche zwischen 0,25 und 1,25 liegen.

m	n	k	α	m	n	k	α
0	0	0	1	3	0	−2	$\frac{-11+3\sqrt{17}}{2} = 0{,}6846584$
0	1	0	$\frac{\sqrt{17}-3}{2} = 0{,}5615528$	3	1	−2	$21-5\sqrt{17} = 0{,}3844719$
0	2	0	$\frac{13-3\sqrt{17}}{2} = 0{,}3153416$	3	2	—	[4]
0	3	—	[4]	3	3	−1	$-32+8\sqrt{17} = 0{,}9848450$
0	4	1	$\frac{-19+5\sqrt{17}}{2} = 0{,}8077641$	3	4	−1	$116-28\sqrt{17} = 0{,}5530425$
0	5	1	$\frac{71-17\sqrt{17}}{2} = 0{,}4536022$	3	5	−1	$-412+100\sqrt{17} = 0{,}3105626$
0	6	1	$\frac{-251+61\sqrt{17}}{2} = 0{,}2547216$	3	6	—	
0	7	2	$\frac{-109+27\sqrt{17}}{2} = 1{,}1619259$	3	7	0	$644-156\sqrt{17} = 0{,}7955224$
1	0	−1	$\frac{5-\sqrt{17}}{2} = 0{,}4384472$	4	0	−3	$\frac{-53+13\sqrt{17}}{2} = 0{,}3001866$
1	1	—		4	1	—	
1	2	0	$\sqrt{17}-3 = 1{,}1231056$	4	2	−2	$42-10\sqrt{17} = 0{,}7689437$
1	3	0	$13-3\sqrt{17} = 0{,}6306831$	4	3	−2	$-148+36\sqrt{17} = 0{,}4318025$
1	4	0	$-45+11\sqrt{17} = 0{,}3541619$	4	4	—	
1	5	—		4	5	−1	$8(29-7\sqrt{17}) = 1{,}1060850$
1	6	1	$71-17\sqrt{17} = 0{,}9072044$	4	6	−1	$8(-103+25\sqrt{17}) = 0{,}6211251$
1	7	1	$-251+61\sqrt{17} = 0{,}5094432$	4	7	−1	$8(367-89\sqrt{17}) = 0{,}3487946$
2	0	—		5	0	−3	$\frac{31-7\sqrt{17}}{2} = 1{,}0691303$
2	1	−1	$5-\sqrt{17} = 0{,}8768944$	5	1	−3	$-53+13\sqrt{17} = 0{,}6003731$
2	2	−1	$4\sqrt{17}-16 = 0{,}4924225$	5	2	−3	$190-46\sqrt{17} = 0{,}3371412$
2	3	−1	$58-14\sqrt{17} = 0{,}2765212$	5	3	—	
2	4	—		5	4	−2	$8(9\sqrt{17}-37) = 0{,}8636050$
2	5	0	$-90+22\sqrt{17} = 0{,}7083238$	5	5	−2	$32(33-8\sqrt{17}) = 0{,}4849598$
2	6	0	$322-78\sqrt{17} = 0{,}3977612$	5	6	−2	$16(-235+57\sqrt{17}) = 0{,}2723305$
2	7	—		5	7	−1	$16(-103+25\sqrt{17}) = 1{,}2422502$

[4]) Die Striche bedeuten, daß den gegenüberliegenden Werten von m und n keine ganzen Zahlen von der Gestalt $\alpha = \varepsilon^k(\omega+1)^m(\omega-2)^n$ entsprechen, die zwischen 0,25 und 1,25 liegen.

machen wir von der evidenten Tatsache Gebrauch: ist α eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt{17})$, so kann ein Intervall (a, b), wo a und b den Ungleichungen $0 < a < b < a(4 + \sqrt{17})$ genügen, höchstens eine zu α assoziierte ganze Zahl enthalten. Ich wähle $a = 0{,}25$, $b = 1{,}25$; dann gehören die Zahlen

$$(12) \quad -\varrho_1, -\varrho_2, -\varrho_3, \varepsilon^2\varrho_4 = 1{,}1901580, \varepsilon^2\varrho_5 = 0{,}2520918, \varrho_6, \varrho_7$$

dem Intervall (a, b) an und die Aufgabe reduziert sich darauf, alle ganzen Zahlen von der Form (10) mit den Nebenbedingungen (11), welche in diesem Intervall liegen [5]), mit den sieben Zahlen (12) zu vergleichen. Aus der vorstehenden Tabelle ist ersichtlich, daß alle diese Zahlen sich schon in den ersten drei Dezimalstellen von den Zahlen (12) unterscheiden. Damit ist die Unzulässigkeit unserer Annahme, also die Richtigkeit des folgenden Satzes bewiesen:

Satz II. *Bedeuten ψ' und ψ die Zentriwinkel eines Kreisbogenzweiecks, so ist dasselbe nicht quadrierbar, wenn $\psi' : \psi = 17$ ist.*

[5]) Deren Anzahl ist höchstens $6 \cdot 8 = 48$.

(Eingegangen am 26. April 1928.)

Generalized form of Böhmer's Theorem for an Elliptically Curled Non-Analytic Oval[1]).

By

S. Mukhopadhyaya in Calcutta.

1.

Definition (i). A *convex oval* V has the fundamental property that any n distinct points on it determine a unique convex n-gon of which they are the vertices and the order of the vertices of the n-gon is the order of the points on V.

There is a *positive* order on V and a *negative* order which is its reverse. If P_1, P_2, P_3 be in positive order on V, then P_3 lies on the right of the line $P_1 P_2$. If P_1, P_2, P_3 be in positive order, we shall simply say they are *in order*.

The convex *non-analytic* oval discussed in this paper is of the class *elementary*. It consists of a closed continuous curve having a positive sense along it determined by the positive order of the points upon it. There is a *unique tangent* at each point P and a positive sense along the tangent such that every other point of the oval lies always on the right of the tangent. The tangent turns *continuously* on the right as one proceeds in the positive sense along the oval. Such an oval is obviously *rectifiable*.

Any point of the plane which lies to the right of every tangent and is not a point of the oval itself is an *interior* point of the oval. Any

[1]) P. Böhmer in an elegant paper, published in the Math. Annalen 60 (1905), pp. 256–263, was the first to prove that for an *analytic oval*, in which the osculating conic at each point is an ellipse, the conic through any five points is also an ellipse. The methods employed by him are by themselves quite interesting, specially the use he makes of the *curvature form*.

straight line through an interior point of the oval meets the oval at two points[2]).

The only other lines, besides straight, which will be discussed in this paper, in connection with their intersections with the oval are *conics*.

2.

The oval will not be postulated to possess a *definite* circle of curvature at any given point.

If a given conic S meets the oval V at P, it will be supposed to meet V at a *definite one-point* at P, provided it crossess V at P but does not touch, and at a definite two-point at P if it touches V at P but does not cross. In the latter case there is either an internal contact (under-contact) or an external contact (over-contact) of S with V at P.

If S touches V at P as well as crosses, then we will say that three points at V are *associated* by S at P. Two of these are definite points of V and the third we will say is a *possible* point of V. The two *definite* points of V at P associated with the third *possible* point of P at V will determine a *possible circle of curvature* of V at P. This possible circle of curvature of V at P agrees with the circle of curvature of the given conic S at P. Two conics S and S', each of which has cross-contact with V at P may have different curvatures at P.

Definition (ii). By a *definite five-pointic conic* of V will be understood a conic which passes through five definite points of V.

3.

A point P on V may be determined by its arcual distance from a fixed point on V, measured positively in the positive sense along V.

Definition (iii). A point $P(s)$ on V will be called *elliptic* if a finite neighbourhood $(s-d,\ s+d)$ of $P(s)$ exists such that every definite five-pointic conic S of this neighbourhood is an ellipse.

Definition (iv). An elementary convex oval V will be called *elliptically curled* if every point P of V is elliptic in the sense above defined.

Böhmer's Theorem can now be stated for the above oval as:

(A) Every definite five-pointic conic of an elliptically curled oval is an ellipse.

A more general form of the above theorem is:

---

[2]) Vide-Genesis of an elementary arc by S. Mukhopadhyaya, Bull. Cal. Math. Soc. 18 (1926), pp. 153–158.

(B) If every *hexadic point* of an elementary convex oval be elliptic then every definite five-pointic conic of V is an ellipse.

The definition of a hexadic point will be given later. See under Cor. ii, Lemma VI.

It will appear from our investigations that every convex oval possesses some hexadic points. If every point on V is elliptic, then the hexadic points must necessarily be elliptic and Böhmer's Theorem (A) follows at once from the more general form (B).

We will proceed to establish Theorem (B). For this purpose it will be necessary to establish a number of useful *Lemmas.*

4.

Definition (v). A range R_n of $n\,(n>3)$ distinct points $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ on an ellipse, parabola or single branch of a hyperbola, will be said to be in order, if they are the successive vertices of a convex n-gon. The order will be positive if P_3 lie on the right of $P_1 P_2$. A range in positive order on a conic will be simply called a range in order on the conic.

If P_1, P_2, P_3 be three points on a branch S of a hyperbola and Ω, Ω' be the two points at infinity on S and if $\Omega, P_1, P_2, P_3, \Omega'$ be in order, then $P_3, \Omega', \Omega, P_1$ are also in order, so that each of the points Ω and Ω' lies between P_3 and P_1, whereas P_2 lies between P_1 and P_3.

If $\Omega, P_1, P_2, P_3, \Omega'$ be in order on a branch S of a hyperbola and P_4 lie on the other branch S_0 then we will say that P_4 lies between P_3 and P_1 on (S, S_0). The branch S_0 will be called the *obverse* of S. In this case $P_3, \Omega' P_4, \Omega, P_1$ are in order on (S, S_0), as also P_1, P_2, P_3, P_4.

It should be noted that although we say that the points P_1, P_2, P_3, P_4 are in order on (S, S_0), they do not form the vertices of a convex polygon. In fact P_2 is an interior point of the triangle $P_1 P_3 P_4$.

If $\Omega, P_1, P_2, \Omega'$ be in positive order on a hyperbolic branch S and $\Omega', P_3, P_4, \Omega$ be in negative order on S_0, Ω and Ω' being the points at infinity on S_0 which correspond to Ω and Ω' on S, respectively, then P_1, P_2, P_3, P_4 will be defined to be in order on (S, S_0). In this case P_1, P_2, P_3, P_4 are not *successive* vertices of a convex polygon. If P_1, P_2, P_3, P_4 be in positive order on (S, S_0), they are in negative order on (S_0, S).

It will at once appear that the above four points P_1, P_2, P_3, P_4 which are in order on (S, S_0) cannot be in order on a convex oval, ellipse, parabola or single branch of a hyperbola.

Lemma I. *If P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 be any five intersections of a hyperbola with a convex oval V, then they must lie on the same branch of the hyperbola.*

If not, at least three P_1, P_2, P_3 will lie on one branch S and at least one P_4 on the obverse branch S_0.

First suppose P_1, P_2, P_3 are distinct and are in order on S, with S_0 between P_3 and P_1. Then P_2 is an interior point of the triangle $P_1 P_3 P_4$ and consequently P_1, P_2, P_3, P_4 cannot lie on a convex polygon.

If P_1 and P_2 form a two-point P on V then S and V will have a common tangent t at P. P_3 and P_4 as belonging to (S, S_0) will lie on opposite sides of t and as belonging to V will lie on the same side of t, which is impossible.

If P_1, P_2, P_3 form a three-point P on V then S crosses V at P and consequently meets V again at some point P' different from P. The argument of the last case will hold again.

It should be borne in mind that a conic can meet V at P either in a one-point or a two-point or at most a three-point and that the total number of points thus counted at which an ellipse, parabola or single branch of a hyperbola can intersect V is always *even.*

Lemma II. *If* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ $(n \geqq 5)$ *are any n distinct intersections of a conic S with a convex oval V, and if* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ *are in order on V they are also in order on S.*

If S be a hyperbola all the points lie on the same branch of the hyperbola, by Lemma I. The rest follows from definitions (i) and (v).

Corollary (i). *These n points determine a unique positive sense on S as well as on V.*

If Q be a point of S and T of V between two of the intersections P_r and P_s such that P_r, Q, P_s and P_r, T, P_s are in positive order on S and V, respectively, then evidently Q and T will fall on the same side (left) of $P_r P_s$.

If S be a hyperbolic branch and the obverse S_0 of S lie between P_r and P_s and if Q be taken on S_0 then Q will be *supposed* to lie on the left of $P_r P_s$ although it actually lies on the right. If $S(P_r P_s)$ denote the part of S constituted by all points Q and $V(P_r P_s)$ denote the part of V constituted by all points T and if $S(P_r P_s)$ and $V(P_r P_s)$ have no point common between P_r and P_s, then $S(P_r P_s)$ will lie entirely over or entirely under $V(P_r P_s)$. If S be a hyperbolic branch and if S_0 lie between P_r and P_s, then $S(P_r P_s)$ will *include* S_0.

Corollary (ii). If P_1, P_2, P_3, P_4 are four distinct intersections of S and S', each of which is an ellipse, parabola or a single branch of a hyperbola then P_1, P_2, P_3, P_4, form vertices of a convex polygon and if they are in order on S, they are also in order on S'. Corresponding to the positive sense along S there is a unique positive sense along S'.

$S(P_1P_2)$, $S(P_2P_3)$, $S(P_3P_4)$, $S(P_4P_1)$ will lie alternately under and over or over and under $S'(P_1P_2)$, $S'(P_2P_3)$, $S'(P_3P_4)$, $S'(P_4P_1)$, respectively.

Lemma III. *If a hyperbolic branch S intersect a conic X at four points O_1, O_2, O_3, O_4, which are in order on both, and if S_0, the obverse of S lie between O_4 and O_1, and X pass over S between O_4 and O_1, then X must be a hyperbola with one branch S' containing O_1, O_2, O_3, O_4 and the other branch S_0' falling between O_4 and O_1. Further, the eccentricity of X will be greater than that of S.*

First suppose O_1, O_2, O_3, O_4 are all distinct. Since they are in order on S they are the successive vertices of a convex polygon and consequently cannot lie on two different branches of a hyperbola (Sec. 4). As the obverse of S lies between O_4 and O_1 and X passes over S between O_4 and O_1, X must be a hyperbola with one branch S' containing O_1, O_2, O_3, O_4 and the other branch S_0' falling between O_4 and O_1.

If now from the mid-point O of the chord P_4P_1 lines be drawn to W_1 and W_2 as also to W_1' and W_2' where W_1 and W_2 are points at infinity on S and W_1' and W_2' are points at infinity on S', then evidently the angle W_1OW_2 falls within the angle $W_1'OW_2'$ and consequently the eccentricity of S' is greater than that of S, as the eccentricity increases with the asymptotic angle.

The cases where all the points O_1, O_2, O_3, O_4 are not distinct are treated similarly.

5.

Definition (vi). An ordered range $R_n \equiv P_1, P_2, \ldots, P_n$ of $n (\geqq 5)$ points of intersection of a definite conic S with the oval V, will be called an *associated* range of *index* n. The conic S will be called the *associative* of R.

Each point of R_n where S crosses V, but does not touch is to be counted as one point of R_n and each point where S over or under touches V is to be counted in general as two points of R_n, in determining the index n. Each point of R_n where S crosses V as well as touches V is to be counted in general as three points of R_n. Besides the n points thus counted there may be other points of intersection of S with V between P_1 and P_n both inclusive. Such points when they exist will be called *extra points* of R_n. Extra points may exist between two distinct points of R_n. They may also fall in with any of the n associated points of R_n. If S over or under touches V at any point P_r of R_n we *may* count P_r as only one point of R_n, the other point at P_r counting

among the extra points. Similarly if S cross-touches V at P_r we *may* count only one or two points at P_r as belonging to R_n, the rest counting among the extra points.

Definition (vii). An associated range R_n will be called *regular* if the range do not possess any extra points. A regular range R_n will be denoted by (R_n).

Definition (viii). If P_r and P_s be two distinct points of an associated range R_n, the part $S(P_r P_s)$ of S, the associative of R_n, measured from P_r to P_s, in the positive sense, will be called the *curl* of R_n from P_r to P_s $(s > r)$. If S be a hyperbolic branch and if the obverse S_0 of S lie between P_r and P_s then the curl $S(P_r P_s)$ will include S_0. The part of the conic S which is complementary to $S(P_r P_s)$ will be denoted by $S(P_s P_r)$.

Definition (ix). If P_r and P_{r+1} be two distinct consecutive elements of a regular range (R_n), then the curl $S(P_r P_{r+1})$ will be called a regular curl. It will fall either entirely outside or entirely inside V. In the former case it will be called an *over curl* and in the latter case an *under curl*. If P_r and P_{r+1} coincide the over curl reduces to an *under point* and the under curl to an *over point*. If P_r, P_{r+1}, P_{r+2} coincide in an associated three-point, an over point and an under point coincide. The resulting point may be called an *over-under* point or an *under-over* point according as it is the limit of an under followed by an over curl or of an over followed by an under curl.

Definition (x). The arc $V(P_r P_{r+1})$ of the oval V between two successive points P_r and P_{r+1} of the range (R_n) will be called the r-th *lap* of (R_n). The largest of the $n-1$ laps $1_n', 1_n'', 1_n''', \ldots, 1_n^{n-1}$ of (R_n) will be called the maximum lap of (R_n), and denoted by 1_n. The sum of the $n-1$ laps of (R_n) will be called the full lap of (R_n), or simply the lap of (R_n).

Definition (xi). If (R_n) be of an even index n, the extreme curls, when they are both finite, will be both over or both under. In the former case (R_n) will be called an *under-range* and in the latter case an *over-range*. In the former case a point of either extreme laps will be an interior point of S, the associative of (R_n), and in the latter case a point of either extreme laps will be an exterior point of S. If there be a two-point of (R_n) at either extremity it will be an over-point for an over-range and an under-point for an under-range. If there be a three-point of (R_n) at lower extremity it will be an over-under point for an over-range and an under-over point for an under-range. An over-range will be said to belong to a *first category* and under-range to a *second category*.

6.

Definition (xii). A regular range of index 6 will be called an *hexadic-range* or simply an *hexad*. An hexad is either an over-hexad or an under-hexad. An hexad will be denoted simply by R.

An element of an hexad may be either a one-point or a two-point or a three-point. If an hexad consist of two three-points the associative of the hexad is not fully determined by them as each three-point contains only two definite points. A fifth definite point must therefore exist elsewhere to define the associative.

Definition (xiii). If $R \equiv P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ be an hexad then the mid-points $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$ of the five successive laps of R will be called the *mean-points* of R or simply the *means* of R. The conic S' through the five means of R will be called the *mean-associative* of R.

It may be observed that the five means of R are *in every case* five definite points of V and consequently suffice to define S'. If R do not contain a three-point all the five means are distinct. If R contain a three-point two of the means coincide forming a definite two-point on V.

Lemma IV. *The associative S of a hexad R meets the mean associative S' of R at four points O_1, O_2, O_3, O_4, in order on S and S', lying on S between P_1 and P_6, both inclusive, and on S' between P_1' and P_5', both inclusive.*

First suppose R consists of six one-points $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Then P_1' and P_2' will lie on opposite sides of S and consequently the curl $S'(P_1'P_2')$ must meet S at some point O_1 of S' between P_1' and P_2'. Similarly $S'(P_2'P_3')$, $S'(P_3'P_4')$ and $S'(P_4'P_5')$ will meet S at O_2, O_3 and O_4, respectively, such that O_2 lies between P_2' and P_3', O_3 lies between P_3' and P_4' and O_4 lies between P_4' and P_5'. Thus O_1, O_2, O_3, O_4 are in order on S' between P_1' and P_5'. Consequently they are also in order on S (Lemma II, Cor. ii).

Again if $S'(P_1'P_2')$ be a regular curl, it will be on the same side of V as one of the regular curls $S(P_1P_2)$ and $S(P_2P_3)$ and therefore will cross $S(P_1'P_2')$ at O_1, either between P_1 and P_2 or between P_2 and P_3. If $S'(P_1'P_2')$ be not regular, it will split up into two or more regular curls one of which will cross $S(P_1P_3)$ at O_1 between P_1 and P_3. Similarly O_4 will lie on S between P_4 and P_6.

If the hexad R has a two-point at P on V, S' will pass through P. One of the points O will therefore be at P. If the hexad R has a three-point at P on V, S' will touch V at P. Two of the points O will therefore be at P. If P_1 be a two-point or a three-point $O_1\ P_1, P_1'$ coincide and if P_6 be a two-point or a three-point O_4, P_6, P_5' coincide.

Definition (xiv). An hexad R' each of whose extreme elements fall between the extreme elements P_1 and P_6 of R, or coincide with either, and whose associative S' is the mean associative of R, will be called an *inner mean derived* of R.

Lemma V. *To every hexad of a given category there exists at least one inner mean derived of the same category.*

Suppose R is an over hexad with six distinct elements $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Then $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$, the five means of R, are all distinct and P_1' and P_5' lie outside S. There exists four intersections O_1, O_2, O_3, O_4 of S' with S which lie between P_1' and P_5' on S' and between P_1 and P_6 on S (Lemma IV). Consequently $S'(P_5'P_1')$, the complementary of $S'(P_1'P_5')$, will fall entirely outside S, and S' will have no point on $S(P_6P_1)$.

The regular range (R_n') of intersections of S' with V, between P_1 and P_6, must be of an even index, as it consists of all the intersections of S' with the closed figure consisting of $V(P_1P_6)$ and $S(P_6P_1)$. Consequently (R_n') is either an over range or an under range.

(R_n') must be an over range, for if P_n' be the upper extreme element of (R_n') then it must obviously lie in $V(P_5P_6)$. If (R_n') were an under range then $S'(P_n'P_1')$ would enter V at P_n' and as it could not meet $V(P_5P_6)$ again, would cross the curl $S(P_5P_6)$ at some point, which is impossible, as $S'(P_n'P_1')$ being a part of $S'(P_5'P_1')$ lies entirely outside S.

If R be an under hexad we can similarly shew that (R_n) will be an under range.

The cases where R has one or more two-points or three-points do not present any special difficulties and can be treated in a similar way.

It is of interest to note that although in general a two-point of R gives a one-point of (R_n') and a three-point of R gives a two-point of (R_n') these one-points and two-points may become two-points or three-points by association in (R_n').

If in (R_n') the index is 6 then (R_n') is itself a hexad of the same category as R. If the index be 8 then (R_n') gives two hexads $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', P_6'$ and $P_3', P_4', P_5', P_6', P_7', P_8'$ of the same category as R and one hexad $P_2', P_3', P_4', P_5', P_6'$, of the opposite category.

It may be observed that in (R_n') the first six elements always constitute an hexad of the same category as R. This hexad may be called the *leader* of (R_n') or the leading inner mean derivate of R.

Definition (xv). If $R, R', R'', \ldots, R^{(n)}, \ldots$ be a sequence of hexads such that each hexad after R is an inner mean derivate of the one which immediately precedes it, then $R, R', R'', \ldots, R^{(n)}, \ldots$ will be called an *inner mean derived sequence of hexads.*

Lemma VI. *If* $1,\ 1',\ 1'', \ldots, 1^{(n)} \ldots$ *be the maximum laps of an inner mean derived sequence of hexads* $R, R', R'', \ldots, R^{(n)}, \ldots$ *respectively, then* $1,\ 1',\ 1'', \ldots, 1^{(n)}, \ldots$ *will form a monotone sequence of zero limit.*

It is easily seen that if $1_r^{(n)}$ be any lap of $R^{(n)}$ it must lie either (i) in a certain semi-lap $\frac{1}{2}1_s^{(n-1)}$ of $R^{(n-1)}$ or (ii) in two consecutive semi-laps $\frac{1}{2}1_s^{(n-1)}$ and $\frac{1}{2}1_{s+1}^{(n-1)}$ of $R^{(n-1)}$.

In the first case we have $1_r^{(n)} \leqq \frac{1}{2}1_s^{(n-1)}$.

In the second case we have $1_r^{(n)} \leqq \frac{1}{2}(1_s^{(n-1)} + 1_{s+1}^{(n-1)})$.

Again as the six points of $R^{(n)}$ cannot all lie in different laps of $R^{(n-1)}$, of which the number is only five, there must exist at least one lap of $R^{(n-1)}$ for which case (i) holds.

We have from case (i) $1^{(n)} \leqq \frac{1}{2}1_r^{(n-1)} \leqq \frac{1}{2}1^{(n-1)}$ and from case (ii) $1^{(n)} \leqq \frac{1}{2}(1_s^{(n-1)} + 1_{s+1}^{(n-1)}) \leqq 1^{(n-1)}$.

In either case $1^{(n)} \leqq 1^{(n-1)}$ and consequently $[1^{(n)}]$ is a monotone decreasing sequence. It must therefore have a limit L, which is either zero or finite. We shall shew that L cannot be finite.

If L be finite then a value m of n exists such that $1^{(n)} - L < \varepsilon$, where ε is an arbitrary given length, for all values of $n \geqq m$. We may, take $\varepsilon = L/100$.

Consequently $1^{(m)} - L$, $1^{(m+1)} - L$, $1^{(m+2)} - L$, $1^{(m+3)} - L$, $1^{(m+4)} - L$, $1^{(m+5)} - L$, are each less than ε.

We have either $1^{(m+5)} \leqq \frac{1}{2}1_r^{(m+4)}$, case (i), or $1^{(m+5)} \leqq \frac{1}{2}(1_r^{(m+4)} + 1_{r+1}^{(m+4)})$, case (ii).

In the former case put $1^{(m+5)} = L + \varepsilon_5$ and $1_r^{(m+4)} = 1^{(m+4)} - \varepsilon_4^{(r)} = L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)}$, where $0 \leqq \varepsilon_5 \leqq \varepsilon_4 < \varepsilon$. Therefore $L + \varepsilon_5 \leqq \frac{1}{2}(L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)})$ or $L + 2\varepsilon_5 - \varepsilon_4^{(r)} \leqq \varepsilon_4$ or $L < \varepsilon$, which is absurd.

In the latter case put $1^{(m+5)} = L + \varepsilon_5$, $1_r^{(m+4)} = 1^{(m+4)} - \varepsilon_4^{(r)} = L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)}$ and $1_{r+1}^{(m+4)} = 1^{(m+4)} - \varepsilon_4^{(r+1)} = L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r+1)}$ where $0 \leqq \varepsilon_5 \leqq \varepsilon_4 \leqq \varepsilon$, $0 \leqq \varepsilon_4^{(r)}$ and $0 \leqq \varepsilon_4^{(r+1)}$.

Therefore $L + \varepsilon_5 \leqq \frac{1}{2}(2L + 2\varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)} - \varepsilon_4^{(r+1)})$, or $\varepsilon_4^{(r)} + \varepsilon_4^{(r+1)} \leqq 2(\varepsilon_4 - \varepsilon_5) \leqq 2\varepsilon$. Therefore $\varepsilon_4^{(r)}$ and $\varepsilon_4^{(r+1)}$ are each less than 2ε.

Again we have either $1_r^{(m+4)} \leqq \frac{1}{2}1_s^{(m+3)}$, case (i), or $1_r^{(m+4)} \leqq \frac{1}{2}(1_s^{(m+3)} + 1_{s+1}^{(m+3)})$, case (ii).

In the former case put $1_r^{(m+4)} = L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)}$ and $1_s^{(m+3)} = 1^{(m+3)} - \varepsilon_3^{(s)} = L + \varepsilon_3 - \varepsilon_3^{(s)}$ where $0 \leqq \varepsilon_5 \leqq \varepsilon_4 \leqq \varepsilon_3 < \varepsilon$ and $0 \leqq \varepsilon_3^{(s)}$.

We obtain $L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)} \leqq \frac{1}{2}(L + \varepsilon_3 - \varepsilon_3^{(s)})$ or $L + \varepsilon_3^{(s)} \leqq \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4^{(r)} - 2\varepsilon_4 \leqq (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) - \varepsilon_4 + 2\varepsilon_4^{(r)}$ or $L < 5\varepsilon$, which is absurd.

In the latter case put $1_r^{(m+4)} = L + \varepsilon_4 - \varepsilon_4^{(r)}$, $1_s^{(m+3)} = L + \varepsilon_3 - \varepsilon_3^{(s)}$, $1_{s+1}^{(m+3)} = L + \varepsilon_3 - \varepsilon_3^{(s+1)}$ where $0 \leqq \varepsilon_4 \leqq \varepsilon_3 < \varepsilon$ and $\varepsilon_3^{(s)}$ and $\varepsilon_3^{(s+1)}$ are each $\geqq 0$.

Whence we obtain $\varepsilon_3^{(s)} + \varepsilon_3^{(s+1)} \leqq 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) + 2\varepsilon_4^{(r)} < 6\varepsilon$.

Therefore $\varepsilon_3^{(s)}$ and $\varepsilon_3^{(s+1)}$ are each less than 6ε.

Similarly we have either $1_{r+1}^{(m+4)} \leqq \frac{1}{2}(1_t^{(m+3)})$, case (i),

or $1_{r+1}^{(m+4)} \leqq \frac{1}{2}(1_t^{(m+3)} + 1_{t+1}^{(m+3)})$, case (ii).

The former leads to absurdity and the latter gives $\varepsilon_3^{(t)}$ and $\varepsilon_3^{(t+1)}$ each less than 6ε,

where $l_t^{(m+3)} = l^{(m+3)} - \varepsilon_3^{(t)}$ and $l_{t+1}^{(m+3)} = l^{(m+3)} - \varepsilon_3^{(t+1)}$.

Now $1_s^{(m+3)}$ and $1_{s+1}^{(m+3)}$ cannot be identical with $1_t^{(m+3)}$ and $1_{t+1}^{(m+3)}$, respectively, for a little consideration shews that from two consecutive laps of $R^{(m+3)}$ we can derive at most one lap of $R^{(m+4)}$ which falls under case (ii).

Again $1_s^{(m+3)}$, $1_{s+1}^{(m+3)}$, $1_t^{(m+3)}$, $1_{t+1}^{(m+3)}$ cannot be all different. A little consideration shews that two consecutive laps of $R^{(m+4)}$ can at most be derived from three consecutive laps of $R^{(m+3)}$ if either laps of $R^{(m+4)}$ fall under case (ii).

We conclude therefore that $1_{s+1}^{(m+3)}$ is identical with $1_t^{(m+3)}$. We have consequently three consecutive laps of $R^{(m+3)}$, *viz.*, $1_s^{(m+3)}$, $1_{s+1}^{(m+3)}$, $1_{s+2}^{(m+3)}$ from which the two consecutive laps $1_r^{(m+4)}$ and $1_{r+1}^{(m+4)}$ of $R^{(m+4)}$ are derived. We have at the same time $\varepsilon_3^{(s)}$, $\varepsilon_3^{(s+1)}$, $\varepsilon_3^{(s+2)}$ each less than 6ε.

By continuing the same reasoning we get in $R^{(m+2)}$ four consecutive laps $1_u^{(m+2)}$, $1_{u+1}^{(m+2)}$, $1_{u+2}^{(m+2)}$, $1_{u+3}^{(m+2)}$ such that $\varepsilon_2^{(u)}$, $\varepsilon_2^{(u+1)}$, $\varepsilon_2^{(u+2)}$, $\varepsilon_2^{(u+3)}$, $\varepsilon_2^{(u+3)}$ are each less than 14ε, and in $R^{(m+1)}$ five consecutive laps $1_v^{(m+1)}$, $1_{v+1}^{(m+1)}$, $1_{v+2}^{(m+1)}$, $1_{v+3}^{(m+1)}$, $1_{v+4}^{(m+1)}$ such that $\varepsilon_2^{(v)}$, $\varepsilon_2^{(v+1)}$, $\varepsilon_2^{(v+2)}$, $\varepsilon_2^{(v+3)}$, $\varepsilon_1^{(v+4)}$ are each less than 30ε. But as $R^{(m+1)}$ possesses only five laps we have $v = 1$.

Now $R^{(m+1)}$ is an inner mean derived of $R^{(m)}$ and therefore must possess at least one lap for which case (i) holds. This leads to $L < 61\varepsilon$, which is absurd.

Hence we conclude that the sequence $[1^{(n)}]$ has zero limit.

Corollary i. *If $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(n)}$ be the entire laps of $R, R', R'', \ldots R^{(n)}$ respectively, then the limit of the sequence $[\lambda^{(n)}]$ is zero.*

Corollary ii. *There is a unique point common to all the laps of the sequence $[\lambda^{(n)}]$.*

This unique point will be called an *hexadic point* of V, defined by the inner mean derived sequence of hexads, $R, R', R'', \ldots$.

Corollary iii. *Every elementary oval possesses some hexadic points.*

Take any five distinct points of V. The associative S of these five points will meet V in at least another point. Consequently there exists at least six hexads on V of which the associative is S. Any of these six hexads with a sequence of inner mean derivates defines an hexadic point. Suppose K is an hexadic point thus defined. Now every five-pointic conic of V cannot pass through K for then V would be a conic. Hence an hexadic range exists on V whose associative does not pass through K, and whose laps do not contain K. A sequence of mean derivates of this hexad will define another hexadic point.

7.

We will now proceed to the proof of Böhmer's Theorem (B):

If every hexadic point of an elementary convex oval be elliptic, the conic through any five definite points of V will be an ellipse.

If possible, suppose a definite five-pointic conic of V exists which is a hyperbola (S, S_0). Suppose $(R_n) = P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ denotes the complete regular range of intersections of (S, S_0) with V, where initial point P_1 may be any one of the intersections. The index of the range (R_n) must be an even number $\geqq 6$, and all the points of the range will lie on the same branch S of the hyperbola (Lemma I).

The points at infinity Ω and Ω' on S arc outside V. Suppose Ω, P_1, Ω' on S are in order and there is no point of (R_n) between Ω and P_1. Then evidently there will be no point of (R_n) between P_n and Ω'. The range (R_n) will therefore be an over range.

Consider the leader $R = P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ of (R_n) which will be over-hexadic and a sequence $R', R'', \ldots, R^{(n)}, \ldots$ of successive inner mean derivates of R of the same category as R. Suppose $S', S'', \ldots, S^{(n)}, \ldots$ are the associatives of $R', R'', \ldots, R^{(n)}, \ldots$ respectively.

S and S' have four intersections O_1, O_2, O_3, O_4 which lie in order on S between P_1 and P_6 and on S' between P_1' and P_5' (Lemma IV), and P_1' and P_5' are outside S. Consequently the range O_1, O_2, O_3, O_4 made by S' on S is an over-range, that is, S' goes over S between O_4 and O_1. Hence S' is a hyperbolic branch which has its obverse between P_1' and P_5' and has its eccentricity greater than that of S (Lemma III).

Suppose $P(s)$ is the hexadic point defined by the sequence $R, R', R'', \ldots$ Then for each neighbourhood $(s-\delta, s+\delta)$ of $P(s)$ there exists a value m of n such that $R^{(n)}$ lies in this neighbourhood, for $n \geqq m$.

But every hexadic point of the oval is elliptic and consequently a δ exists such that the conic through every five definite points of the neigh-

bourhood $(s-\delta, s+\delta)$ of $P(s)$ is an ellipse, which is contradicted by our conclusion that hexads exist in this neighbourhood for which the associative conic is a hyperbola. Thus Böhmer's theorem (B) is completely proved.

It is worthy of note that although the associative $S^{(n)}$ of hexad $R^{(n)}$ consisting of two three-points may not be considered as passing through five definite points in the lap of $R^{(n)}$, the mean associative $S^{(n+1)}$ of $R^{(n)}$ always pass through five definite points in this lap. If the regular range in which $S^{(n+1)}$ meets V in the lap of $R^{(n)}$ be denoted by $(R^{(n+1)})$, then $(R^{(n+1)})$ will consist of no less than six points, at least five of which are always definite. The hexadic point $P(s)$ which has been defined by the sequence $[R^{(n)}]$ may therefore be equally well defined by the sequence $[(R^{(n+1)})]$.

(Eingegangen am 17. August 1928.)

Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen[1]).

Von

Frank Löbell in Cannstatt.

Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Friedrich Schur
zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum
in Verehrung gewidmet.

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen möchten einen kleinen Beitrag zur Geometrie in den Clifford-Kleinschen Mannigfaltigkeiten zweier Dimensionen liefern, und zwar sollen sie den geodätischen Linien oder, wie wir kurz sagen werden, den „*Geraden*" in den Clifford-Kleinschen Flächen, die wir abkürzend als „*C-K-Flächen*" bezeichnen wollen, gewidmet sein. Dabei sollen aber von vornherein alle diejenigen C-K-Flächen ausgeschlossen werden, in denen sich der Verlauf der Geraden einigermaßen leicht überblicken läßt: das sind alle C-K-Flächen verschwindender und positiver Krümmung und unter den C-K-Flächen negativer Krümmung diejenigen, die keinen Binnenteil[2]) besitzen; es bleiben somit für die weitere Betrachtung gerade die

[1]) Hauptteil der am 13. Februar 1928 bei der Technischen Hochschule zu Stuttgart unter dem Titel „Die Geraden in den überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung mit positiver Charakteristik" eingereichten Habilitationsschrift des Verfassers.

[2]) Wegen der Erklärung dieses Begriffes muß verwiesen werden auf: Löbell, Die überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung, Dissertation Tübingen 1927 (weiterhin als „Diss." zitiert), S. 62 ff.

Das Literaturverzeichnis der Diss. bedarf der folgenden Ergänzung:

F. S. Woods, Forms of non-euclidean space, The Boston Colloquium, Lectures on Mathematics, New York 1905, p. 31—74.

J. L. Coolidge, The elements of non-euclidean geometry, Oxford 1909, p. 236—246.

(Fortsetzung der Fußnote [2]) auf nächster Seite.)

C-K-Flächen mit positiver Eulerscher Charakteristik übrig, mit Einschluß der Flächen mit unendlicher Charakteristik, insbesondere auch der Nicht-Killingschen Flächen[3]) mit positiver oder unendlicher Charakteristik.

Nach dem Druck der Diss. erschienen die folgenden, zur Theorie der C-K-Flächen in Beziehung stehenden Arbeiten:

P. Koebe, Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Acta math. 50 (1927), S. 27—157.

P. Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, I. Mitteilung, Sitz.-Ber. d. Preuß. Ak. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, Jahrgang 1927, S. 164—196.

J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta math. 50 (1927), S. 189—358.

F. Klein, Vorl. ü. nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 254ff.

Zusatz bei der Korrektur: Neuerdings erschienen noch die folgenden für unsern Gegenstand wichtigen Werke:

E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris 1928.

P. Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, II. u. III. Mitteilung, Sitz.-Ber. d. Preuß. Ak. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, Jahrgang 1928, S. 345—384 u. S. 385—442.

[3]) H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Annalen 95, S. 315f. — Die Diss. versucht unter Beschränkung auf die „Killingschen" C-K-Flächen (vgl. S. 8 und die zu S. 15f. gehörende Anm. [26]) auf S. 92f. der Diss.) u. a. zu zeigen, wie man alle diese Flächen, soweit ihr Krümmungsmaß negativ ist, aus zwei einfachen Arten von berandeten Flächenstücken fester negativer Krümmung aufbauen kann: aus endlichen Elementen (Doppelsechsecken) (Diss. S. 68ff. u. S. 74) und unendlichen Elementen (Außenteilen) (Diss. S. 66f. u. S. 75); nach Abtrennung der Außenteile bleibt der Binnenteil übrig. Zur Ergänzung sei auf folgendes hingewiesen: Die *Nicht-Killingschen C-K-Flächen endlicher Charakteristik* lassen sich alle aus endlichen und unendlichen Elementen zusammensetzen, die zum Teil Ausartungen der zur Herstellung der Killingschen C-K-Flächen dienenden Elemente sind; und zwar besteht die Ausartung darin, daß eine Randgerade eines solchen Elementes auf die Länge Null zusammenschrumpft, wobei sie notwendig in unendliche Entfernung rückt und zu einer „*uneigentlichen Punktierung*" — man könnte auch die freilich weniger gute Ausdrucksweise vereinbaren: zu einem „unerreichbaren singulären Punkt" — wird (unter Punktierung ist dabei ein isolierter Randpunkt verstanden). Läßt man diese Entartung am unendlichen Elemente vor sich gehen, so erhält man dadurch allein schon eine Nicht-Killingsche C-K-Fläche, nämlich diejenige, deren Deckbewegungen eine zyklische Gruppe von Drehungen um einen unendlich fernen Punkt bilden (diese Fläche erwähnt auch Koebe, Acta math. 50, S. 157, besonders). Beim endlichen Element gibt es drei Möglichkeiten der Ausartung: es kann entweder ein Rand ins Unendliche entweichen, oder es können zwei oder alle drei Ränder entarten; der entsprechende Vorgang bei dem der Konstruktion des Doppelsechsecks (Diss. S. 71f.) zu Grunde liegenden konvexen, rechtwinkligen Sechseck der hyperbolischen Ebene (Diss. S. 68ff.) ist der, daß eine seiner die Hälften der Doppelsechseckränder bildenden Seiten

Für die Erforschung der Eigenschaften der Geraden in diesen Flächen ist schon mannigfache Vorarbeit geleistet. Die Geometer, von denen bisher die C-K-Flächen untersucht worden sind, haben sich zwar nur wenig mit den Geraden in diesen Flächen beschäftigt; nur das Vorhandensein geschlossener Geraden wurde von F. Klein 1890 und von W. Killing 1891 hervorgehoben[4]).

---

ins Unendliche rückt, wobei ihre beiden Endpunkte in einen einzigen unendlich fernen Punkt zusammenfallen, oder daß dies mit zwei nicht benachbarten oder endlich mit drei nicht zusammenstoßenden seiner Seiten geschieht. In dem letzten Falle entsteht wieder, ohne daß weitere Elemente benötigt würden, eine Nicht-Killingsche C-K-Fläche (es ist die von Hopf, Math. Annalen 95, S. 315, als Beispiel angegebene). Eine *C-K-Fläche unendlicher Charakteristik* ist gewiß dann eine *Nicht-Killingsche* Fläche, wenn an ihrem Aufbau ausgeartete endliche Elemente beteiligt sind; doch ist dies nicht notwendig: eine solche Fläche kann auch dadurch eine Nicht-Killingsche werden, daß *die untere Grenze der Längen ihrer geschlossenen Geraden null* ist (vgl. z. B. die in Fig. 23 der Diss., S. 84, gezeichneten Flächen, auf denen man sich nur die Längen irgendeiner Teilfolge der Menge der punktiert dargestellten Rückkehrgeraden gegen null konvergierend zu denken braucht). Das Festhalten an der Bezeichnung „endliches Element" für die Entartung eines endlichen Elementes rechtfertigt sich damit, daß trotz des Heranreichens an mindestens einen unendlich fernen Punkt der Flächeninhalt eines solchen Elementes 2π bleibt (vgl. Diss. S. 84f.), während die Fläche des ausgearteten unendlichen Elementes unendlich groß ist. Daher möge auch die Benennung „Binnenteil" für den aus endlichen Elementen bestehenden Teil einer Nicht-Killingschen C-K-Fläche beibehalten werden, obwohl dieser sich gegen die uneigentlichen Punktierungen hin ins Unendliche erstreckt, wobei er aber, wenn die Charakteristik c endlich ist, da er in c endliche Elemente zerlegbar ist, den endlichen Flächeninhalt $2c\pi$ hat (wie der Binnenteil der Killingschen C-K-Flächen, s. Diss. S. 84f.). Die hier besprochenen, nach dem in der Diss. gegebenen Vorbild zu beweisenden Tatsachen beruhen auf den beiden auf S. 578 der vorliegenden Arbeit angeführten Sätzen über Rückkehrgeraden, wenn der erste von ihnen in dem in der Fußnote [21]) (S. 578) festgelegten Sinn verstanden wird. Die von H. Hopf herrührende Erweiterung des Begriffs der Clifford-Kleinschen Mannigfaltigkeiten gibt der Theorie erst ihre letzte Abrundung; dies manifestiert sich besonders schön in dem Lehrsatz, daß zu jeder topologisch gegebenen, triangulierbaren Fläche von beliebigem Zusammenhang, mit beliebig vielen Rändern und Punktierungen, mag sie orientierbar sein oder nicht, wenigstens eine homöomorphe C-K-Fläche existiert; alle C-K-Flächen mit m uneigentlichen Punktierungen bilden, wenn m und c endlich sind (wie die Killingschen C-K-Flächen, s. Diss. S. 83) eine von $3c$ reellen Parametern abhängige kontinuierliche Mannigfaltigkeit, falls man übereinkommt, daß das Verschwinden des die Länge einer äußersten Rückkehrgeraden (Diss. S. 76 und 77) angebenden Parameters bedeuten soll, daß diese Rückkehrgerade in eine Punktierung entartet ist, so daß also unter den $3c$ Parametern der Fläche von vornherein m den Wert null haben. — Wie die C-K-Flächen mit unendlicher Charakteristik aus endlichen und unendlichen Elementen aufzubauen sind, ist in der Diss. in § 34, S. 84, besonders durch den dort in Anm. [123]) (S. 98) gegebenen Hinweis auf v. Kerékjártó, angedeutet. Das dort Gesagte läßt sich sinngemäß auch auf die Nicht-Killingschen C-K-Flächen ohne endliche Charakteristik anwenden.

[4]) S. Diss. S. 96, Anm. 87.

Dagegen hat J. Hadamard[5]) 1898 die geodätischen Linien der singularitätenfreien Flächen überall negativen Krümmungsmaßes, die in den dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet sind und von ihm ihre Maßbestimmung übernehmen, studiert und dabei Eigenschaften an diesen Linien entdeckt, die im wesentlichen mit denen der Geraden in den C-K-Flächen positiver Charakteristik übereinstimmen. Es muß aber bemerkt werden, daß die Begriffe der von Hadamard behandelten und der hier zu betrachtenden Gebilde nicht in dem logischen Verhältnis der Subsumption stehen, weil nach einem bekannten Satze von Hilbert keine der von Hadamard untersuchten Flächen konstantes Krümmungsmaß haben kann; doch hat Hadamard später als Beispiele auch spezielle schlichtartige C-K-Flächen angegeben[6]). Neuerdings haben E. Artin und J. Nielsen die geodätischen Linien auf gewissen abstrakten Flächen fester negativer Krümmung nach einer Methode untersucht[7]), die auf der Verwendung der Gruppe der Deckbewegungen der Fläche in ihrer universellen Überlagerungsfläche beruht. Die von Artin betrachtete Fläche ist unbegrenzt, aber mit Singularitäten behaftet; er gelangt dadurch zu seinen weitgehenden Ergebnissen, daß er die Eigenschaften der Gruppe der Deckbewegungen seiner Fläche, die einfach die Modulgruppe ist, in ausgiebigerem Maße verwerten kann, als dies im allgemeinen Falle möglich ist. Die in neuester Zeit von J. Nielsen studierten Flächen sind sämtlich C-K-Flächen negativer Krümmung, jedoch sind sie spezieller Art, nämlich geschlossen, zweiseitig und durch besondere Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet. J. Nielsen hat seine Untersuchungen auf das Gebiet der topologischen Abbildungen ausgedehnt; diese sollen uns aber hier nicht beschäftigen. Die Arbeiten, die auf der von H. Poincaré inaugurierten Methode der Untersuchung der geodätischen Linien und der Bahnkurven mechanischer Systeme beruhen, werden wir nicht heranziehen, weil wir hier ganz andere Wege gehen werden.

Die im folgenden benutzte Methode stimmt nämlich im wesentlichen mit der von Artin und J. Nielsen verwendeten überein. Man kann sie kurz als die Methode der „Abwicklung“ bezeichnen; denn wir werden fortwährend die längentreue Abbildung der C-K-Flächen auf ihre zugehörige Urfläche[8]), die nach dem oben Gesagten hier immer die hyperbolische Ebene sein wird, zu Rate ziehen.

---

[5]) Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, Journal de mathématiques pures et appliquées, 5^{me} série, **4** (1898), p. 27–73. Weitere hierher gehörige Veröffentlichungen s. Diss., S. 89 u. S. 92, Anm. 14.

[6]) S. Diss. S. 92, Anm. 13.

[7]) S. Diss. S. 90 (Literaturverzeichnis). Vgl. auch die in Fußnote [2]) angegebene, später erschienene Abhandlung von J. Nielsen.

[8]) Vgl. Diss. S. 12f., 15, 17ff., 25.

I. Klassifikation der Geraden.

1. Geschlossene Geraden.

Die mehrfach zusammenhängenden C-K-Flächen negativer Krümmung unterscheiden sich dadurch von der einfach zusammenhängenden Urfläche negativer Krümmung, d. h. der hyperbolischen Ebene — die im folgenden immer mit $\mathfrak{E}^0$ bezeichnet werden soll —, daß es in ihnen *geschlossene Geraden* gibt; nur unter den Nicht-Killingschen C-K-Flächen gibt es eine einzige Fläche ohne geschlossene Geraden, nämlich die, deren Deckbewegungen aus den Wiederholungen einer Drehung um einen unendlich fernen Punkt bestehen.

Wir erinnern uns an das Kriterium der geschlossenen Geraden[9]):

Eine Gerade g in einer C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ ist dann und nur dann geschlossen, wenn es in der Gruppe der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$ eine Bewegung gibt, die eine Bildgerade[10]) *von g in $\mathfrak{E}^0$ in sich verschiebt.*

Im folgenden bedeute immer p das Geschlecht, n die Anzahl der uneigentlichen Ränder[11]) und m die Anzahl der uneigentlichen Punktierungen einer C-K-Fläche, so daß die Charakteristik bei zweiseitigen Flächen $c = m + n + 2p - 2$, bei einseitigen Flächen $c = m + n + p - 2$ ist.

A. Unter den C-K-Flächen negativer Krümmung, in denen es geschlossene Geraden gibt, spielen diejenigen mit der Charakteristik $c = 0$ eine ausgezeichnete Rolle; es sind dies:

Die zweiseitigen Flächen, die sich aus zwei unendlichen Elementen[12]) zusammensetzen; die Deckbewegungen dieser Flächen bilden eine zyklische Gruppe von Schiebungen. Demgemäß gibt es auf jeder von ihnen genau eine geschlossene Gerade, die keinen Doppelpunkt besitzt; ihre Länge ist gleich der Schiebungsgröße der erzeugenden Schiebung. Für diese Flächen ist $p = 0$, $n = 2$ und $m = 0$; sie haben also den Zusammenhang eines Kreisringes[13]).

Die einseitigen Flächen, die aus einem unendlichen Element bestehen; die Deckbewegungen dieser Flächen sind Paddelungen und Schiebungen und bilden ebenfalls eine zyklische Gruppe. Daher gibt es auch

---

[9]) Diss. S. 53 ff.

[10]) Unter einem Bild einer in $\mathfrak{E}$ gelegenen Figur $\mathcal{F}$ in $\mathfrak{E}^0$ verstehen wir jede Figur $\mathcal{F}^0$ in der universellen Überlagerungsfläche $\mathfrak{E}^0$, die $\mathcal{F}$ als Spur besitzt; die Lage eines Gebildes in $\mathfrak{E}^0$ werde immer durch den Zeiger ^{0} ausgedrückt.

[11]) S. Diss. S. 51 f. und Fußnote [3]) der vorliegenden Arbeit.

[12]) Diss. S. 67 u. S. 74 f.

[13]) Diss. S. 62 ff.

auf jeder von diesen Flächen genau eine geschlossene Gerade, die einufrig ist und keinen Doppelpunkt besitzt; ihre Länge ist gleich der Schiebungsgröße der erzeugenden Paddelung. Bei diesen Flächen ist $p = 1$, $n = 1$ und $m = 0$; sie haben also den Zusammenhang eines Möbiusschen Bandes[14]).

B. Alle andern C-K-Flächen negativer Krümmung haben eine positive Charakteristik c oder keine endliche Charakteristik. Sie können, wenn die Charakteristik endlich ist, in c endliche Elemente (Doppelsechsecke)[15]) und n unendliche Elemente (Außenteile) zerlegt werden[16]).

Im folgenden betrachten wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, nur Flächen mit positiver oder unendlicher Charakteristik.

Die Menge aller geschlossenen Geraden einer C-K-Fläche $\mathfrak{F}$ negativer Krümmung ist höchstens abzählbar, da sogar die Menge der Achsen[17]) aller Deckbewegungen von $\mathfrak{F}$ wie die Menge dieser Bewegungen selbst abzählbar ist; deren Abzählbarkeit aber folgt daraus, daß jede Deckbewegung von $\mathfrak{F}$ aus einer endlichen (oder, wenn die Charakteristik von $\mathfrak{F}$ unendlich ist, aus einer abzählbar unendlichen) Menge von Erzeugenden durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen gewonnen werden kann.

Unter den geschlossenen Geraden werden diejenigen, die keinen Doppelpunkt haben, als *Rückkehrgeraden*[18]) von denjenigen unterschieden, die sich selbst einmal oder mehrmals durchdringen; unter den Rückkehrgeraden sind die äußersten Rückkehrgeraden[19]) ausgezeichnet, die die Grenzen des Binnenteils gegen die Außenteile bilden.

Es sei hier an die für das Studium des Baues der C-K-Flächen negativer Krümmung wichtigen topologischen Eigenschaften der geschlossenen Geraden, insbesondere der Rückkehrgeraden erinnert, die sich in den Sätzen[20]) ausdrücken:

---

[14]) Diss. S. 77.

[15]) Diss. S. 68 u. S. 74 f.

[16]) Diss. S. 75 ff. (c und n dürfen bei dieser Aussage auch unendlich groß gedacht werden; vgl. die Einleitung und Fußnote [3]).) An eine uneigentliche Punktierung reicht unmittelbar der Binnenteil heran, so daß also, sooft eine Randgerade des Binnenteils zu einer Punktierung zusammenschrumpft, ein Außenteil entbehrlich wird.

[17]) Unter der Achse einer Schiebung oder Paddelung verstehen wir die Gerade, die durch diese Bewegung in sich verschoben wird; sie ist immer eine eigentliche Gerade.

[18]) Diss. S. 55.

[19]) Diss. S. 76.

[20]) Diss. S. 55 u. S. 62.

Zu jedem Rückkehrschnitt in einer C-K-Fläche negativer Krümmung, der nicht homotop 0 ist, gibt es genau eine homotope Rückkehrgerade[21]).

Die beiden Rückkehrgeraden in einer C-K-Fläche negativer Krümmung, die zu zwei fremden, einander nicht homotopen, nicht auf Punkte zusammenziehbaren Rückkehrschnitten homotop sind, haben selbst auch keinen Punkt miteinander gemein.

Es gilt ferner der Satz:

Zwei verschiedene geschlossene Geraden einer C-K-Fläche negativer Krümmung können nicht zueinander asymptotisch sein.

Dieser Satz (der wegen der Endlichkeit der Länge jeder geschlossenen Geraden unmittelbar einleuchtet) ist nämlich gleichbedeutend mit dem Satze[22]): Die Achsen zweier Bewegungen, die einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe von Bewegungen angehören, sind, wenn sie nicht zusammenfallen, einander nicht asymptotisch.

Es gibt unendlich viele geschlossene Geraden in einer C-K-Fläche mit positiver Charakteristik; gibt es doch in jeder solchen Fläche, wenn sie nicht gerade die schlichtartige mit der Charakteristik $c = 1$ ist, sogar unendlich viele Rückkehrgeraden, da es auf ihr unendlich viele verschiedene Systeme untereinander homotoper Rückkehrschnitte gibt; in dem einzelnen Doppelsechseck, das zwar außer seinen drei Randgeraden (oder Punktierungen) keine Rückkehrgeraden enthält, gibt es aber (wie überhaupt auf jeder Fläche positiver Charakteristik) wenigstens unendlich viele untereinander inhomotope Systeme geschlossener Streckenzüge und somit unendlich viele geschlossene Geraden.

2. *Offene Geraden.*

Die Menge aller Geraden einer C-K-Fläche $\mathfrak{F}$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums; denn schon die Menge aller Geraden, die durch einen bestimmten Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ gehen, hat diese Mächtigkeit, da die Menge aller Geraden, die $\mathfrak{p}$ als mehrfachen Punkt haben, wie die Menge aller Bildpunkte $\mathfrak{p}_i^0$ von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{F}^0$ abzählbar ist. Die nicht geschlossenen Geraden wollen wir *offene Geraden* nennen.

Es sei nun f eine offene Gerade in einer C-K-Fläche $\mathfrak{F}$ mit positiver oder unendlicher Charakteristik.

---

[21]) Dieser Satz gilt sogar für beliebige, nicht auf Punkte zusammenziehbare geschlossene Kurven, nur braucht die zu einer solchen homotope geschlossene Gerade keine Rückkehrgerade zu sein. Bei Nicht-Killingschen Flächen muß verlangt werden, daß die geschlossene Kurve sich auch nicht auf eine uneigentliche Punktierung zusammenziehen läßt.

[22]) Fricke-Klein, Vorles. ü. d. Theorie d. automorphen Funkt., Bd. I (Leipzig u. Berlin 1926), S. 118; s. auch S. 114 ff., S. 118, 2. Fußnote, S. 287, Fußnote.

f kann sich sehr verschieden verhalten:

a) Außenstrahlen.

α) Wenn die Fläche $\mathfrak{E}$ Außenteile besitzt, so kann es vorkommen, daß kein Punkt von f im Binnenteil $\mathfrak{B}$ der Fläche liegt, f also ganz in einem unendlichen Elemente $\mathfrak{A}_i$ der Fläche verläuft; in der C-K-Fläche $\mathfrak{E}'$ mit zyklischer Gruppe von Deckbewegungen[23]), deren einzige geschlossene Gerade dieselbe Länge wie die Randgerade g_i von $\mathfrak{A}_i$ hat, können wir in diesem Fall Geraden f', die diese geschlossene Gerade nicht schneiden, finden, deren Verlauf dem von f innerhalb $\mathfrak{A}_i$ kongruent ist. Dabei kann es sein, daß f in einer Richtung zu der das unendliche Element $\mathfrak{A}_i$ gegen den Binnenteil abgrenzenden äußersten Rückkehrgeraden g_i asymptotisch ist; wenn dies nicht der Fall ist, so haben f und g_i ein gemeinsames Lot. — Eine solche Gerade heiße eine *Außengerade.*

Wir betrachten des weiteren nur eine Halbgerade h (die aus den Punkten besteht, die wir passieren, wenn wir eine Gerade von einem beliebigen ihrer Punkte aus in einer bestimmten Richtung durchlaufen) oder, kürzer, einen „*Strahl*".

β) Nehmen wir zunächst an, wir überschreiten beim Wandern längs h eine auf $\mathfrak{E}$ verlaufende äußerste Rückkehrgerade g_i, genauer: die Halbgerade h komme aus dem Binnenteil $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{E}$ und dringe in einen Außenteil $\mathfrak{A}_i$ ein. Es ist dann unmöglich, daß wir beim weiteren Durchlaufen der Halbgeraden h (in dem anfänglichen Richtungssinn) in den Binnenteil zurückkehren; denn die Halbgerade h verläuft nach dem Überschreiten von g_i ebenso, wie eine Gerade auf der soeben schon zum Vergleich herangezogenen Fläche $\mathfrak{E}'$, die die Rückkehrgerade dieser Fläche in einem eigentlichen Punkte schneidet. — Ein solcher Strahl h heiße ein *Außenstrahl* (ebenso aber auch jeder Strahl, von dem überhaupt kein Punkt im Binnenteil liegt).

b) Binnenstrahlen.

Es ist ferner möglich, daß eine Halbgerade h, die von einem Punkte p des Binnenteils $\mathfrak{B}$ ausläuft, diesen niemals verläßt; wir nennen einen solchen Strahl einen *Binnenstrahl.*

α) Zunächst ist sicher jede Halbgerade h, die einer geschlossenen Geraden g asymptotisch ist, ein Binnenstrahl. Gibt man nämlich eine beliebige, nicht verschwindende Strecke a und zeichnet zu beiden Seiten von g die Abstandslinie im Abstand a, so entsteht ein Streifen fester Breite $2a$ mit der Mittelachse g; bei genügend langem Fortschreiten längs der zu g asymptotischen Halbgeraden h in dem anfänglich fest-

[23]) Eine ausführliche Diskussion dieser Fläche findet sich auf S. 64 ff. der Diss.

gesetzten Richtungssinn gelangt man schließlich sicher in diesen Streifen hinein, um ihn nie mehr zu verlassen. Man kann aber beim Fortschreiten längs h nie vorübergehend den Binnenteil verlassen haben, weil man dann, wie wir oben gesehen haben, nie mehr in ihn hätte zurückkehren können, sondern sich sogar unbegrenzt von der beim Verlassen des Binnenteils überquerten äußersten Rückkehrgeraden entfernen müßte, so daß es nicht möglich wäre, daß man schließlich in dem oben konstruierten Streifen bleibt. — Besitzt die Fläche uneigentliche Punktierungen, so sollen die in eine solche einmündenden Strahlen zu den Binnenstrahlen gerechnet werden, und zwar sollen sie genauer, da jede Punktierung als Ausartung einer äußersten Rückkehrgeraden betrachtet werden kann, als entartete Asymptoten einer geschlossenen Geraden (die eben zusammengeschrumpft ist) angesehen werden.

β) Gibt es aber außer den einer geschlossenen Geraden asymptotischen Strahlen noch andere, die ganz innerhalb des Binnenteils verlaufen?

h^0 sei ein Bild einer solchen Halbgeraden h in $\mathfrak{E}^0$. Der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{u}^0$ von h^0 hätte, wenn einer der Fälle a, α) oder a, β) vorläge, einen der unendlich fernen Randpunkte von $\mathfrak{E}$, der keine Punktierung sein könnte, als Spurpunkt; im Falle b, α) wäre $\mathfrak{u}^0$ ein Fixpunkt der Gruppe Γ der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$, d. h. ein unendlich ferner Punkt einer Achse g^0 einer Deckbewegung von $\mathfrak{E}$ oder auch der Pol einer zu Γ gehörenden Drehung um einen unendlich fernen Punkt. Die Frage ist demnach, ob es auf dem absoluten Kegelschnitt u^0 Punkte gibt, die weder Fixpunkte von Bewegungen der Gruppe Γ sind noch in einem Bildintervall einer der unerreichbaren Randkurven[11]) u_i von $\mathfrak{E}$ liegen.

Es soll zunächst bewiesen werden, daß ein solcher Punkt $\mathfrak{u}^0$, wenn er existiert, ein Häufungspunkt von Fixpunkten sein muß, der dabei selbst nicht Fixpunkt ist (Fig. 1). Wir setzen also voraus: $\mathfrak{u}^0$ habe keinen Spurpunkt auf einer Kontur u_i von $\mathfrak{E}$ und sei selbst kein Fixpunkt. Es sei b^0 ein beliebiges, $\mathfrak{u}^0$ im Innern enthaltendes Intervall auf u^0; es muß also nachgewiesen werden, daß in b^0 wenigstens ein Fixpunkt liegt. Der Beweis werde indirekt geführt: Wir nehmen an, es gäbe ein $\mathfrak{u}^0$ im Innern enthaltendes Intervall, b^0, das von jeglichem Fixpunkt frei ist. Wir verbinden die Endpunkte von b^0, $\mathfrak{v}^0$ und $\mathfrak{w}^0$, durch eine Gerade; das Gebiet von $\mathfrak{E}^0$, das von der Strecke $\mathfrak{v}^0\mathfrak{w}^0$ und den Punkten von b^0

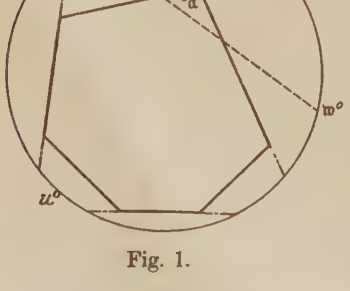


Fig. 1.

begrenzt wird, nennen wir kurz das Segment $\mathfrak{u}^0\mathfrak{v}^0\mathfrak{w}^0$; es besteht aus lauter eigentlichen Punkten von $\mathfrak{E}^0$. $\mathfrak{a}^0$ sei ein innerer Punkt dieses Segmentes. Seine Spur $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{E}$ kann unter den gemachten Voraussetzungen nicht in einem Außenteile $\mathfrak{A}_i$ liegen; denn zuvörderst könnte dann diejenige Bildgerade g_i^0 der $\mathfrak{A}_i$ gegen den Binnenteil abgrenzenden äußersten Rückkehrgeraden g_i, die von $\mathfrak{a}^0$ durch keine Achse einer Bewegung von Γ getrennt wird[24]), keinen Endpunkt in b^0 haben, da dieser ja, im Widerspruch gegen unsere Annahme, ein Fixpunkt von Γ in b^0 wäre. Daraus würde folgen, daß $\mathfrak{u}^0$ — wie jeder Punkt von u^0, der zwischen den Endpunkten von g_i^0 auf derselben Seite von g_i^0 wie $\mathfrak{a}^0$ liegt — ein Bildpunkt eines unendlich fernen Randpunktes von $\mathfrak{E}$ wäre, wieder im Gegensatz zu den Voraussetzungen. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß $\mathfrak{a}$ ein Punkt des Binnenteils oder einer äußersten Rückkehrgeraden von $\mathfrak{E}$ ist. Denken wir uns nun den Binnenteil auf irgendeine Art in Doppelsechsecke[15]) zerlegt; unter ihnen gibt es wenigstens eines, dem $\mathfrak{a}$ angehört. Dieses besitzt in $\mathfrak{E}^0$ einen $\mathfrak{a}^0$ enthaltenden Bildbereich, der aus zwei konvexen rechtwinkligen Sechsecken besteht; von diesen betrachten wir eines, das $\mathfrak{a}^0$ im Innern oder auf dem Rande enthält: Drei seiner Seiten sind Achsen von Bewegungen, die zu Γ gehören, und zwar mündet in jeden Eckpunkt gerade eine derartige Seite[25]). Nun muß, da $\mathfrak{a}^0$ im Innern des Segmentes $\mathfrak{u}^0\mathfrak{v}^0\mathfrak{w}^0$ liegt, wenigstens eine Ecke des Sechsecks, dem $\mathfrak{a}^0$ angehört, auch im Innern dieses Segmentes liegen; diejenige Seite des Sechsecks, die durch diesen Eckpunkt läuft und Achse von Γ ist, muß also in wenigstens einer Richtung in einem Fixpunkt $\mathfrak{z}^0$ innerhalb b^0 enden. Damit sind nun aber alle Möglichkeiten bezüglich der Lage von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{E}$ erschöpft; daher ist bewiesen, daß es unter den gemachten Voraussetzungen kein $\mathfrak{u}^0$ im Innern enthaltendes, von Fixpunkten freies Intervall b^0 gibt, $\mathfrak{u}^0$ also ein Häufungspunkt von Fixpunkten ist.

Man nennt jeden Punkt von $\mathfrak{u}^0$, der nicht Bildpunkt eines unendlich fernen, nicht isolierten Randpunktes von $\mathfrak{E}$ ist, und keinen andern Punkt einen Grenzpunkt[26]) für die Gruppe Γ; alle Fixpunkte gehören hiernach zu den Grenzpunkten. Beachten wir, daß jeder Fixpunkt $\mathfrak{u}^0$ einer nichtzyklischen Gruppe Γ auch Häufungspunkt von Fixpunkten ist, weil die Bewegungen von Γ, deren Achse in $\mathfrak{u}^0$ endigt oder deren unendlich ferner Drehpol $\mathfrak{u}^0$ ist, die nicht auf dieser Achse liegenden Fixpunkte von Γ in

---

[24]) g_i besitzt unendlich viele Bilder in $\mathfrak{E}^0$; unter diesen ist aber eines, g_i^0, das zusammen mit einem von Fixpunkten freien Bogen auf u^0 ein Gebiet in $\mathfrak{E}^0$ begrenzt, das, wenn $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{A}_i$ liegt, $\mathfrak{a}^0$ enthält und in das kein Bild einer geschlossenen Geraden eindringt.

[25]) Diss. S. 68 ff.

[26]) Fricke, Enz. d. math. Wiss. II B 4, S. 361.

beliebige Nähe von u^0 zu bringen erlauben, so können wir also das im vorigen Abschnitt gefundene Ergebnis so aussprechen:

Jeder Grenzpunkt einer Gruppe Γ ist Häufungspunkt von Fixpunkten der Gruppe Γ.

Von diesem Satze gilt offensichtlich auch die Umkehrung:

Jeder Häufungspunkt von Fixpunkten von Γ, daher auch jeder Häufungspunkt von Grenzpunkten von Γ ist selbst ein Grenzpunkt von Γ.

Denn jeder einem unerreichbaren nicht-isolierten Randpunkte von $\mathfrak{F}$ entsprechende Punkt u^0 auf u^0 ist innerer Punkt eines ganz von Fixpunkten freien Intervalles auf u^0. Nur ein Grenzpunkt kann demnach Häufungspunkt von Fixpunkten sein.

Es erhebt sich jetzt die Frage, ob es Grenzpunkte, die nicht zugleich Fixpunkte sind, überhaupt gibt.

Für die C-K-Flächen negativer Krümmung ohne Konturen, also insbesondere für die geschlossenen C-K-Flächen negativer Krümmung, ist dies sofort zu bejahen: Für die einer solchen zugehörige Gruppe Γ von Deckbewegungen ist ja jeder Punkt von u^0 ein Grenzpunkt. Aber es kann nicht jeder Punkt von u^0 ein Fixpunkt sein. Denn während die Menge aller Punkte von u^0, also auch die aller Grenzpunkte die Mächtigkeit des Kontinuums hat, ist die Menge aller Fixpunkte einer Gruppe Γ ebenso wie die Menge der Achsen aller Bewegungen von Γ abzählbar, und diese Eigenschaft hat die Menge der Fixpunkte auch dann, wenn die Anzahl n der Konturen von $\mathfrak{F}$ größer als Null ist.

Um die Frage auch für den Fall einer C-K-Fläche $\mathfrak{F}$ negativer Krümmung mit Randkurven zu entscheiden, betrachten wir die Menge aller Grenzpunkte. Da jeder Häufungspunkt von Grenzpunkten, wie wir oben sahen, selbst ein Grenzpunkt ist, so ist er in der Menge aller Grenzpunkte enthalten; diese Menge ist mithin abgeschlossen. Sie ist aber auch in sich dicht; denn jeder Grenzpunkt ist ja (wenn Γ nicht zyklisch ist, und dies ist durch die Voraussetzung, daß $c > 0$ sein soll, ausgeschlossen) Häufungspunkt von Fixpunkten, also auch Häufungspunkt von Grenzpunkten. Folglich ist die Menge aller Grenzpunkte perfekt[27]), kann also nach einem Satze von Cantor nicht abzählbar sein. Da die Menge aller Fixpunkte aber abzählbar ist, so gibt es folglich Grenzpunkte, die nicht zugleich Fixpunkte sind.

Damit ist nachgewiesen, daß es in jeder C-K-Fläche mit positiver oder unendlicher Charakteristik Halbgeraden, die den Binnenteil nicht

[27]) Fricke, loc. cit. S. 379.

verlassen und die doch keiner geschlossenen Geraden asymptotisch sind, wirklich gibt[28]).

Eine Gerade, von der kein Punkt in einem Außenteil liegt, nennen wir eine *Binnengerade*; insbesondere gehören also die geschlossenen Geraden zu den Binnengeraden. Jede Binnengerade kann in zwei Binnenstrahlen zerlegt werden. Von dieser Aussage gilt aber auch die Umkehrung: Jede Gerade, die sich aus zwei Binnenstrahlen zusammensetzt, ist eine Binnengerade. Es ist nämlich nicht möglich, daß von einer Geraden nur ein endliches Stück in einem Außenteil liegt, weil eine Gerade, die eine äußerste Rückkehrgerade überschreitet, wie wir schon oben sahen, wenigstens in einer Richtung ins Unendliche laufen muß.

Das Verhalten der einen Hälfte einer nicht geschlossenen Geraden ist ganz unabhängig von dem der andern[29]). Denn der Verlauf einer Halbgeraden h in der Fläche $\mathfrak{E}$ ist ja allein durch die Art des unendlich fernen Punktes u^0 eines ihrer Bilder h^0 bestimmt; diesen Zusammenhang zeigt die folgende Gegenüberstellung:

Verhalten der Halbgeraden h in $\mathfrak{E}$:	Art des unendlich fernen Punktes u^0 irgendeines ihrer Bilder h^0 in $\mathfrak{E}^0$:
a) h läuft auf einem Außenteil ins Unendliche.	u^0 ist nicht Grenzpunkt.
b) h bleibt im Binnenteil:	u^0 ist Grenzpunkt:
α) h nähert sich dabei asymptotisch einer geschlossenen Geraden,	u^0 ist Fixpunkt,
β) es gibt keine geschlossene Gerade, der sich h asymptotisch nähert.	u^0 ist kein Fixpunkt.

Schließlich sei noch auf das Folgende hingewiesen[30]): Zu jedem unendlich fernen Punkt (sogar überhaupt zu jedem Punkt) gibt es in jeder Umgebung jedes Grenzpunktes bezüglich Γ äquivalente Punkte; denn jeder Grenzpunkt ist, sofern er nicht selbst ein Fixpunkt ist, wenigstens Häufungspunkt von Fixpunkten, und die Bewegungen von Γ, deren Achse in einem Fixpunkt u^0 endigt oder die u^0 als unendlich fernen Drehpol haben, erlauben es, jeden Punkt von u^0 (sogar von $\mathfrak{E}^0$) in eine beliebige Umgebung von u^0 zu bringen. Daraus kann man schließen: Ist h ein von $\mathfrak{p}$

[28]) Hadamard, loc. cit. (Fußnote [5]), S. 68.

[29]) Vgl. auch J. Nielsen, Om geodætiske Linier i lukkede Mangfoldigheder med konstant negativ Krumning, Matematisk Tidsskrift B 1925 (Juel-Festschrift), S. 37–44.

[30]) Vgl. Hadamard, loc. cit. S. 70f.

auslaufender Binnenstrahl und γ ein beliebig kleiner, h im Innern enthaltender Winkel mit dem Scheitel $\mathfrak{p}$, so liegen in γ unendlich viele, von $\mathfrak{p}$ auslaufende Strahlen, die zu irgendeinem beliebig gegebenen Strahl asymptotisch sind.

II. Konstruktion neuer geschlossener Geraden aus zwei gegebenen.

Da die Bilder der geschlossenen Geraden von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}^0$ die Achsen der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$ sind, so muß jedes Verfahren, das das Ergebnis der Aufeinanderfolge zweier bekannter Bewegungen liefert, unmittelbar ein Verfahren geben, das unbekannte geschlossene Geraden aus bekannten zu finden erlaubt. Daher wird es in der Folge für uns wichtig sein, daß wir wenigstens eine einfache Konstruktion für die *Zusammensetzung von zwei Deckbewegungen einer C-K-Fläche negativer Krümmung, von denen keine eine Drehung um einen unendlich fernen Punkt ist*, zur Verfügung haben.

Jede derartige Deckbewegung einer Fläche $\mathfrak{E}$ negativer Krümmung ist entweder eine *Schiebung* oder eine *Paddelung*, je nachdem sie den Drehsinn der Winkel ungeändert läßt oder nicht[31]).

Jede *Schiebung* läßt sich nach H. Wiener ersetzen[32]) durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen um Lote zu ihrer Achse, die im Abstand der halben Schiebungsgröße in der Schiebungsrichtung aufeinanderfolgen, oder durch die Aufeinanderfolge zweier Umdrehungen um Punkte ihrer Achse, die im Abstande der halben Schiebungsgröße in der Schiebungsrichtung aufeinanderfolgen; eines der beiden Lote oder einer der beiden Punkte darf dabei beliebig angenommen werden.

Jede *Paddelung* läßt sich nach H. Wiener ersetzen[33]) durch die Aufeinanderfolge einer Umdrehung um einen Punkt ihrer Achse und einer Umwendung um ein Lot zu ihrer Achse, das auf den Punkt im Abstand der halben Schiebungsgröße in der Schiebungsrichtung folgt, oder durch die Aufeinanderfolge einer Umwendung um ein Lot zu ihrer Achse und einer Umdrehung um einen Punkt ihrer Achse, der dem Lot im Abstand der halben Schiebungsgröße in der Schiebungsrichtung folgt; in jedem Fall darf entweder der Punkt oder das Lot beliebig angenommen werden.

Die Achsen g_1^0 und g_2^0 zweier verschiedener Deckbewegungen C_1 und C_2 besitzen entweder einen eigentlichen gemeinsamen

---

[31]) Diss. S. 30ff.

[32]) Diss. S. 31. — Unter einer Umwendung verstehen wir eine Spiegelung an einer eigentlichen Geraden, unter einer Umdrehung eine Spiegelung an einem eigentlichen Punkt.

[33]) Diss. S. 32.

Punkt oder ein eigentliches gemeinsames Lot; daß sie einen unendlich fernen Punkt gemein haben, kann nämlich (vgl. S. 578) nicht vorkommen. Demgemäß haben wir nur die beiden Fälle in Betracht zu ziehen:

a) g_1^0 und g_2^0 haben einen eigentlichen Schnittpunkt $\mathfrak{p}^0$.

Dann gibt es auf g_1^0 und g_2^0 entweder Punkte $\mathfrak{p}_1^0$ und $\mathfrak{p}_2^0$ oder Lote l_1^0 und l_2^0 von der Art, daß[34]) (Fig. 2)

$$\begin{aligned} &\text{entweder} \quad C_1 = PP_1 \quad \text{oder} \quad C_1 = PL_1 \\ &\text{und entweder} \quad C_2 = P_2P \quad \text{oder} \quad C_2 = L_2P \end{aligned}$$

wird; da $PP = 1$ ist, so ist also C_2C_1 eine der vier folgenden Bewegungen:

$$\text{entweder} \quad P_2P_1 \quad \text{oder} \quad P_2L_1 \quad \text{oder} \quad L_2P_1 \quad \text{oder} \quad L_2L_1.$$

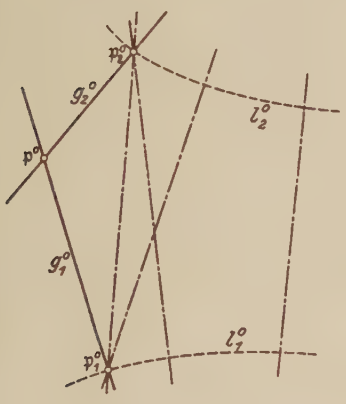


Fig. 2.

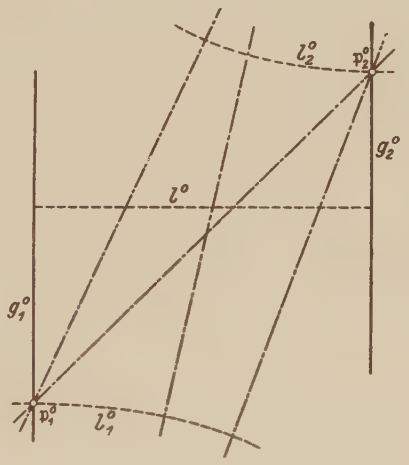


Fig. 3.

Damit ist die Bewegung C_2C_1 als Schiebung oder Paddelung oder auch (wenn l_1 und l_2 asymptotisch liegen) als Drehung um einen unendlich fernen Punkt vollkommen bekannt (Drehungen um eigentliche Punkte können ja hier nicht vorkommen).

b) g_1^0 und g_2^0 haben ein (eigentliches) gemeinsames Lot l^0.

Dann gibt es auf g_1^0 und g_2^0 entweder Lote l_1^0 und l_2^0 oder Punkte $\mathfrak{p}_1^0$ und $\mathfrak{p}_2^0$ von der Beschaffenheit, daß (Fig. 3)

$$\begin{aligned} &\text{entweder} \quad C_1 = LL_1 \quad \text{oder} \quad C_1 = LP_1 \\ &\text{und entweder} \quad C_2 = L_2L \quad \text{oder} \quad C_2 = P_2L \end{aligned}$$

---

[34]) Die Umdrehung um $\mathfrak{p}^0$ bezeichnen wir mit P, die Umwendung um l^0 mit L. — In den beiden Figuren 2 und 3 sind die neu konstruierten Achsen strichpunktiert gezeichnet.

wird; da $LL = 1$ ist, so ist also $C_2 C_1$ eine der folgenden vier Bewegungen:

entweder $L_2 L_1$ oder $L_2 P_1$ oder $P_2 L_1$ oder $P_2 P_1$,

so daß wir wiederum alles Wünschenswerte über $C_2 C_1$ erfahren.

Hiernach können wir ohne weiteres die folgende einfache *Konstruktion* angeben, *die aus zwei gegebenen geschlossenen Geraden unendlich viele neue zu finden gestattet*:

g_1 und g_2 seien zwei geschlossene Geraden auf einer C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit positiver Charakteristik[35]); ihre Längen seien s_1 und s_2.

g_1^0 und g_2^0 seien zwei verschiedene, sonst beliebige Bildgeraden von g_1 und g_2 in $\mathfrak{E}^0$.

A. Die Fläche $\mathfrak{E}$ sei zweiseitig (orientierbar).

a) g_1^0 und g_2^0 mögen einen eigentlichen Punkt $\mathfrak{p}^0$ gemein haben.

Zeichnen wir auf g_1^0 die Punkte $\mathfrak{p}_i^0$ $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ in den Abständen $i\frac{s_1}{2}$ von $\mathfrak{p}^0$ aus, auf g_2^0 die Punkte $\mathfrak{p}_j''^0$ $(j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ in den Abständen $j\frac{s_2}{2}$ von $\mathfrak{p}^0$ aus, so bilden die Bewegungen PP_i' und $P_j'' P$ die Gesamtheit der Schiebungen mit den Achsen g_1^0 und g_2^0, die zur Gruppe Γ der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$ gehören. Daher gehören auch die Schiebungen

$$P_j'' P P P_i' = P_j'' P_i'$$

der Gruppe Γ an; folglich ist jede der Geraden $\mathfrak{p}_i'^0 \mathfrak{p}_j''^0$ Bild einer geschlossenen Geraden g_{ij} in $\mathfrak{E}$, und die Länge $\mathfrak{p}_i'^0 \mathfrak{p}_j''^0$ ist ein ganzzahliges Vielfaches der halben Länge von g_{ij}.

In $\mathfrak{E}$ entspricht allen Punkten $\mathfrak{p}_i'^0$ und $\mathfrak{p}_j''^0$, wenn i und j gerade Zahlen sind, derselbe Punkt $\mathfrak{p}$; wenn i ungerade ist, so ist der Spurpunkt aller Punkte $\mathfrak{p}_i'^0$ der Punkt $\mathfrak{p}'$ auf g_1, dessen Abstand von $\mathfrak{p}$, längs g_1 gemessen, $\frac{1}{2} s_1$ ist, und ebenso liegen alle Punkte $\mathfrak{p}_j''^0$, wenn j ungerade ist, über demselben Spurpunkt $\mathfrak{p}''$ auf g_2, dessen Entfernung von $\mathfrak{p}$, längs g_2 gemessen, $\frac{1}{2} s_2$ ist. Mithin sind alle geschlossenen Geraden g_{ij}, die wir soeben konstruiert haben, Verbindungslinien

eines der Punkte $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}'$ mit einem der Punkte $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}''$.

Zeichnen wir durch $\mathfrak{p}_i'^0$, wo i jetzt eine feste ganze Zahl bedeute, alle Geraden g_{ij}^0, wo j alle ganzen Zahlen durchlaufen möge, so haben diese zwei Grenzlagen, nämlich die Asymptoten zu g_2^0 durch $\mathfrak{p}_i'^0$; diese können selbst keine geschlossenen Geraden sein. Wir sehen zugleich, daß

[35]) g_1 und g_2 dürfen auch miteinander identisch sein.

durch den Schnittpunkt zweier geschlossener Geraden immer unendlich viele geschlossenen Geraden gehen; denn jedem der unendlich vielen verschiedenen Durchmesser eines hinreichend kleinen, aber nicht verschwindenden Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{p}_i'^0$, die auf den Geraden g_{ij}^0 liegen, entspricht umkehrbar eindeutig eine durch $\mathfrak{p}^*$, d. h. einen der Punkte $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}'$ gehende Strecke in $\mathfrak{E}$, die ganz einer geschlossenen Geraden angehört. Gäbe es nun in Wirklichkeit nur eine endliche Anzahl geschlossener Geraden durch $\mathfrak{p}^*$, so müßte es also unter diesen wenigstens eine solche geben, die unendlich viele jener Durchmesser enthielte, bei deren Durchlaufung in einem bestimmten Richtungssinne man also unendlich oft durch $\mathfrak{p}^*$ käme, ehe die ganze Länge durchlaufen wäre, und zwar in Abständen, die alle größer als der Durchmesser von $\mathfrak{K}$ wären; das ist aber unmöglich, weil die Länge jeder geschlossenen Geraden endlich und die Länge der Halbmesser von $\mathfrak{K}$ nicht Null ist.

b) g_1^0 und g_2^0 mögen ein (eigentliches) gemeinsames Lot l^0 haben.

Errichten wir in den Abständen $i\frac{s_1}{2}$ von l^0 die Lote $l_i'^0$ $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ auf g_1^0, in den Abständen $j\frac{s_2}{2}$ von l^0 die Lote $l_j''^0$ $(j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ auf g_2^0, so sind die Bewegungen LL_i' und $L_j''L$ die Schiebungen der Gruppe Γ, die die Achsen g_1^0 und g_2^0 haben. Folglich gehören auch die Bewegungen

$$L_j'' L L L_i' = L_j'' L_i'$$

der Gruppe Γ an, müssen also — möglicherweise mit endlich vielen Ausnahmen — Schiebungen sein; jede der Geraden $l_i'^0$ besitzt sonach mit jeder der Geraden $l_j''^0$ zusammen ein eigentliches gemeinsames Lot — ausgenommen vielleicht für einige Werte von i und j —, und jedes von diesen ist ein Bild einer geschlossenen Geraden g_{ij} in $\mathfrak{E}$, deren halbe Länge ein aliquoter Teil des kürzesten Abstandes der beiden Lote $l_i'^0$ und $l_j''^0$ ist.

Wieder haben alle Geraden g_{ij}^0, die auf einem festgehaltenen der Lote $l_i'^0$ senkrecht stehen, zwei Grenzlagen, nämlich die Asymptoten von g_2^0, die senkrecht zu $l_i'^0$ sind; diese können selbst keine geschlossenen Geraden sein. Man kann danach unschwer erkennen, daß jedes gemeinsame Lot zweier geschlossener Geraden von unendlich vielen geschlossenen Geraden unter rechten Winkeln geschnitten wird.

B. Die Fläche $\mathfrak{E}$ sei einseitig (nichtorientierbar).

Bei einseitigen Flächen $\mathfrak{E}$ können außer den bis jetzt behandelten Möglichkeiten noch die vorkommen, daß eine der Geraden g_1^0 und g_2^0 oder jede von ihnen Achse von Paddelungen, die zu Γ gehören, ist.

a) g_1^0 und g_2^0 mögen einen eigentlichen Punkt $\mathfrak{p}^0$ gemein haben.

Wenn g_1 eine geschlossene Gerade mit nur einem Ufer, d. h. g_1^0 Achse einer Paddelung von Γ ist, so zeichnen wir wieder auf g_1^0 in den Abständen $i\frac{s_1}{2}$ $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ von $\mathfrak{p}^0$ aus die Punkte $\mathfrak{p}_i'^0$ und errichten in $\mathfrak{p}_i'^0$, sooft i eine ungerade Zahl ist, das Lot $l_i'^0$ auf g_1^0. Die Bewegungen von Γ, die g_1^0 in sich verschieben, sind dann

$$\text{entweder} \quad PP_{2k}' \quad \text{oder} \quad PL_{2k-1}' \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ist nun g_2 eine geschlossene Gerade mit zwei getrennten Ufern, d. h. g_2^0 nur Achse von Schiebungen von Γ, so können die Bewegungen von Γ mit der Achse g_2^0 wie früher dargestellt werden in der Form

$$P_j'' P \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Die Aufeinanderfolge der Bewegungen von Γ mit den Achsen g_1^0 und g_2^0 ergibt also die Bewegungen

$$P_j'' P_{2k}' \quad \text{und} \quad P_j'' L_{2k-1}';$$

ihre Achsen sind Bilder von geschlossenen Geraden in $\mathfrak{E}$, und zwar sind die Achsen der Bewegungen $P_j'' P_{2k}'$, die Verbindungslinien der Punkte $\mathfrak{p}_{2k}'^0$ mit den Punkten $\mathfrak{p}_j''^0$, Bilder von geschlossenen Geraden, von denen man nicht ohne weiteres sagen kann, ob sie getrennte Ufer haben oder nicht, während die Achsen der Bewegungen $P_j'' L_{2k-1}'$, die Lote von den Punkten $\mathfrak{p}_j''^0$ auf die Geraden $l_{2k-1}'^0$, sicher Bilder von geschlossenen Geraden ohne getrennte Ufer sind. Auch die Längen sind wie früher bis auf einen ganzzahligen Faktor bestimmt.

Ist auch g_2^0 Achse von Paddelungen der Gruppe Γ, so hat man wieder die Punkte $\mathfrak{p}_{2m-1}''^0$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ durch die Lote $l_{2m-1}''^0$ auf g_2^0 in diesen Punkten zu ersetzen und bekommt die Bewegungen von Γ mit der Achse g_2^0 in der Form

$$P_{2m}'' P \quad \text{oder} \quad L_{2m-1}'' P,$$

sonach als abgeleitete Bewegungen die folgenden:

$$P_{2m}'' P_{2k}', \quad L_{2m-1}'' L_{2k-1}', \quad P_{2m}'' L_{2k-1}', \quad L_{2m-1}'' P_{2k}';$$

die Achsen der beiden ersten Systeme von Schiebungen — unter den Bewegungen $L_{2m-1}'' L_{2k-1}'$ können endlich viele Drehungen um unendlich ferne Punkte vorkommen (für einige Werte von m und k), gewiß aber keine Drehungen um eigentliche Punkte — haben als Spuren geschlossene Geraden, die nicht notwendig zweiufrig sein müssen, die Achsen der beiden letzten Systeme von Paddelungen liegen aber gewiß über einuferigen geschlossenen Geraden als Spuren.

b) g_1^0 und g_2^0 mögen ein (eigentliches) gemeinsames Lot l^0 haben.

Wieder errichten wir auf g_1^0 in den Abständen $i\frac{s_1}{2}$ $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ von l^0 die Lote $l_i'^0$, auf g_2^0 in den Abständen $j\frac{s_2}{2}$ $(j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ von l^0 die Lote $l_j''^0$, ersetzen aber, wenn g_1^0 das Bild einer einuferigen geschlossenen Geraden ist, das Lot $l_i'^0$, sooft i eine ungerade Zahl $2k-1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist, durch seinen Fußpunkt $\mathfrak{p}_i'^0$ auf g_1^0.

Wir erhalten dann, wenn g_2^0 nicht Achse von Paddelungen von Γ ist, die neuen Bewegungen von Γ:

$$L_j'' L_{2k}' \quad \text{und} \quad L_j'' P_{2k-1}'.$$

Wenn auch g_2 einuferig ist, so behandeln wir g_2^0 wie soeben g_1^0 und erhalten die neuen Bewegungen von Γ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$:

$$L_{2m}'' L_{2k}', \quad P_{2m-1}'' P_{2k-1}', \quad L_{2m}'' P_{2k-1}', \quad P_{2m-1}'' L_{2k}'.$$

So finden wir wieder neue geschlossene Geraden, die sicher zum Teil keine getrennten Ufer haben.

III. Eine Eigenschaft der auf Binnengeraden liegenden Strecken.

Im Abschnitt I haben wir gesehen, daß es in jeder C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit positiver Charakteristik Geraden gibt, die das Innere des Binnenteils $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{E}$ nicht verlassen, und die wir Binnengeraden genannt haben. Im folgenden werden wir es häufig mit Strecken zu tun haben, die Stücke von Binnengeraden sind; jede solche Strecke wollen wir eine „*Binnenstrecke*“ heißen[36]). Ferner wollen wir im Anschluß an eine Ausdrucksweise von J. Nielsen[37]) sagen, „*die Gerade f approximiert die Strecke s im Maße a*“, wenn es ein Bild f^0 von f und ein Bild s^0 von s in $\mathfrak{E}^0$ von der Art gibt, daß die Abstände der Punkte der Strecke s^0 von der Geraden f^0 alle kleiner als a sind.

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt dargestellten Konstruktionen können wir nun den Satz beweisen:

$\mathfrak{E}$ sei eine C-K-Fläche (die auch eine Nicht-Killingsche sein darf) mit positiver oder unendlicher Charakteristik, und a sei eine beliebige positive Länge; zu jeder Binnenstrecke in $\mathfrak{E}$ gibt es geschlossene Geraden, die sie im Maße a approximieren.

Zum Beweise betrachten wir eine beliebige Binnengerade h in $\mathfrak{E}$; h^0 sei ein Bild von h in $\mathfrak{E}^0$ (Fig. 4 u. 5). Beide unendlich fernen Punkte

---

[36]) Es muß also nicht jede innerhalb des Binnenteils liegende Strecke eine Binnenstrecke sein.

[37]) S. J. Nielsen, loc. cit. (Fußnote [29]), S. 40.

von h^0, $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{u}_2^0$, sind sonach Grenzpunkte für die Gruppe Γ der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$. In zwei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b}^0$ von h^0 errichten wir je das Lot auf h^0 und tragen auf ihm nach beiden Seiten vom Fußpunkt aus die Länge a ab; dann verbinden wir je die beiden auf derselben Seite von h^0 liegenden der so gefundenen vier Punkte durch Geraden e^0 und f^0. Diese beiden Geraden bestimmen auf u^0 zwei Intervalle b_1^0 und b_2^0, von denen das erste den Punkt $\mathfrak{u}_1^0$, das zweite den Punkt $\mathfrak{u}_2^0$ im Innern enthalte. Es muß gezeigt werden, daß es eine Achse g^0 einer Bewegung von Γ gibt, die einen unendlich fernen Punkt in b_1^0 und einen unendlich fernen Punkt in b_2^0 besitzt.

Da $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{u}_2^0$ Grenzpunkte sind, so liegen sowohl in b_1^0 als auch in b_2^0 Fixpunkte, die nicht mit $\mathfrak{u}_1^0$ oder $\mathfrak{u}_2^0$ identisch sind (siehe Abschnitt I, S. 581 f.); $\mathfrak{v}_1^0$ sei ein solcher in b_1^0, $\mathfrak{v}_2^0$ einer in b_2^0. Ist die Gerade $\mathfrak{v}_1^0\mathfrak{v}_2^0$ Achse einer Bewegung von Γ, so ist der Satz schon als richtig erkannt, da $\mathfrak{v}_1^0\mathfrak{v}_2^0$ die zwischen e^0 und f^0 liegenden Stücke der Lote auf h^0 schneiden muß.

Im allgemeinen wird aber die in $\mathfrak{v}_1^0$ endende Achse g_1^0 von der in $\mathfrak{v}_2^0$ mündenden g_2^0 verschieden sein. g_1^0 und g_2^0 haben dann entweder einen eigentlichen Schnittpunkt $\mathfrak{s}^0$ oder ein gemeinsames Lot l^0, da sie ja nicht zueinander asymptotisch sein können. s_i $(i = 1, 2)$ sei die Länge von y_i.

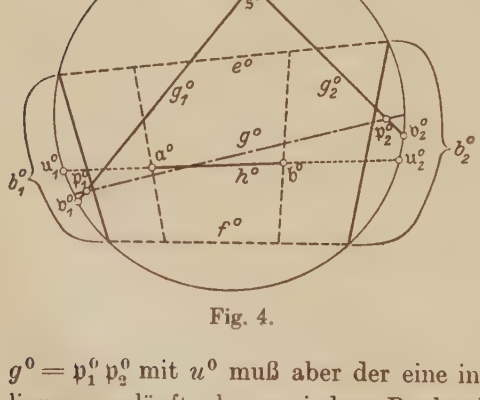


Fig. 4.

Im ersten Fall (Fig. 4) tragen wir von $\mathfrak{s}^0$ aus auf g_1^0 die Strecke s_1 gegen $\mathfrak{v}_1^0$ hin so oft ab, bis wir die Verbindungssehne der Endpunkte von b_1^0 überschreiten; es sei $\mathfrak{p}_1^0$ ein so gefundener Punkt. Auf g_2^0 finden wir ebenso durch wiederholtes Abtragen der Strecke s_2 von $\mathfrak{s}^0$ aus gegen $\mathfrak{v}_2^0$ hin einen Punkt $\mathfrak{p}_2^0$ jenseits der Sehne von b_2^0. $\mathfrak{p}_1^0\mathfrak{p}_2^0$ ist nach Abschnitt II das Bild einer geschlossenen Geraden g in $\mathfrak{E}$; von den Schnittpunkten von $g^0 = \mathfrak{p}_1^0\mathfrak{p}_2^0$ mit u^0 muß aber der eine innerhalb b_1^0, der andere innerhalb b_2^0 liegen. g läuft also an jedem Punkt der Strecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ auf h in einem Abstande vorüber, der kleiner als a ist.

Haben g_1^0 und g_2^0 das gemeinsame Lot l^0 (Fig. 5) — g_1^0 darf auch ganz in dem von dem Bogen b_1^0 und seiner Sehne begrenzten Segment von $\mathfrak{E}^0$ liegen, zudem ebenso g_2^0 ganz in dem von dem Bogen b_2^0 und seiner Sehne umschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{E}^0$ —, so errichten wir auf g_1^0 in Abständen von l^0, die gleich den ganzen Vielfachen von s_1 sind, je

das Lot; diese Lote haben als eine Grenzlage die Tangente t_1^0 an u^0 in $\mathfrak{v}_1^0$, also gibt es unter ihnen solche, deren beide unendlich fernen Punkte in b_1^0 fallen, und es sei l_1^0 ein derartiges Lot. Ebenso errichten wir auf g_2^0 in Abständen von l^0, die gleich den ganzzahligen Vielfachen von s_2 sind, die Lote, da die Tangente t_2^0 an u^0 in $\mathfrak{v}_2^0$ eine Häufungslage für sie ist, so gibt es eines, l_2^0, das zwei Punkte von b_2^0 miteinander verbindet. Das gemeinsame Lot g^0 von l_1^0 und l_2^0 ist Bild einer geschlossenen Geraden g in $\mathfrak{E}$ (Abschnitt II); von den unendlich fernen Punkten von g^0 liegt aber der eine in b_1^0, der andere in b_2^0. Also verläuft auch g^0 ganz zwischen e^0 und f^0.

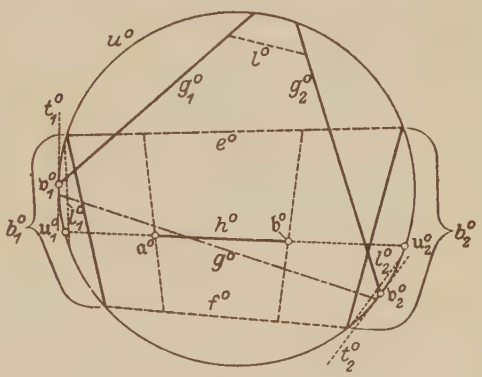


Fig. 5.

Damit ist der Satz bewiesen, und zwar, da wir bloß die ganzen Vielfachen von s_1 und s_2, nicht auch die von $\frac{s_1}{2}$ und $\frac{s_2}{2}$ verwendet haben, auch für den Fall, daß g_1^0 oder g_2^0 oder diese beiden Geraden Achsen von Paddelungen von Γ sind, d. h. auch für einseitige Flächen $\mathfrak{E}$. Man hätte natürlich auch die Vielfachen von $\frac{s_1}{2}$ und $\frac{s_2}{2}$ verwenden können, doch wäre dann die Ausdrucksweise umständlicher geworden; man hätte dann aber gefunden, daß es in einer einseitigen Fläche in beliebiger Nähe von ab auf h unendlich viele geschlossenen Geraden ohne getrennte Ufer gibt.

Es sei noch bemerkt, daß der Beweis auch dann gilt, wenn h selbst eine geschlossene Gerade ist; denn da wir vorausgesetzt haben daß $c > 0$ ist, so daß h nicht die einzige geschlossene Gerade der Fläche $\mathfrak{E}$ sein kann, so existieren auch dann in b_1^0 immer von u_1^0 verschiedene Fixpunkte $\mathfrak{v}_1^0$ und in b_2^0 immer von u_2^0 verschiedene Fixpunkte $\mathfrak{v}_2^0$.

Daß die unendlich vielen so konstruierten Geraden g^0 nicht Bilder einer nur endlichen Anzahl geschlossener Geraden in $\mathfrak{E}$ sein können, folgt daraus, daß sonst, wenn a genügend klein gewählt würde, ein Kreisgebiet mit dem Mittelpunkt a in $\mathfrak{E}$ angegeben werden könnte, das von einer endlichen Anzahl von geschlossenen Geraden, mithin schon von wenigstens einer einzelnen unter diesen, in unendlich vielen Sehnen, deren Längen eine von Null verschiedene untere Grenze hätten, durchzogen würde; dies wäre aber mit der Endlichkeit der Länge jeder geschlossenen Geraden nicht vereinbar.

Wir können den Satz auch so aussprechen:

Auf jeder C-K-Fläche mit positiver oder unendlicher Charakteristik ist jede Binnenstrecke Häufungslage von Strecken, die geschlossenen Geraden angehören. Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Fläche eine Nicht-Killingsche ist.

In einer C-K-Fläche negativer Krümmung ohne Konturen, also erst recht in jeder geschlossenen C-K-Fläche negativer Krümmung ist jede Strecke eine Binnenstrecke und als solche Häufungslage von geschlossenen Geraden in dem durch den vorigen Satz präzisierten Sinn.

Es folgt daraus a fortiori:

In einer geschlossenen C-K-Fläche laufen in beliebiger Nähe jedes Punktes geschlossene Geraden vorüber[38]).

Diese Aussage kann man auch so fassen:

Macht man jede geschlossene Gerade in $\mathfrak{E}$ zur Mittelachse eines Streifens fester Breite $2a$, wobei die Konstante $a > 0$ beliebig gegeben sei, so liegt jeder Punkt, ja sogar jede Strecke der Fläche $\mathfrak{E}$ in wenigstens einem dieser Streifen (sogar in unendlich vielen), wie klein man auch a vorgeben mag. Diese Streifen überdecken sonach die ganze geschlossene Fläche $\mathfrak{E}$.

IV. Approximationen durch geschlossene Geraden.

J. Nielsen hat zwei verschiedene Wege angegeben[39]), auf denen man zu tiefer liegenden Eigenschaften der Geraden in gewissen geschlossenen C-K-Flächen negativer Krümmung gelangen kann. Im folgenden soll gezeigt werden, wie die eine dieser Methoden sich auf die allgemeinen C-K-Flächen mit positiver Charakteristik übertragen läßt.

Zu dem Zweck schicken wir eine Vorbetrachtung voraus:

Es sei g^0 eine gegebene eigentliche Gerade in $\mathfrak{E}^0$. Wir wollen alle Geraden f^0 bestimmen, die durch den gegebenen unendlich fernen Punkt u^0, der nicht auf g^0 liege, gehen und so verlaufen, daß es auf g^0 eine Strecke von der gegebenen endlichen Länge l gibt, deren sämtliche Punkte von f^0 einen Abstand haben, der kleiner als die gegebene Strecke $a > 0$ ist. Wir wollen, wenn diese Verhältnisse bei den Geraden f^0 und g^0 vorliegen, kurz sagen[37]): „*f^0 approximiert g^0 im Maße a auf die Länge l*“. Durch Umklappung um die geeignete der beiden Symmetrieachsen von f^0 und g^0 (nämlich diejenige, die die von den Punkten der von f^0 approximierten, auf g^0 liegenden Strecke auf f^0 gefällten Lote schneidet) erkennen wir,

---

[38]) J. Nielsen, loc. cit. S. 40.

[39]) J. Nielsen, loc. cit. und J. Nielsen, Zur Topologie der geschlossenen Flächen, Matematikerkongressen i København 1925 (Kopenhagen 1925), S. 263 ff.

laß diese Beziehung zwischen f^0 und g^0 wechselseitig ist; es gilt auch: ^{0} *approximiert* f^0 *im Maße* a *auf die Länge* l. Diese Sprechweise übertragen wir auch auf die Spuren f und g von f^0 und g^0 in einer C-K-Fläche.

Die geforderte Lagenbeziehung zwischen g^0 und f^0 kann auf drei Arten verwirklicht werden, nämlich dadurch, daß einer der folgenden Fälle eintritt:

1. f^0 und g^0 sind asymptotisch.

2. f^0 und g^0 haben einen eigentlichen Punkt gemein; der Winkel ξ zwischen f^0 und g^0 muß dann kleiner als der aus der Gleichung

$$\sin \xi_0 = \mathfrak{Sin}\, a : \mathfrak{Sin}\, \frac{l}{2}$$

zu berechnende, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Winkel ξ_0 sein; hier muß ersichtlich $a < \frac{l}{2}$ gegeben sein (sonst dürfte ξ_0 jeden Wert haben). Man erhält diese Gleichung durch Anwendung des Sinussatzes der hyperbolischen Trigonometrie (wenn man das Krümmungsmaß der hyperbolischen Ebene, wie es von nun an geschehen soll, gleich -1 annimmt).

3. f^0 und g^0 haben ein eigentliches gemeinsames Lot; der kürzeste Abstand x von f^0 und g^0 muß in diesem Fall kleiner sein als die der Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\, x_0 = \mathfrak{Sin}\, a : \mathfrak{Cof}\, \frac{l}{2}$$

genügende Länge x_0. Diese Gleichung gilt zwischen drei benachbarten Seiten von den Längen x_0, a, $\frac{l}{2}$ in einem Viereck der hyperbolischen Ebene mit drei rechten Winkeln (Spitzeck), wenn die Seite mit der Länge $\frac{l}{2}$ zwischen den Seiten mit den Längen x_0 und a liegt und die Seiten mit den Längen $\frac{l}{2}$ und a den spitzen Winkel einschließen.

Man überzeugt sich auf Grund der angegebenen Formeln ohne Mühe davon, daß unter der Voraussetzung $z > 1$ jede Approximation zwischen ^{0} und g^0 im Maße a auf die Länge zl zugleich auch eine Approximation zwischen f^0 und g^0 im Maße a_z auf die Länge l ist, wenn a_z die Wurzel der Gleichung

$$*) \qquad \mathfrak{Sin}\, a_z = \mathfrak{Sin}\, a \cdot \mathfrak{Cof}\, \frac{l}{2} : \mathfrak{Cof}\, z\frac{l}{2}$$

ist. Wenn f^0 und g^0 einen eigentlichen Punkt gemein haben, muß nämlich (es sei $l > 2a$)

$$\sin \xi_0 = \mathfrak{Sin}\, a : \mathfrak{Sin}\, z\frac{l}{2} = \mathfrak{Sin}\, a_z : \mathfrak{Sin}\, \frac{l}{2},$$

also

$$\mathfrak{Sin}\, a_z = \mathfrak{Sin}\, a \cdot \mathfrak{Sin}\, \frac{l}{2} : \mathfrak{Sin}\, z\, \frac{l}{2}$$

sein; wenn f^0 und g^0 ein gemeinsames Lot haben, muß

$$\mathfrak{Sin}\, x_0 = \mathfrak{Sin}\, a : \mathfrak{Cof}\, z\, \frac{l}{2} = \mathfrak{Sin}\, a_z : \mathfrak{Cof}\, \frac{l}{2},$$

also

$$\mathfrak{Sin}\, a_z = \mathfrak{Sin}\, a \cdot \mathfrak{Cof}\, \frac{l}{2} : \mathfrak{Cof}\, z\, \frac{l}{2}$$

sein. Nun ist aber (wegen $z > 1$) stets $\mathfrak{Cof}\, \frac{l}{2} : \mathfrak{Cof}\, z\, \frac{l}{2} > \mathfrak{Sin}\, \frac{l}{2} : \mathfrak{Sin}\, z\, \frac{l}{2}$, also die aus der oben angegebenen Gleichung (*) berechnete Wurzel a_z die größere. Da $\mathfrak{Cof}\, \frac{l}{2} : \mathfrak{Cof}\, z\, \frac{l}{2} < 1$ ist, so ist immer

$$a_z < a,$$

und wenn z unbegrenzt wächst, so konvergiert a_z gegen 0.

Nun erhalten wir (Fig. 6) die Geraden f^0 durch $\mathfrak{u}^0$, die von g^0 den kürzesten Abstand x_0 haben, als Tangenten $t_1'^0$, $t_2'^0$ an die Abstandslinie $k^0(g^0, x_0)$ mit der Mittelachse g^0, deren Punkte von g^0 den Abstand x_0 haben. ($k^0(g^0, x_0)$ erscheint in der von uns benutzten euklidischen Zeichenebene, in der der absolute Kegelschnitt u^0 auf einen Kreis abgebildet ist, als Ellipse, die u^0 in den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{u}_2^0$ von g^0 mit u^0 von innen berührt.) $t_1'^0$ und $t_2'^0$ sind bezüglich des Lotes s^0 von $\mathfrak{u}^0$ auf g^0 zueinander symmetrisch; wir betrachten darum des weiteren nur diejenige der durch s^0 begrenzten Halbebenen, die $\mathfrak{u}_1^0$ enthält und in der das aus eigentlichen Punkten bestehende Stück $t_1'^0$ liege. $t_1'^0$ schneidet u^0 außer in $\mathfrak{u}^0$ in einem Punkte $\mathfrak{v}^0$, der mit $\mathfrak{u}_1^0$ ein nicht verschwindendes Intervall b'^0 auf u^0 bildet — b'^0 sei derjenige der beiden von $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{v}^0$ begrenzten Bögen auf u^0, der $\mathfrak{u}^0$ nicht enthält. Jeder innere Punkt von b'^0 bestimmt zusammen mit $\mathfrak{u}^0$ eine Gerade f^0, die mit g^0 ein gemeinsames Lot besitzt, dessen Länge kleiner als x_0 ist, die mit anderen Worten g^0 im Maße a auf die Länge l approximiert

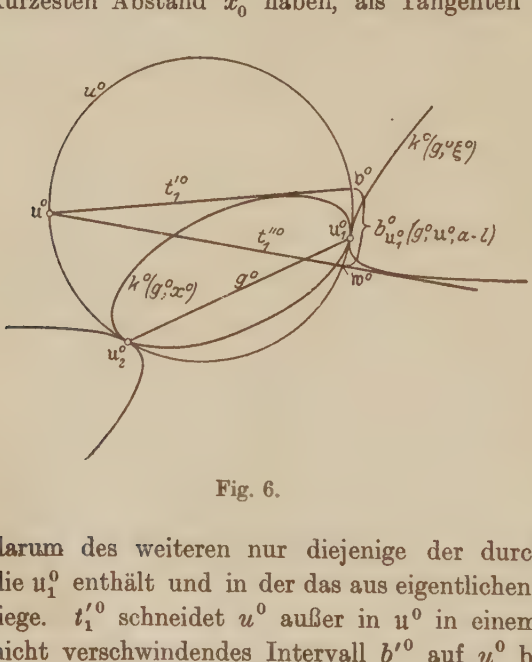


Fig. 6.

während dies keine der Geraden tut, die $\mathfrak{u}^0$ mit einem Punkt des von $\mathfrak{u}^0$ und $\mathfrak{v}^0$ begrenzten, $\mathfrak{u}_1^0$ nicht enthaltenden Bogens verbinden).

Die Geraden f^0 durch $\mathfrak{u}^0$, die g^0 in einem eigentlichen Punkt unter dem Winkel ξ_0 schneiden, erhalten wir entsprechend (Fig. 6) als Tangenten $t_1''^0$, $t_2''^0$ an den Kegelschnitt $k^0(g^0, \xi_0)$, der von den g^0 unter dem Winkel ξ_0 schneidenden Geraden umhüllt wird; dieser Kegelschnitt berührt ebenfalls u^0 in $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{u}_2^0$, aber von außen, da er aus lauter uneigentlichen Punkten besteht. ($k^0(g^0, \xi_0)$ erscheint in unserer Zeichenebene immer als Hyperbel, die außerhalb von u^0 liegt.) Die Tangente $t_1''^0$ durch $\mathfrak{u}^0$ an $k^0(g^0, \xi_0)$, deren eigentliches Stück auf derselben Seite von s^0 liegt wie $\mathfrak{u}_1^0$, schneidet u^0 außer in $\mathfrak{u}^0$ in einem Punkt $\mathfrak{w}^0$; $\mathfrak{w}^0$ bildet mit $\mathfrak{u}_1^0$ zusammen ein nicht verschwindendes Intervall b''^0 auf u^0 — b''^0 sei derjenige der beiden von $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{w}^0$ begrenzten Bögen auf u^0, der $\mathfrak{u}^0$ nicht enthält. Jeder innere Punkt von b''^0 bestimmt mit $\mathfrak{u}^0$ zusammen eine Gerade, die g^0 unter einem Winkel schneidet, der kleiner als ξ_0 ist, die, kürzer ausgedrückt, g^0 im Maße a auf die Länge l approximiert. (Dies gilt, wie man leicht erkennt, auch dann, wenn — anders als in der Figur — der Berührungspunkt von $t_1''^0$ auf dem durch $\mathfrak{u}_2^0$ gehenden Aste der Hyperbel $k^0(g^0, \xi_0)$ liegt.)

Da die Gerade $\mathfrak{u}^0\mathfrak{u}_1^0$ als Asymptote zu g^0 gewiß g^0 im Maße a auf die Länge l approximiert, so bilden b'^0 und b''^0 zusammen ein $\mathfrak{u}_1^0$ im Innern enthaltendes (nicht verschwindendes) Intervall, dessen sämtliche inneren Punkte mit $\mathfrak{u}^0$ zusammen Geraden f^0 bestimmen, die g^0 im Maße a auf die Länge l approximieren.

Wir fassen das für das Folgende Wesentliche zusammen in dem Satz:

Wenn eine eigentliche Gerade g^0 und ein unendlich ferner Punkt $\mathfrak{u}^0$, der nicht auf g^0 liegt, ferner zwei endliche Strecken $a > 0$ und $l > 2a$ (und zwar a beliebig klein, l beliebig groß) gegeben sind, so gibt es zwei (nicht verschwindende) Intervalle auf dem absoluten Kegelschnitt u^0, von denen jedes einen der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{u}_1^0$ und $\mathfrak{u}_2^0$ von g^0 im Innern enthält, deren innere Punkte zusammen mit $\mathfrak{u}^0$ Geraden f^0 bestimmen, die g^0 im Maße a auf die Länge l approximieren.

Wir bezeichnen dasjenige dieser Intervalle, das $\mathfrak{u}_1^0$ enthält, kurz mit

$$b_{\mathfrak{u}_1^0}^0(g^0, \mathfrak{u}^0, a\text{-}l).$$

Vergegenwärtigt man sich die soeben dargestellte Konstruktion dieser Intervalle, so erkennt man, daß jeder Punkt von $b_{\mathfrak{u}_1^0}^0(g^0, \mathfrak{u}^0, a\text{-}l)$ auch mit jedem Punkt eines Intervalles j^0, das ganz dem $\mathfrak{u}_1^0$ nicht enthaltenden Bogen $\mathfrak{u}^0\mathfrak{u}_2^0$ von u^0 angehört,

eine Gerade bestimmt, die g^0 im Maße a auf die Länge l approximiert; wir wollen das Intervall $b^0_{\mathfrak{u}^0_1}(g^0, \mathfrak{u}^0, a\text{-}l)$, wenn wir diesen Sachverhalt kurz ausdrücken wollen, mit

$$b^0_{\mathfrak{u}^0_1}(g^0, j^0, a\text{-}l)$$

bezeichnen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir zunächst einen von J. Nielsen [40] für geschlossene, zweiseitige C-K-Flächen negativer Krümmung mit gewissen Symmetrieeigenschaften aufgestellten Satz, der sich wörtlich auf alle C-K-Flächen, auch Nicht-Killingsche, mit positiver oder unendlicher Charakteristik übertragen läßt, beweisen; wir geben diesem Satz die Fassung:

Wenn in einer C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit positiver Charakteristik eine endliche Anzahl beliebiger geschlossener Geraden und die Länge $a > 0$ gegeben ist, so kann man eine geschlossene Gerade finden, die jede der gegebenen geschlossenen Geraden im Maße a in deren ganzer Länge approximiert.

Zum Beweise bedienen wir uns einer Konstruktion, deren wesentlicher Gedanke von J. Nielsen [41]) stammt: $g^0_1, g^0_2, \ldots, g^0_k$ seien Bilder der gegebenen geschlossenen Geraden; s_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sei die Länge von g_i. Wir suchen einen nicht verschwindenden Bogen j^0 auf u^0 aus, der einen Fixpunkt $\mathfrak{u}^0$ der Gruppe Γ der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$ im Innern enthält. Dann wählen wir einen der unendlich fernen Punkte von g^0_1, $\mathfrak{u}^0_1$, aus und konstruieren das Intervall $j^0_1 = b^0_{\mathfrak{u}^0_1}(g^0_1, j^0, a\text{-}s_1)$. Wenn g^0_2 keinen Punkt mit j^0_1 gemein hat, so ersetzen wir g^0_2 durch eine zu g^0_2 bezüglich Γ äquivalente Achse g'^0_2, die in einen inneren Punkt $\mathfrak{u}^0_2$ von j^0_1 einmündet; eine solche können wir immer finden, etwa durch genügend häufige Wiederholung einer Deckbewegung von $\mathfrak{E}$, durch die g^0_1 gegen $\mathfrak{u}^0_1$ hin in sich verschoben wird. Dann sei j^0_2 derjenige Teil von $b^0_{\mathfrak{u}^0_2}(g'^0_2, j^0, a\text{-}s_2)$, der in j^0_1 liegt; j^0_2 ist ein nicht verschwindender Bogen auf u^0. Wenn g^0_3 nicht schon in einen inneren Punkt von j^0_2 einmündet, so ersetzen wir g^0_3 durch eine zu g^0_3 bezüglich Γ äquivalente Achse g'^0_3, die einen inneren Punkt $\mathfrak{u}^0_3$ von j^0_2 mit u^0 gemein hat; eine solche können wir immer, wie oben, durch Anwendung passender, zu Γ gehörender Bewegungen mit der Achse g'^0_2 finden. j^0_3 sei der Teil von $b^0_{\mathfrak{u}^0_3}(g'^0_3, j^0, a\text{-}s_3)$, der in j^0_2 liegt; j^0_3 besteht wie j^0_2 aus mehr als einem Punkt. So fahren wir fort: Wir ersetzen, wenn dies nötig sein sollte, g^0_4 durch eine zu g^0_4 bezüglich Γ äquivalente Achse g'^0_4, die durch einen Punkt $\mathfrak{u}^0_4$ innerhalb j^0_3 geht; man kann eine solche sicher durch eine geeignete Bewegung von Γ mit der Achse g'^0_3 erhalten. Dann sei j^0_4 der zu j^0_3 gehörende Teil von $b^0_{\mathfrak{u}^0_4}(g'^0_4, j^0, a\text{-}s_4)$. Schließlich, nach

---

[40]) J. Nielsen, loc. cit. (Fußnote [20])) S. 44.

[41]) J. Nielsen, loc. cit. S. 41 f.

einer endlichen Anzahl von Schritten, gelangen wir so zu j_k^0, einem nicht verschwindenden Intervall, das ganz in allen Intervallen $b_{u_i^0}^0(g_i'^0, j^0, a\text{-}s_i)$ liegt. Da j^0 den Fixpunkt u^0, j_k^0 den Fixpunkt u_k^0, in den $g_k'^0$ mündet, im Innern enthält, so können wir mit Hilfe der beiden in u^0 und in u_k^0 endigenden Achsen von Γ genau wie im Abschnitt III (S. 590 f.) eine Achse g^0 konstruieren, die einen unendlich fernen Punkt in j^0 und einen unendlich fernen Punkt in j_k^0 besitzt. Die Spur von g^0 in $\mathfrak{E}$ ist eine geschlossene Gerade, die jede der gegebenen geschlossenen Geraden in dem vorgeschriebenen Maße a in deren ganzer Länge approximiert.

Der hiermit bewiesene Satz kann noch ein wenig verallgemeinert werden:

Wenn in $\mathfrak{E}$ eine endliche Menge von Binnenstrecken und eine Länge $a > 0$ gegeben ist, so gibt es geschlossene Geraden, die jede dieser Strecken im Maße a approximieren[42]).

Wir deuten den Beweis nur an: Es seien $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}_k\mathfrak{b}_k$ die gegebenen Strecken, $l_1, l_2, \ldots, l_k$ ihre Längen. Wir suchen zu jeder dieser Strecken eine geschlossene Gerade g_i, die sie im Maße $\frac{a}{2}$ approximiert; s_i sei die Länge von g_i. Dann suchen wir eine geschlossene Gerade, die jede der geschlossenen Geraden g_i im Maße $\frac{a}{2}$ auf die Länge $z\,s_i$ approximiert, wo die ganze Zahl $z \geqq 2$ so gewählt sein soll, daß $z\,s_i > 2\,l_i$ ist. Diese approximiert jede der gegebenen Strecken $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i$ im Maße a.

Man kann aber sogar behaupten:

Auf jeder C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ mit endlicher positiver Charakteristik c, die keine Nicht-Killingsche Fläche ist, kann man, wenn die endliche Länge l und die von Null verschiedene Länge a gegeben ist, eine geschlossene Gerade finden, die jede Binnenstrecke, deren Länge $\leqq l$ ist, im Maße a approximiert.

(Auf einer Nicht-Killingschen Fläche kann es solche geschlossenen Geraden gewiß nicht geben, weil jede geschlossene Gerade ganz innerhalb eines beschränkten Bereiches des Binnenteils liegt, während, wie leicht zu erkennen ist, Binnengeraden in „beliebiger Nähe“ jeder uneigentlichen Punktierung vorüberlaufen; Entsprechendes gilt für die C-K-Flächen mit unendlicher Charakteristik.)

Zum Beweise betrachten wir (Fig. 7) ein Bild $\mathfrak{B}^0$ des Binnenteils $\mathfrak{B}$, das eine Abwicklung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}^0$ entwirft. Da c als positiv vorausgesetzt ist, gibt es einen Binnenteil; da c endlich und $\mathfrak{E}$ keine Nicht-Killingsche Fläche sein soll, kann $\mathfrak{B}^0$ so ausgewählt werden, daß es im Innern eines Kreises k'^0 von endlichem Radius b' liegt. Nun besitzt jede Strecke auf $\mathfrak{E}$,

[42]) Dieser Satz ist ersichtlich eine Verallgemeinerung des im Abschnitt III bewiesenen Satzes.

die einen Punkt mit dem Binnenteil gemein hat, und deren Länge $\leqq l$ ist, wenigstens ein Bild in $\mathfrak{E}^0$, das einen Punkt mit $\mathfrak{B}^0$ gemein hat und das deshalb ganz im Innern eines zu k'^0 konzentrischen Kreises k^0 mit dem Radius $b = b' + l$ liegt. (Wir wollen uns — nur um uns bequemer ausdrücken zu können — die Abbildung der hyperbolischen Ebene $\mathfrak{E}^0$ auf unsere euklidische Zeichenebene so vorgenommen denken, daß der absolute Kegelschnitt u^0 in der euklidischen Maßbestimmung der Zeichenebene als Kreis und k^0 als ein zu u^0 konzentrischer Kreis erscheint.)

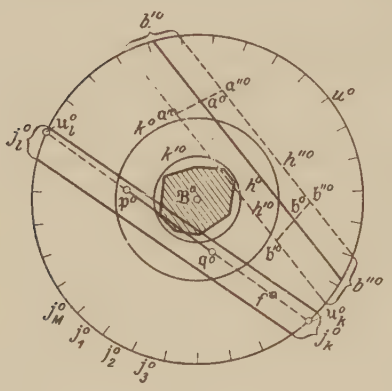


Fig. 7.

Jetzt fassen wir irgendeine Gerade h^0 ins Auge, die k^0 in reellen Punkten schneidet, und zeichnen auf ihr eine Strecke $\mathfrak{a}^0\mathfrak{b}^0$ von der Länge $2b$, die von dem auf h^0 senkrechten Durchmesser von k^0 halbiert wird; dann tragen wir auf den in $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b}^0$ auf h^0 errichteten Loten von den Fußpunkten aus nach beiden Seiten hin je die Strecke $\frac{a}{4}$ ab und verbinden die so gefundenen Punkte $\mathfrak{a}'^0$, $\mathfrak{a}''^0$, $\mathfrak{b}'^0$, $\mathfrak{b}''^0$ durch diejenigen beiden Geraden h'^0 und h''^0, die h^0 nicht in eigentlichen Punkten schneiden. h'^0 und h''^0 schneiden aus u^0 zwei zwischen h'^0 und h''^0 liegende Intervalle b'^0 und b''^0 aus. Diese Intervalle denken wir uns für alle möglichen, k^0 in eigentlichen Punkten schneidenden Geraden h^0 konstruiert. j' sei eine untere Schranke ihrer im euklidischen Maß der Zeichenebene gemessenen Längen. (Die Intervalle b'^0 und b''^0 sind um so kleiner, je größer der Abstand der Geraden h^0 vom Mittelpunkt des Kreises k^0 ist; doch spielt dies im folgenden keine Rolle.) Dann teilen wir u^0 in lauter Intervalle ein, die im euklidischen Maß der Zeichenebene untereinander gleich groß und dabei kleiner als j' sind; ihre Länge sei j, ihre Anzahl M, die Intervalle selbst bezeichnen wir mit $j_1^0, j_2^0, j_3^0, \ldots, j_M^0$. Nun sei $\mathfrak{p}^0\mathfrak{q}^0$ irgendeine ganz im Innern von k^0 liegende Strecke; die sie tragende Gerade f^0 trifft u^0 in inneren Punkten oder Randpunkten zweier Intervalle j_k^0, j_l^0, liegt also (abgesehen höchstens von ihren unendlich fernen Punkten) ganz im Innern oder auf einer Randgeraden des Gebietes von $\mathfrak{E}^0$, das zwischen den beiden, die Endpunkte von j_k^0 mit den Endpunkten von j_l^0 verbindenden, sich in keinem eigentlichen oder unendlich fernen Punkte schneidenden Geraden liegt, und das wir hier kurz den „Streifen $j_k^0\, j_l^0$“ nennen wollen. Aus der Entstehung der Intervalle j_k^0, j_l^0 folgt, daß jede andere Gerade, deren

sämtliche eigentlichen Punkte in dem Streifen $j_k^0 j_l^0$ liegen, die Strecke $\mathfrak{p}^0\mathfrak{q}^0$ im Maße $\frac{a}{2}$ approximiert. Liegt $\mathfrak{p}^0\mathfrak{q}^0$ auf dem Bild f^0 einer Binnengeraden, so mündet dieses in zwei Grenzpunkte u_k^0 und u_l^0 von Γ ein, von denen der eine, u_k^0, ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von j_k^0, der andere, u_l^0, ein innerer Punkt oder ein Endpunkt von j_l^0 ist. Liegen u_k^0 und u_l^0 innerhalb von j_k^0 und j_l^0, so kann man aber (nach Abschnitt III) eine Achse g_{kl}^0 von Γ finden, die einen Punkt von j_k^0 mit einem Punkt von j_l^0 verbindet; ist u_k^0 ein Randpunkt von j_k^0, so muß man nötigenfalls vorher j_k^0 durch das von ihm durch u_k^0 getrennte Nachbarintervall $j_{k'}^0$, und den Streifen $j_k^0 j_l^0$ durch den Streifen $j_{k'}^0 j_l^0$ ersetzen, der ebenfalls f^0 im Innern oder als Randgerade enthält (dies ist dann nötig, wenn u_k^0 ein Fixpunkt von Γ ist und j_k^0 aus lauter Bildpunkten einer unerreichbaren Kontur von $\mathfrak{E}$ besteht, also fixpunktfrei ist; in diesem Fall enthält aber $j_{k'}^0$ tatsächlich stets Fixpunkte im Innern), und ebenso muß nötigenfalls j_l^0 durch ein Nachbarintervall $j_{l'}^0$ ersetzt werden. Man kann hiernach zu jedem durch einen Punkt innerhalb k^0 laufenden Bild einer Binnengeraden wenigstens einen Streifen $j_k^0 j_l^0$ finden, der es, soweit es eigentlich ist, entweder in seinem Innern oder als Randgerade enthält und an dessen Innerem zudem eine Achse g_{kl}^0 von Γ mit allen ihren eigentlichen Punkten teilhat. Da die Anzahl N aller Streifen $j_k^0 j_l^0$ endlich, nämlich $< M^2$ ist, und da, wie wir oben schon sahen, jede auf einer Binnengeraden liegende Strecke von $\mathfrak{E}$, deren Länge $\leqq l$ ist, ein Bild innerhalb k^0 besitzt, so erkennen wir:

Wir können eine endliche Anzahl von geschlossenen Geraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_N$ in $\mathfrak{E}$ finden von der Art, daß jede auf einer Binnengeraden von $\mathfrak{E}$ liegende Strecke, deren Länge $\leqq l$ ist, von wenigstens einer dieser geschlossenen Geraden g_i im Maße $\frac{a}{2}$ approximiert wird; $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N$ seien die Längen von $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_N$. Jetzt konstruieren wir eine geschlossene Gerade g, die jede der Geraden g_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ im Maße $\frac{a}{2}$ auf die Länge $z s_i$ approximiert, wo die ganze Zahl $z \geqq 2$ so gewählt sein soll, daß $z s_i > 2l$ ist. Diese Gerade g wird jede Strecke, deren Länge $\leqq l$ ist und die von den geschlossenen Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_N$ im Maße $\frac{a}{2}$ approximiert wird, also nach dem oben Gesagten überhaupt jede auf einer Binnengeraden liegende Strecke, deren Länge höchstens $= l$ ist, im Maße a approximieren. Damit ist unser Satz bewiesen.

Da in einer geschlossenen C-K-Fläche negativer Krümmung jede Strecke eine Binnenstrecke ist, so folgt ohne weiteres:

In einer geschlossenen C-K-Fläche mit positiver Charakteristik gibt es geschlossene Geraden, die alle Strecken, deren Länge eine gegebene obere Schranke haben, in vorgeschriebenem Maße approximieren.

Der hiermit bewiesene Satz umfaßt als besonderen Fall den folgenden, von J. Nielsen für spezielle geschlossene Flächen negativer Krümmung aufgestellten Satz[43]):

In einer geschlossenen C-K-Fläche negativer Krümmung kann man, wenn eine beliebige Länge $a > 0$ gegeben ist, eine geschlossene Gerade finden, die jedem Punkte der Fläche näher kommt als auf den Abstand a.

Ist $a > 0$ gegeben, so kann man folglich in jeder geschlossenen C-K-Fläche negativer Krümmung einen Streifen konstanter Breite $2a$ mit einer geschlossenen Geraden als Mittelachse (dessen Gesamtlänge also endlich ist) finden, der allein die ganze Fläche überdeckt (vgl. den Schluß des vorigen Abschnitts).

V. Approximationen durch Strahlen.

Wieder fassen wir eine bestimmte C-K-Fläche $\mathfrak{F}$ mit positiver Charakteristik ins Auge. (Die Fläche darf ein- oder zweiseitig, sie darf auch eine Nicht-Killingsche Mannigfaltigkeit sein, und ihre Charakteristik braucht nicht endlich zu sein.)

Im Anschluß an J. Nielsen wollen wir auf ihr das Vorhandensein von Geraden f nachweisen, die nicht nur jedem Punkte jeder geschlossenen Geraden (daher nach Abschnitt III auch jedem Punkte jeder Binnengeraden) beliebig nahe kommen, sondern sogar die folgende Eigenschaft besitzen: *Wenn um eine beliebige geschlossene Gerade g als Mittelachse ein Streifen von beliebig kleiner (aber nicht verschwindender) fester Breite gezeichnet wird, so kommt es unendlich oft vor, daß die Gerade f, nachdem sie in den Streifen eingedrungen ist, diesen erst wieder verläßt, nachdem sie ihn wenigstens einmal in seiner ganzen Länge durchlaufen hat.* Man kann dies auch so ausdrücken: *Wenn wir auf f einen Punkt $\mathfrak{p}$ stetig in einer bestimmten Richtung (am einfachsten mit konstanter, nicht verschwindender Geschwindigkeit) bewegen, so gibt es unter den Loten $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, die man von $\mathfrak{p}$ auf g fällen kann — $\mathfrak{q}$ bedeute den Fußpunkt dieses Lotes auf g —, unendlich viele solche, die, mit $\mathfrak{p}$ stetig mitbewegt, einmal kleiner als eine beliebig vorgegebene (nicht verschwindende) Strecke werden und so lange auch bleiben, bis $\mathfrak{q}$ wenigstens einmal die geschlossene Gerade g ganz durchlaufen hat.*

Jedes Bild einer solchen Geraden f, das durch eine Abwicklung von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}^0$ geliefert wird, muß wenigstens ein Bild jeder geschlossenen Geraden g im Maße a in ihrer ganzen Länge s approximieren, wo $a > 0$ eine beliebig vorschreibbare Strecke ist. Eine Gerade, die das leistet, erhalten wir aber auf die folgende Weise:

---

[43]) J. Nielsen, loc. cit. S. 44.

Wir wählen zunächst aus jeder Klasse untereinander gleichberechtigter (d. h. durch Bewegungen von Γ ineinander transformierbarer) Deckbewegungen eine aus und ordnen die so ausgewählten Deckbewegungen in einer bestimmten Reihenfolge $C_1, C_2, C_3, \ldots$ an; dies ist möglich, weil die Menge der Deckbewegungen, also erst recht die der ausgewählten Repräsentanten abzählbar ist (und zwar auch, wenn c unendlich groß ist).

Die Achsen g_i^0 dieser Bewegungen C_i, unter denen von jeder geschlossenen Geraden wenigstens ein Bild vorkommt, sind damit auch in eine bestimmte Reihenfolge gebracht; die Schiebungsgröße der Deckbewegung C_i sei s_i — sie ist ein ganzzahliges Vielfaches der Länge der schlossenen Geraden, die die Spur von g_i^0 ist. $a > 0$ sei eine beliebig gegebene Länge.

Jetzt nehmen wir einen beliebigen unendlich fernen Punkt $\mathfrak{u}^0$ an, der der Bequemlichkeit halber kein Fixpunkt von Γ sei. Dann wählen wir einen der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{u}_1^0$ von g_1^0 aus und konstruieren das Intervall $j_1^0 = b_{\mathfrak{u}_1^0}^0(g_1^0, \mathfrak{u}^0, a\text{-}s_1)$. Danach suchen wir eine zu g_2^0 bezüglich Γ äquivalente Achse $g_2'^0$, die durch einen inneren Punkt $\mathfrak{u}_2^0$ von j_1^0 geht[44]), und konstruieren den Durchschnitt j_2^0 von j_1^0 und $b_{\mathfrak{u}_2^0}^0(g_2'^0, \mathfrak{u}^0, a\text{-}s_2)$; j_2^0 ist ein nichtverschwindender Bogen auf u^0. So fahren wir wie im vorigen Abschnitt (S. 596 f.) fort: Wir ersetzen, wenn dies nötig sein sollte, g_3^0 durch eine zu g_3^0 bezüglich Γ äquivalente Achse $g_3'^0$, die durch einen Punkt $\mathfrak{u}_3^0$ innerhalb j_2^0 geht. Dann sei j_3^0 der zu j_2^0 gehörende Teil von $b_{\mathfrak{u}_3^0}^0(g_3'^0, \mathfrak{u}^0, a\text{-}s_3)$ usw. Wir erhalten so eine Folge von (nichtverschwindenden) Intervallen $j_1^0, j_2^0, j_3^0, \ldots$, von denen jedes in allen vorhergehenden enthalten ist. Es gibt folglich wenigstens einen Punkt $\mathfrak{n}^0$, der allen diesen Intervallen angehört. Daraus ist zu schließen: *Zu jeder Achse g_i^0 gibt es (wenigstens) eine bezüglich Γ äquivalente Achse $g_i'^0$, die die Gerade $\mathfrak{u}^0\mathfrak{n}^0 = f^0$ im Maße a auf die Länge s_i approximiert*[44]).

Nun besitzt jede geschlossene Gerade in $\mathfrak{E}$ unter den Achsen g_i^0, mithin auch unter den Achsen $g_i'^0$ Bilder, und zwar unendlich viele[45]); denn, da wir in die Reihe $C_1, C_2, C_3, \ldots$ zu jeder Deckbewegung C von $\mathfrak{E}$ eine durch Transformation (vermittels einer Bewegung von Γ) in C überführbare Deckbewegung aufgenommen haben, so erscheinen, wenn g^0 ein Bild irgendeiner beliebig herausgegriffenen geschlossenen Geraden g in $\mathfrak{E}$ ist, in der Folge $g_1^0, g_2'^0, g_3'^0, g_4'^0, \ldots$ außer einer zu g^0 bezüglich Γ äquivalenten Achse $g_k'^0$, deren zugehörige, durch Transformation aus C_k hervorgehende Deckbewegung C_k' als Schiebungsgröße die einfache Länge s von g hat,

---

[44]) J. Nielsen, loc. cit. S. 41 f.

[45]) Diese können allerdings zum Teil zusammenfallen (dies würde jedoch die folgende Beweisführung nicht beeinträchtigen).

noch unendlich viele zu g^0 bezüglich Γ äquivalente Achsen $g_l'^0, g_m'^0, g_r'^0, \ldots$, deren zugehörige, aus $C_l, C_m, C_r, \ldots$ durch Transformation hervorgehende Deckbewegungen $C_l', C_m', C_r', \ldots$ das 2-fache, 3-fache, 4-fache, ... der Länge s von g als Schiebungsgrößen haben[46]). Es gibt also, wenn $z > 1$ eine beliebige ganze Zahl ist, wenigstens eine zu g^0 bezüglich Γ äquivalente Achse, die von f^0 im Maße a auf die Länge $z\,s$ approximiert wird. Nun ist, wie wir oben (S. 593 f.), sahen, eine Approximation im Maße a auf die Länge $z\,s$ zwischen zwei Geraden stets auch eine Approximation zwischen diesen Geraden im Maße a_z auf die Länge s, wo a_z die Wurzel der Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\, a_z = \mathfrak{Sin}\, a \cdot \mathfrak{Cof}\tfrac{s}{2} : \mathfrak{Cof}\, z\tfrac{s}{2}$$

ist, und es ist

$$\lim_{z \to \infty} a_z = 0.$$

Damit ist bewiesen, daß die Spur von f^0 in $\mathfrak{E}$ jede geschlossene Gerade in beliebig starkem Maße oder, wie man auch sagen kann, „unendlich stark" in deren ganzer Länge approximiert[47]).

Hieraus folgt sofort weiter, daß auch jeder zu f in der Richtung nach π asymptotische Strahl f' jede geschlossene Gerade unendlich stark approximiert.

Sei nämlich a eine beliebige, von 0 verschiedene Länge. Da f in der oben genau beschriebenen Weise jeden Streifen von der Gesamtbreite a, der eine geschlossene Gerade als Mittelachse hat, wenigstens einmal ganz durchläuft, und da ferner jede Asymptote f' zu f in der Richtung gegen π hin einmal in den Streifen von der Gesamtbreite a mit der Mittelachse f eindringt, um ihn nie mehr zu verlassen, so dringt f', wie man durch eine leichte Überlegung erkennt, auch in jeden Streifen von der Breite $2a$, der eine geschlossene Gerade zur Mittelachse hat, ein und durchläuft ihn mindestens einmal seiner ganzen Länge nach. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Das Büschel der Asymptoten mit dem unendlich fernen Scheitel π besteht aus lauter Binnenstrahlen; denn da von einem Außenstrahl nur eine endliche Teilstrecke im Binnenteil liegen kann — es sei daran erinnert, daß wir unter einem Strahl eine von einem erreichbaren Punkt auslaufende Halbgerade verstehen —, so kann er keine einzige geschlossene Gerade in beliebig starkem Maße in ihrer ganzen Länge approximieren. Aber f kann auch nicht in der Richtung nach π hin einer geschlossenen Geraden asymptotisch sein; denn sonst müßte, wie man durch die im vorigen Absatz angewandte Schlußweise erkennen würde, auch diese geschlossene Gerade alle andern geschlossenen Geraden in beliebig starkem

[46]) J. Nielsen, loc. cit. S. 42 f.

[47]) J. Nielsen, loc. cit. S. 43.

Maße in deren ganzer Länge approximieren, und das kann sie wegen ihrer endlichen Länge ebensowenig wie ein Außenstrahl. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{n}^0$ ein Grenzpunkt, aber kein Fixpunkt der Gruppe Γ ist.

Jetzt läßt sich auch beweisen, daß $\mathfrak{n}^0$ der einzige Punkt ist, der in allen den oben konstruierten Intervallen $j_1^0, j_2^0, j_3^0, \ldots$ liegt: Gäbe es nämlich noch einen zweiten, von $\mathfrak{n}^0$ verschiedenen, auch allen diesen Intervallen angehörenden Punkt $\mathfrak{n}'^0$, so würde auch einer der beiden von $\mathfrak{n}^0$ und $\mathfrak{n}'^0$ begrenzten Bögen auf u^0, n^0, in allen diesen Intervallen liegen, und es müßte die Verbindungsgerade von $\mathfrak{u}^0$ mit jedem inneren Punkt von n^0 eine Gerade mit der charakteristischen Eigenschaft der Geraden f^0 sein. Alle Punkte von n^0 müßten also nach dem im vorigen Absatz Bewiesenen Grenzpunkte sein, die keine Fixpunkte sind; dies ist aber unmöglich, da, wie im Abschnitt I (S. 582) gezeigt wurde, jeder Grenzpunkt Häufungspunkt von Fixpunkten ist.

Es gilt ferner:

Wenn s eine beliebig lange Binnenstrecke ist, so approximiert f diese Strecke in unendlich starkem Maße in ihrer ganzen Länge l.

Denn es gibt geschlossene Geraden, die die Strecke s im Maße $\frac{a}{2}$ (in ihrer ganzen Länge l) approximieren, wo a eine beliebige (nicht verschwindende) Länge ist; f approximiert aber diese geschlossenen Geraden im Maße $\frac{a}{2}$ längs eines beliebigen ganzzahligen Vielfachen ihrer ganzen Länge, das $> 2l$ ist. Eine Überlegung, die der auf S. 602 durchgeführten ähnlich ist, lehrt, daß f die Strecke s im Maße a (in ihrer ganzen Länge) approximiert.

Da in einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{E}$ negativer Krümmung ($m = n = 0$, p endlich) jede Gerade eine Binnengerade ist, so folgt[47]):

In jeder geschlossenen Fläche $\mathfrak{E}$ negativer Krümmung gibt es Geraden, die jede beliebige Strecke in unendlich starkem Maße approximieren; eine solche Gerade kommt erst recht jedem Punkt der Fläche unendlich nahe.

VI. Weitere Approximationen durch Geraden.

Die bisher bewiesenen Sätze lassen sich noch in merkwürdiger Weise verallgemeinern:

Es liege eine C-K-Fläche $\mathfrak{E}$ vor, deren Charakteristik $c > 1$ sei. Dann können wir immer aus dem Binnenteil $\mathfrak{B}$ dieser Fläche durch Aufschneiden längs geeigneter Rückkehrgeraden[48]) ein aus weniger als c Doppelsechsecken bestehendes, zusammenhängendes Flächenstück negativer Krümmung,

[48]) Diss. S. 72 ff.

$\mathfrak{B}'$, herausschneiden; setzen wir an seine Randgeraden passende Außenteile an, so erhalten wir eine neue C-K-Fläche $\mathfrak{E}'$. Dabei gehen die Rückkehrgeraden, längs deren wir $\mathfrak{E}$ aufgeschnitten haben, und die äußersten Rückkehrgeraden von $\mathfrak{E}$, die etwa zu $\mathfrak{B}'$ gehören, in äußerste Rückkehrgeraden von $\mathfrak{E}'$ über.

Während nicht alle geschlossenen Geraden von $\mathfrak{E}$ in geschlossene Geraden auf $\mathfrak{E}'$ übergehen, nämlich nur diejenigen, die nicht vom Zerschneiden betroffen werden, die aber in $\mathfrak{B}'$ liegen, muß jede geschlossene Gerade auf $\mathfrak{E}'$ auch auf $\mathfrak{E}$ geschlossen gewesen sein, da wir, wenn wir von $\mathfrak{E}'$ wieder zu $\mathfrak{E}$ übergehen wollen, nur Außenteile abzuschneiden haben und dabei keine geschlossene Gerade verletzen. Ebenso muß jeder Binnenstrahl von $\mathfrak{E}'$ ein Binnenstrahl in $\mathfrak{E}$ gewesen sein. Fassen wir einen solchen Binnenstrahl von $\mathfrak{E}$, der auch ein solcher auf $\mathfrak{E}'$ ist, ins Auge; wir wollen einen Bildpunkt seines unendlich fernen Punktes, den eine Abwicklung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}^0$ entwirft, mit $\mathfrak{v}^0$ bezeichnen.

Besitzt die Fläche $\mathfrak{E}$ Außenteile, so können wir einen unendlich fernen Punkt $\mathfrak{u}^0$, der Bild eines unerreichbaren Randpunktes von $\mathfrak{E}$ ist, mit $\mathfrak{v}^0$ durch eine Gerade h^0 verbinden; ihr entspricht in $\mathfrak{E}$ eine Gerade, die sich aus einem Außenstrahl h'' und einem Binnenstrahl h' zusammensetzt, der, abgesehen höchstens von einem Stück endlicher Länge, ganz in dem Teilgebiet $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ verläuft.

Wir können in $\mathfrak{B}$ außer $\mathfrak{B}'$ noch ein zweites Gebiet $\mathfrak{B}''$ durch Rückkehrgeraden abgrenzen. Ebenso wie vorhin in $\mathfrak{B}'$ können wir in $\mathfrak{B}''$ Binnenstrahlen finden, die, wenn ihr Anfangspunkt geeignet gewählt wird, ganz innerhalb $\mathfrak{B}''$ verlaufen. $\mathfrak{w}^0$ sei ein Bildpunkt des unendlich fernen Punktes eines solchen Binnenstrahls, den die eben erst benützte Abwicklung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}^0$ entwirft.

Die Gerade $\mathfrak{v}^0\mathfrak{w}^0$ liefert dann als Spur in $\mathfrak{E}$ eine Binnengerade h, die, in der einen Richtung verfolgt, von einer gewissen Stelle an ganz in $\mathfrak{B}'$ verläuft, in der andern Richtung aber sich ebenso in $\mathfrak{B}''$ verliert. Gibt es Teile von $\mathfrak{B}$, die weder zu $\mathfrak{B}'$ noch zu $\mathfrak{B}''$ gehören, so kann in diesen also nur eine endliche Anzahl endlicher Stücke von h liegen. Insbesondere gilt dies, wenn $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ ganz voneinander getrennte Gebiete sind. Übrigens könnten aber $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ auch identisch sein; dann wäre h eine Binnengerade, die, abgesehen von einer endlichen Anzahl endlicher Stücke, ganz in $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''$ liegt. (Natürlich gibt es auch Binnengeraden, von denen kein Punkt außerhalb $\mathfrak{B}'$ liegt.)

Man kann sogar noch mehr erreichen: Es sei g eine beliebige geschlossene Gerade in $\mathfrak{E}$. Der Deutlichkeit halber denken wir uns $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}''$ ganz getrennt und g in dem weder zu $\mathfrak{B}'$ noch zu $\mathfrak{B}''$ gehörenden Teile von $\mathfrak{E}$ liegend (doch ist diese Annahme für die Gültigkeit des Fol-

enden unwesentlich). g^0 sei ein Bild von g in der oben schon ver-endeten Abwicklung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}^0$; u_1^0 und u_2^0 seien die beiden unendlich rnen Punkte von g^0. Durch genügend häufige Wiederholung einer Deck-ewegung von $\mathfrak{E}$ mit der Achse g^0 in der einen und in der andern Rich-ung können wir $\mathfrak{v}^0$ in einen zu $\mathfrak{v}^0$ bezüglich Γ äquivalenten Punkt $\mathfrak{v}'^0$, er in einem beliebigen, u_1^0 im Innern enthaltenden Intervall auf u^0 liegt, ^{0} aber in einen zu $\mathfrak{w}^0$ bezüglich Γ äquivalenten Punkt $\mathfrak{w}'^0$, der in nem beliebigen, u_2^0 im Innern enthaltenden Intervall auf u^0 liegt, trans-rmieren. Wir bezeichnen die Gerade $\mathfrak{v}'^0\mathfrak{w}'^0$ mit f'^0. Wenn wir von $\mathfrak{E}^0$ u $\mathfrak{E}$ übergehen, erkennen wir:

Es gibt in $\mathfrak{E}$ Binnengeraden, deren beide Enden sich in den beiden Teilgebieten $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ des Binnenteils verlieren und die dazwischen die geschlossene Gerade g in beliebig vorgegebenem Maße in ihrer ganzen Länge approximieren.

Man könnte auch statt g eine auf einer beliebigen offenen Binnengeraden liegende Strecke $\mathfrak{ab}$ von beliebiger Länge geben und dann eine Gerade finden, die $\mathfrak{ab}$ in beliebig vorgeschriebenem Maße approximiert und die sich in $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ verliert.

Wählt man in $\mathfrak{E}'$ einen Binnenstrahl, der jede geschlossene Gerade von $\mathfrak{E}'$ in beliebig starkem Maße in deren ganzer Länge approximiert, so muß dieser auf $\mathfrak{E}$ ein Binnenstrahl gewesen sein, der jede geschlossene Gerade, die ganz dem Teilbereich $\mathfrak{B}'$ angehört, in unendlich starkem Maße in ihrer ganzen Länge approximierte. Durch die-selbe Schlußweise wie die oben durchgeführte können wir die Existenz von Binnengeraden in $\mathfrak{E}$ nachweisen, die in der einen Richtung jede ge-schlossene Gerade, die ganz in $\mathfrak{B}'$ liegt, in der andern Richtung jede geschlossene Gerade, die ganz in $\mathfrak{B}''$ liegt, in unendlich starkem Maße in deren ganzer Länge approximieren; da von einer solchen Geraden außer-halb von $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ nur endlich viele Stücke von endlicher Länge liegen können, so kann sie keine geschlossene Gerade von $\mathfrak{B}$, die nicht ganz zu $\mathfrak{B}'$ oder zu $\mathfrak{B}''$ (möglicherweise als Randgerade) gehört, unendlich stark approximieren. Doch gibt es unter ihnen immer solche, die eine gegebene, einer Binnengeraden angehörende Strecke (die auch eine geschlossene Gerade sein kann) in vorgeschriebenem Maße approximieren.

Man kann sogar eine beliebige endliche Anzahl beliebiger geschlossener Geraden auswählen und stets eine Binnengerade finden, die jede von diesen geschlossenen Geraden in vorgegebenem Maß in ihrer ganzen Länge approximiert, und deren Enden sich in $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$ verlieren und zudem — wenn man dies noch fordern will — alle geschlossenen Geraden innerhalb $\mathfrak{B}'$ und innerhalb $\mathfrak{B}''$ unendlich stark approximieren.

In der Tat: Seien $g_1^0, g_2^0, \ldots, g_k^0$ Bilder der k gegebenen geschlossenen Geraden und $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ihre Längen. $a > 0$ sei eine beliebig gegebene Länge. u_1^0 sei der eine unendlich ferne Punkt von g_1^0; wir konstruieren (nach Abschnitt IV) das Intervall $j_1^0 = b_{u_1^0}^0(g_1^0, v^0, a\text{-}s_1)$. $g_2'^0$ sei eine zu g_2^0 bezüglich Γ äquivalente Gerade, die in einen Punkt u_2^0 von j_1^0 einmündet; möglicherweise kann $g_2'^0 = g_2^0$ genommen werden. j_2^0 sei der in j_1^0 liegende Teil von $b_{u_2^0}^0(g_2'^0, v^0, a\text{-}s_2)$. So fahren wir in derselben Weise wie im Abschnitt IV (S. 596) fort, bis wir zu dem (sicher nicht verschwindenden) Intervall j_k^0 gelangen, das in allen Intervallen $b_{u_i^0}^0(g_i'^0, v^0, a\text{-}s_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ liegt, wo $g_i'^0$ eine zu g_i^0 bezüglich Γ äquivalente Gerade und u_i^0 einen ihrer unendlich fernen Punkte bedeutet. Jeder Punkt von j_k^0 bestimmt also zusammen mit v^0 eine Gerade, die die Geraden $g_1^0, g_2'^0, \ldots, g_k'^0$ in der vorgeschriebenen Weise approximiert. Nun liegen, da j_k^0 den Fixpunkt u_k^0 im Innern enthält, in j_k^0 auch Punkte w'^0, die zu w^0 bezüglich Γ äquivalent sind. Die Spur der Geraden $v^0 w'^0$ in $\mathfrak{E}$ ist eine Gerade, die die oben geforderten Eigenschaften alle besitzt.

Da jede Binnenstrecke von geschlossenen Geraden in beliebig starkem Maß approximiert werden kann (Abschnitt III), so kann man, wie leicht zu erkennen ist, *statt der k geschlossenen Geraden auch eine beliebige endliche Anzahl von Binnenstrecken beliebiger endlicher Länge geben* und dann Binnengeraden finden, die in der einen Richtung jede geschlossene Gerade in $\mathfrak{B}'$, in der andern Richtung jede geschlossene Gerade in $\mathfrak{B}''$ (sonst aber keine geschlossene Gerade in $\mathfrak{B}$) in unendlich starkem Maße und die gegebenen Strecken in vorgegebenem Maße approximieren.

Schließlich sei noch auf folgendes aufmerksam gemacht:

Im Abschnitt IV (S. 596) wurde das Intervall j^0 so angenommen, daß es einen Fixpunkt u^0 im Innern enthielt; daraufhin wurde das Intervall j_k^0 (S. 597) so konstruiert, daß ebenfalls einer seiner Punkte u_k^0 ein Fixpunkt war. Daher muß jedes dieser Intervalle zu jedem beliebigen unendlich fernen Punkt bezüglich der Gruppe Γ der Deckbewegungen von $\mathfrak{E}$ äquivalente Punkte enthalten (S. 583). Wenn $\mathfrak{E}$ Außenteile besitzt, so müssen mithin sowohl in j^0 als auch in j_k^0 Intervalle u_1^0 und u_2^0 liegen, die Bilder uneigentlicher Konturen von $\mathfrak{E}$ sind (die Grenzpunkte der Gruppe Γ der Deckbewegungen einer mit Konturen behafteten C-K-Fläche positiver Charakteristik bilden ja eine nirgends dichte perfekte Punktmenge auf u^0). Verbindet man einen Punkt von u_1^0 mit einem Punkt von u_2^0 durch eine Gerade h^0, so ist ihre Spur h in $\mathfrak{E}$ aus zwei Außenstrahlen zusammengesetzt und approximiert jede der (im Abschnitt IV, S. 596) gegebenen geschlossenen Geraden im vorgeschriebenen Maße a. Wir haben also den Satz gefunden:

In jeder C-K-Fläche mit positiver oder unendlicher Charakteristik, die wenigstens einen Außenteil[49]) *besitzt, gibt es, wenn eine beliebige endliche Menge von geschlossenen Geraden gegeben ist, Geraden, die jede der gegebenen geschlossenen Geraden in vorgeschriebenem Maße approximieren, und deren beide Enden Außenstrahlen sind.*

Auf Grund ähnlicher Überlegungen, wie sie oben angestellt wurden, *kann man beliebig viele der gegebenen geschlossenen Geraden durch Binnenstrecken ersetzen.*

Man kann die Gerade h^0 so zeichnen, daß sie die Verbindungssehne der Endpunkte von u_1^0 oder die Sehnen der beiden Bögen u_1^0 und u_2^0 unter gegebenen Winkeln, etwa unter rechten, schneidet; die Gerade h in $\mathfrak{F}$ vollzieht dann ihren Übertritt über die zu u_1 homotope äußerste Rückkehrgerade oder die Übertritte über die beiden zu u_1 und u_2 homotopen Rückkehrgeraden unter gegebenen Winkeln.

Ist $\mathfrak{p}^0$ ein beliebiger Punkt auf h^0, so gibt es ein Paar von Scheitelwinkeln mit dem Scheitel $\mathfrak{p}^0$ von der Art, daß jede Gerade durch $\mathfrak{p}^0$, die in diesem Winkelpaar liegt, durch innere Punkte von u_1^0 und von u_2^0 geht; das bedeutet aber: *Jeder Punkt $\mathfrak{p}$ von h ist Scheitel eines Paares von Scheitelwinkeln von der Beschaffenheit, daß jede innerhalb dieses Winkelpaares liegende Gerade durch $\mathfrak{p}$ aus zwei Außenstrahlen besteht und die gegebenen geschlossenen Geraden im Maße a approximiert.*

Unter den oben gemachten Voraussetzungen kann man überhaupt das Verhalten der Enden von h beliebig vorschreiben: Man kann zwei ganz beliebige Strahlen geben und dann die Forderung erfüllen, daß die beiden Enden von h ihnen asymptotisch seien und daß h zudem die gegebenen geschlossenen Geraden oder Binnenstrecken im Maße a approximiere.

---

[49]) Zusatz bei der Korrektur: Der Begriff Außenteil umfasse hier, als Ausartung, auch den von Koebe (in der letzten der in Fußnote [2]) zitierten Arbeiten, S. 432) eingeführten Begriff der „Grenzhalbebene".

(Eingegangen am 28. August 1928.)

Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Man verdankt Herrn Bloch[1]) den

Satz 1. *Es gibt eine absolute positive Konstante P mit folgender Eigenschaft.*

Es sei $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär, $f'(0) = 1$. Dann gibt es eine in $|x| < 1$ schlicht angenommene offene Kreisfläche des Radius P.

Ich definierte[2]) die Blochsche Weltkonstante $\mathfrak{B}$ als obere Grenze der P mit dieser Eigenschaft. Jedes unserer $f(x)$ bedeckt also für jedes $\delta > 0$ ein schlichtes Kreisinneres des Radius $\frac{\mathfrak{B}}{1+\delta}$, und zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $f_\delta(x)$ mit unseren Voraussetzungen, so daß jedes schlicht bedeckte Kreisinnere einen Radius $< \mathfrak{B}(1+\delta)$ hat[3]).

---

[1]) *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières, et la théorie de l'uniformisation* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **178** (1924), S. 2051–2052, und Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, Ser. 3, **17** (1925), S. 1–22], S. 2051 bzw. S. 9.

[2]) *Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante* [Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse, Jahrgang 1926, S. 467–474], S. 471.

[3]) Herr Fenchel machte mich darauf aufmerksam, daß sogar ein Kreisinneres des Radius $\mathfrak{B}$ schlicht angenommen wird (also $\mathfrak{B}$ das Maximum der zulässigen P ist). Wir fanden dann folgenden einfachen Grund. Man wähle ξ_n zu jedem ganzen $n > \frac{2}{\mathfrak{B}}$ so, daß $|y - f(\xi_n)| < \mathfrak{B} - \frac{1}{n}$ schlicht angenommen wird. ξ sei ein Häufungspunkt der ξ_n. Bei jedem positiven $\varepsilon < \frac{\mathfrak{B}}{2}$ ist $|f(\xi_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ für passendes $n > \frac{1}{\varepsilon}$; also wird $|y - f(\xi)| < \mathfrak{B} - 2\varepsilon \left(< \mathfrak{B} - \varepsilon - \frac{1}{n} \right)$ schlicht angenommen; folglich wird $|y - f(\xi)| < \mathfrak{B}$ schlicht angenommen.

Wird die Voraussetzung der Regularität für $|x| \leqq 1$ durch die der Regularität für $|x| < 1$ ersetzt, so ist natürlich die entsprechende Konstante $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$.[4]) Denn erstens ist bei jedem ϑ mit $0 < \vartheta < 1$

$$F(x) = \frac{f(\vartheta x)}{\vartheta}$$

für $|x| \leqq 1$ regulär und

$$F'(0) = 1;$$

$F(x)$ bedeckt also schlicht ein Kreisinneres des Radius $\frac{\mathfrak{B}}{1+\delta}$, $f(x)$ also eines des Radius $\frac{\mathfrak{B}\vartheta}{1+\delta}$; daher ist $(\delta \to 0,\ \vartheta \to 1)$

$$\mathfrak{B}' \geqq \mathfrak{B}.$$

Zweitens ist das obige $f_\delta(x)$ für $|x| < 1$ regulär, also

$$\mathfrak{B}' \leqq \mathfrak{B}(1+\delta),$$

und $\delta \to 0$ gibt

$$\mathfrak{B}' \leqq \mathfrak{B}.$$

Auch die Einführung der Voraussetzung[5])

$$f(0) = 0$$

ändert nichts an der zugehörigen Konstanten (mag Regularität für $|x| \leqq 1$ oder für $|x| < 1$ vorausgesetzt werden); denn jedenfalls hat $f(x) - f(0)$ in 0 auch die Ableitung 1, und die schlichte Kreisfläche $|y - \alpha| < P$ wird nur um $f(0)$ verschoben.

Auch der Spezialfall des Satzes 1, in dem das Wort **schlicht** gestrichen ist, war nicht vor Herrn Bloch formuliert worden[6]). Ich nenne $\mathfrak{L}$ (Weltkonstante) die obere Grenze der P, für die Satz 1 ohne **schlicht** gilt. Jedes unserer $f(x)$ bedeckt also bei jedem $\delta > 0$ ein Kreisinneres des Radius $\frac{\mathfrak{L}}{1+\delta}$, und zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $f_\delta^*(x)$, so daß jedes bedeckte Kreisinnere einen Radius $< \mathfrak{L}(1+\delta)$ hat[7]).

Wie oben erkennt man, daß die obere Grenze der Radien der bedeckten offenen Kreisscheiben auch dann $\mathfrak{L}$ ist, wenn man Regularität nur für $|x| < 1$ fordert oder $f(0) = 0$ voraussetzt oder beides.

---

[4]) Natürlich gilt hier nichts der Anm. [3]) Entsprechendes.

[5]) Loc. cit. hatte ich sie sogar von vornherein gemacht.

[6]) Vgl. S. 468, Anm. [4] meiner in Anm. [2]) genannten Arbeit.

[7]) Hier ist trivial, daß ein $|y - f(\xi)| < \mathfrak{L}$ angenommen wird; denn dem Bilde des abgeschlossenen Einheitskreises muß aus Stetigkeitsgründen eine größte offene Kreisfläche angehören.

Offenbar ist

$$0 < \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{L}.$$

Ich weiß nicht, welchen Wert $\mathfrak{B}$ hat; ich weiß nicht, welchen Wert $\mathfrak{L}$ hat; ich weiß nicht, ob $\mathfrak{B} < \mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$ ist. Diese Mitteilungen rechtfertigen noch keine neue Abhandlung über den Gegenstand; aber ich werde heute u. a. auf sehr indirektem Wege (dessen Zwischenstationen an sich von Interesse sind) beweisen: Es gibt eine Weltkonstante $\delta_0 > 0$, so daß kein $f^*_{\delta_0}(x)$, also auch kein $f_{\delta_0}(x)$ (im Sinne der obigen Erklärungen) schlicht ist.

Ich verstehe nämlich unter $\mathfrak{A}$ die obere Grenze aller absoluten Konstanten $P > 0$, so daß jedes für $|x| \leqq 1$ reguläre **und schlichte** $f(x)$ mit $f'(0) = 1$ dort eine offene Kreisscheibe des Radius P annimmt (also schlicht annimmt).

Wie oben ist klar, daß dasselbe $\mathfrak{A}$ entsteht, wenn man Regularität nur für $|x| < 1$ fordert oder $f(0) = 0$ voraussetzt oder beides.

Aus der Definition folgt

$$\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{L}.$$

Man denke aber nicht, daß die Existenz eines $P > 0$ im Sinne der $\mathfrak{A}$-Definition (d. h. die Existenz von $\mathfrak{A}$) erst durch den Blochschen Satz bewiesen wurde. Vielmehr wissen wir dies seit einem Vierteljahrhundert; denn Hurwitz[8]) hat bewiesen:

Ist $f(x)$ für $|x| < 1$ regulär, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, ist $f(x) \neq 0$ für $0 < |x| < 1$ und $f(x) \neq b$ für $|x| < 1$, so ist

$$|b| > \frac{1}{58}.$$

Mit anderen Worten: Jedes für $|x| < 1$ reguläre und für $0 < |x| < 1$ von 0 verschiedene

$$f(x) = x + \ldots \tag{1}$$

bedeckt die Kreisfläche $|y| \leqq \frac{1}{58}$.

Dies gilt also insbesondere, wenn (1) für $|x| < 1$ regulär und schlicht ist. Der Satz 1 des § 27 meiner *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*[9]) (Kern des Koebeschen Ver-

---

[8]) *Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich **49** (1904), S. 242–253], S. 249.

[9]) Berlin (1916), S. 98.

zerrungssatzes[10]), den ich dort[11]) im Einklang mit der Literatur als Koebesche, zuerst von Herrn Carathéodory bewiesene Vermutung[12]) bezeichnete, war also längst durch Hurwitz bewiesen[13]).

Ich werde nun heute u. a. zeigen:

$$\mathfrak{L} < \frac{9}{16},$$

$$\mathfrak{A} > \frac{9}{16}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{L} \geqq \mathfrak{B}$$

und damit die Existenz der oben angekündigten positiven Weltkonstanten δ_0.

Andererseits hatte ich[14]) nach unten

$$(\mathfrak{L} \geqq)\, \mathfrak{B} \geqq 1 + 3 \log \frac{3}{4} \,(> 0{,}1369)$$

und etwas mehr bewiesen.

Nach oben hatte schon Herr Szegö[15]) durch das Beispiel[16])

$$\left| \Im \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \right| < \frac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad |x| < 1$$

erkannt, daß

$$\mathfrak{A} \leqq \frac{\pi}{4}$$

ist. Also ist

$$\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{L} \leqq \mathfrak{A} \leqq \frac{\pi}{4}.$$

---

[10]) Jener Kern enthielt also vor dem Blochschen Satz die Existenz von $\mathfrak{A}$.

[11]) Loc. cit., S. 16.

[12]) Das fragliche Jahr ist 1907.

[13]) In seiner Arbeit *Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **144** (1907), S. 1203–1206] bestimmte Herr Carathéodory die obere Grenze aller statt $\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{5}}$ im Hurwitzschen Satz zulässigen absoluten Konstanten. Diese Weltkonstante möchte ich aber nicht die Carathéodorysche Konstante $\mathfrak{C}$ nennen, da Herr Carathéodory loc. cit. festgestellt hat, daß sie schon einen anderen Namen, nämlich $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{6})}$, hatte. Seine Arbeit ist Herrn Bochner unbekannt geblieben, der 19 Jahre später den Carathéodoryschen Satz wiederentdeckte, in seiner Arbeit *Remarks on the theorems of Picard-Landau and Picard-Schottky* [The Journal of The London Mathematical Society **1** (1926), S. 100–103], Nr. 4 (S. 102–103).

[14]) Loc. cit., S. 474.

[15]) *Über eine Extremalaufgabe aus der Theorie der schlichten Abbildungen* [Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft **22** (1923), S. 38–47, nebst *Berichtigung* **23** (1924), S. 64].

[16]) Später machte unabhängig Herr Bloch (loc. cit., S. 9) auf $\mathfrak{B} \leqq \frac{\pi}{4}$ als Folge jenes Beispiels aufmerksam.

Ferner ist nach einem von Herrn Koebe vermuteten, zuerst von Herrn Faber[17]) bewiesenen Satz

$$\mathfrak{A} \geqq \frac{1}{4};$$

denn jener Satz besagt: Jedes für $|x| < 1$ reguläre-schlichte

$$f(x) = x + \dots$$

bedeckt die Kreisscheibe $|y| < \frac{1}{4}$.

Kürzlich bewies Herr Reinhardt sogar

$$\mathfrak{A} \geqq \frac{1}{2},$$

als leichte Folge aus dem Bieberbachschen Satz: Ist

$$f(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{2}$$

für $|x| < 1$ schlicht, so ist

$$|a_2| \leqq 2.^{18}) \tag{3}$$

---

[17]) *Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1916, S. 39–42].

[18]) *Über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **37** (1928), S. 83–86], S. 83–84. Diese Reinhardtsche Arbeit (die auch noch ein anderes Ergebnis enthält, auf das ich in Anm. [32]) Bezug nehmen werde) enthält eine erstaunliche Stelle (S. 85–86). Herr Reinhardt gibt an, es sei ihm nicht gelungen, aus der Schlichtheit von (2) für $|x| < 1$ zu beweisen

$$|a_2^2 - a_3| \leqq 1. \tag{4}$$

Er findet für $|a_3^2 - a_3|$ nur eine größere obere Schranke. Er hat also übersehen, daß (4) erstens längst bekannt ist und zweitens bei seinem Versuche, es zu beweisen, von ihm angewendet wurde. Er benutzt nämlich den Satz von Herrn Gronwall (*Some remarks on conformal representation* [Annals of Mathematics, Ser. 2, **16** (1914 bis 1915), S. 72–76 und S. 138]), den Herr Bieberbach (*Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln* [Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1916, S. 940–955], S. 941–942) wiederfand und zuerst in seiner vollen Tragweite erkannte: Ist

$$F(x) = \frac{1}{x} + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

für $0 < |x| < 1$ regulär und schlicht, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leqq 1, \tag{5}$$

also insbesondere

$$|b_1| \leqq 1; \tag{6}$$

(Fortsetzung der Fußnote [18]) auf nächster Seite.)

Meine Abhandlung ist folgendermaßen angeordnet.

In § 1 beweise ich von neuem, aber unter Verzicht auf einigermaßen scharfe Schranken (also um so kürzer) den klassischen Cauchyschen Satz vom Radius der inversen Potenzreihe.

In § 2 reproduziere ich eine bekannte Rechnung über die Abbildung des Einheitskreises durch eine gebrochene lineare Substitution.

In § 3 reproduziere ich aus einer im Druck befindlichen Arbeit von Herrn Valiron[19]) einen ganz kurzen Beweis des Blochschen Satzes 1, den Herr Valiron und ich unabhängig gefunden haben (er aber bereits unmittelbar nach Kenntnisnahme meines[20]) alten Beweises).

In § 4 zeige ich, daß unsere Überlegungen lehren: Alle drei Weltkonstanten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$ bleiben ungeändert, wenn man der Klasse der gegebenen Funktionen die Einschränkung

$$|f'(x)| \leqq \frac{1}{1-|x|^2} \quad \text{für} \quad |x|<1 \tag{8}$$

auferlegt.

---

diese Formel (5) hatte, wie Herr Reinhardt auch erwähnt, Herrn Bieberbach (loc. cit., S. 945) zu seinem Satz (3) geführt. Nämlich folgendermaßen. Da für

$$F(x)=\frac{1}{f(x)}$$

$$b_1 = a_2^2 - a_3 \tag{7}$$

ist, so bedeutet (6) genau (4); und indem Herr Bieberbach den schönen (wie er angibt, von Herrn Faber übernommenen) Kunstgriff anwendet:

$$\sqrt{f(x^2)} = x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \qquad \left(A_2 = 0,\ A_3 = \frac{a_2}{2}\right)$$

ist für $|x|<1$ regulär und schlicht, schloß er aus (4)

$$\left|\frac{a_2}{2}\right| = |A_2^2 - A_3| \leqq 1.$$

Jenen Faberschen Kunstgriff verwendet Herr Reinhardt an unzweckmäßigem Platze auch und findet so (4) nicht. Zum Überfluß: Er kennt nicht nur die klassische Bieberbachsche Arbeit nicht, wo $|a_3 - a_2^2| \leqq 1$ und damit (4) auf S. 945, Z. 1 explizit steht; sondern er hat an der von ihm für die Bieberbachsche Beweismethode zitierten Stelle S. 387 ff. des Hurwitz-Courantschen Lehrbuches der *Funktionentheorie* (2. Aufl., Berlin (1925)), wo auf S. 388, Z. 1 v. u. die von ihm benutzte Ungleichung (5) steht, übersehen, daß (7) zwei Zeilen zuvor steht.

[19]) *Sur le théorème de M. Bloch* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo].

[20]) Loc. cit., S. 471. Jener Beweis war zwar nur drei Zeilen lang; der heutige ist breiter geschrieben, auch sachlich etwas länger, aber doch einfacher. Der Blochsche Satz (den vor seinem Entdecker niemand auch nur vermutungsweise ausgesprochen hatte) erscheint nunmehr fast als Trivialität. Und bekanntlich führt bereits sein Spezialfall ohne **schlicht** rasch zum Picardschen und zum Schottkyschen Satz, also zum großen Picardschen Satz (vgl. z. B. § 26 (S. 96–98) meines in Anm. [9]) zitierten Buches und die Vorbemerkung zu Satz 5 dieser Abhandlung).

In § 5 bestimme ich die „wahre Funktion“ von M, R, a, die der von mir früher[21]) bestimmten Funktion $\mathfrak{v}(M, R, a)$ entspricht, wenn die Forderung der Schlichtheit fallen gelassen wird. Dieser Satz wird übrigens in der Folge nicht angewendet, wohl aber die Beweismethode.

In § 6 beweise ich mit jener Methode

$$\mathfrak{L} \geqq 0{,}43.$$

In § 7 zeige ich auf wenigen Zeilen

$$(\mathfrak{B} \leqq)\, \mathfrak{L} \leqq \frac{e}{4} \left(< \frac{\pi}{4} \right).$$

In § 8 zeige ich mit viel Apparat

$$(\mathfrak{B} \leqq)\, \mathfrak{L} \leqq \frac{2^{\frac{2}{3}} \pi\, \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} \left(< 0{,}555 < \frac{9}{16} \right).$$

In § 9 beweise ich auf einem mir von Herrn Grandjot mitgeteilten Wege

$$(\mathfrak{L} \geqq)\, \mathfrak{B} \geqq \frac{28 - 16\sqrt{2}}{15} > 0{,}358.$$

In § 10 durch Verschärfung der Grandjotschen Methode

$$(\mathfrak{L} \geqq)\, \mathfrak{B} > 0{,}39 \left(> \frac{28 - 16\sqrt{2}}{15} \right).$$

In § 11 die Reinhardtsche Ungleichung

$$\mathfrak{A} \geqq \frac{1}{2}$$

(die allerdings unter Benutzung von (8) sofort aus (3) folgt) und etwas mehr.

In § 12 schalte ich, um später den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, eine Hilfsbetrachtung über Integralabschätzungen ein. Nachdem ich schon vor längerer Zeit brieflich Herrn Valiron einen Beweis von

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{L}$$

mitgeteilt und eine hierfür hinreichende Ungleichung über Integrale dabei nachgewiesen hatte, bestimmte Herr Valiron in seiner Antwort die zugehörige schärfstmögliche Abschätzung (Weltkonstante). Herr Schoenberg teilte mir im Anschluß daran einen vereinfachten Beweis des Valironschen Satzes mit; diesen Beweis konnte ich noch sehr zusammenziehen. Letztere Beweis-

[21]) Loc. cit., Satz IX (S. 472).

nordnung allein teile ich in § 12 mit, ohne mich bei den erwähnten Vorstufen aufzuhalten.

In § 13 zeige ich, tiefe Löwnersche[22]) Untersuchungen heranziehend, daß der Valironsche Satz leicht zur Lösung der Aufgabe führt: Es sei

$$\frac{1}{x} + a + bx + \dots$$

für $0 < |x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und schlicht, also nach dem Bieberbachschen Satz (3)

$$|a| \leqq 2,$$

nach dem Gronwallschen Satz (6)

$$|b| \leqq 1.$$

Es sei

$$0 \leqq \Theta \leqq 1, \quad |b| \leqq \Theta.$$

Was ist die untere Grenze $v(\Theta)$ aller nur von Θ abhängigen Zahlen $w(\Theta)$, so daß stets

$$|a| \leqq w(\Theta)$$

ist?

In § 14 beweise ich endlich, den Spezialfall $\Theta = \frac{1}{3}$ des Satzes aus § 13 benutzend (der aber hierfür nicht in voller Schärfe nötig wäre),

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{L}.$$

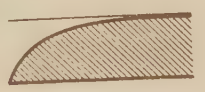
Über $\mathfrak{A}$ nach oben weiß ich nichts Besseres als das triviale

$$\mathfrak{A} \leqq \frac{\pi}{4}.$$ [23])

---

[22]) *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I* [Mathematische Annalen 89 (1923), S. 103–121].

[23]) Herr Szegö meint zwar noch in seiner Berichtigung, er habe $\mathfrak{A} < \frac{\pi}{4}$ bewiesen; das ist aber ein Irrtum. Es gibt keine Stelle der §§ 1–3 (und § 4 ist in der Berichtigung zurückgenommen), wo ein solcher Beweis auch nur versucht wird. Übrigens ist Herrn Szegös Definition der meinem $\mathfrak{A}$ entsprechenden Zahl (sein ϱ; vgl. S. 38, Z. 13–16 und Anm. [3])) fehlerhaft. Er erklärt es für klar, daß das Bildgebiet eines für $|x| < 1$ regulären $f(x) = x + \dots$, wenn es nicht beliebig große Kreisscheiben enthält, eine größte enthält (die er Inkreis nennt). Schon vor meiner genaueren Beschäftigung mit der Szegöschen Abhandlung wurde ich von befreundeter Seite darauf aufmerksam gemacht, daß das Gegenteil klar ist (siehe Figur, wo die Abbildung sogar konvex ist). Hierdurch wird auch Herrn Szegös Begründung von $\mathfrak{A} > \frac{1}{4}$ hinfällig. Das Hauptergebnis der Szegöschen Arbeit wird durch diese Einwände nicht berührt. Er bestimmt nämlich für schlicht-konvexe Abbildungen die betreffende Weltkonstante. mit dem Ergebnis $\frac{\pi}{4}$.



Erstes Kapitel.
Bekannte Hilfssätze.

§ 1.

Satz 2. *Für* $|x| < R$ *sei*

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

regulär,

$$|a_1| = a > 0,$$
$$|f(x)| \leqq M.$$

Dann bedeckt das Bild schlicht den Kreis

$$|y| < p \frac{R^2 a^2}{M},$$

wo p *eine Weltkonstante ist*[24]).

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$R = 1, \quad M = 1$$

(sonst betrachte man

$$\frac{f(Rx)}{M} = \frac{a_1 R}{M} x + \dots).$$

$f(x)$ ist für $|x| \leqq \varrho$ trivialerweise schlicht, falls

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \varrho^{n-1} < a;$$

dies schließt man bekanntlich daraus, daß für $|x_1| \leqq \varrho$, $|x_2| \leqq \varrho$, $x_1 \neq x_2$

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| = \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_2 + \dots + x_2^{n-1}) \right|$$
$$\geqq a - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \varrho^{n-1} > 0.$$

---

[24]) Die „wahre Schranke" habe ich loc. cit. durch Satz IX (S. 472) bestimmt. Die klassische (ungenauere) Schranke lautete $2M + Ra - 2\sqrt{M^2 + MRa}$. Herr Bieberbach rechnet statt ihrer auf S. 191 der 1. und der 2. Auflage des Bd. 1 seines *Lehrbuchs der Funktionentheorie* (1921 und 1923 bzw. 1925) mit Hilfe der klassischen Majorantenmethode eine Schranke aus, die auf den ersten Blick als unrichtig erkannt werden muß, da sie größer als die von M freie Zahl $|a_1| R$ ist (so daß die inverse Potenzreihe jedes in $|x| \leqq 1$ regulären $x + \dots$ in $|y| < 1$ konvergieren würde). Zwei Rechenfehler haben dies verursacht. Erstens fehlt auf Z. 5 v. u. unter der Wurzel der Faktor w hinter 4 (schon die Kontrolle $z \neq 0$ für $w = 0$ zeigt, daß die gedruckte Formel nicht stimmen kann). Zweitens liegt ihrer Anwendung die Annahme zugrunde: Für $|w| < a_1 R + 2\sqrt{|a_1| R + M}$ sei $(w + |a_1| R)^2 - 4(|a_1| R + M) \neq 0$. (Aber die Zahl $w = -a_1 R + 2\sqrt{|a_1| R + M}$ erfüllt diese Ungleichung nicht.)

Nach Voraussetzung ist

$$|a_n| \leqq 1,$$

so für $0 < \varrho \leqq \frac{a}{4} \left(\leqq \frac{1}{4}\right)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \varrho^{n-1} \leqq \frac{1}{(1-\varrho)^2} - 1 = \varrho \frac{2-\varrho}{(1-\varrho)^2} < \frac{a}{4} \frac{2}{\frac{9}{16}} < a.$$

$f(x)$ ist also für $|x| \leqq \frac{a}{4}$ schlicht. Für $|x| = \frac{a}{4}$ ist aber

$$|f(x)| \geqq \frac{a^2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{4}\right)^n = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16\left(1-\frac{a}{4}\right)} \geqq \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

Also wird $|y| < \frac{a^2}{6}$ schlicht bedeckt $\left(p = \frac{1}{6}\right)$.

§ 2.

Satz 3. *Es sei* $|\xi| < 1$,

$$x = \frac{\xi + z}{1 + \bar{\xi} z}.$$

Dann ist für $|z| < 1$

$$\left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{1 - |x|^2}{1 - |z|^2}.$$

Beweis[25]).

$$|1 + \bar{\xi} z|^2 - |\xi + z|^2 = (1 + \bar{\xi} z)(1 + \xi \bar{z}) - (\xi + z)(\bar{\xi} + \bar{z})$$
$$= 1 + |\xi|^2 |z|^2 - |\xi|^2 - |z|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |\xi|^2),$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1 - |\xi|^2}{(1 + \bar{\xi} z)^2},$$

$$(1 - |z|^2)\left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{(1-|z|^2)(1-|\xi|^2)}{|1 + \bar{\xi} z|^2} = 1 - \left|\frac{\xi + z}{1 + \bar{\xi} z}\right|^2 = 1 - |x|^2.$$

Zweites Kapitel.

Beweis des Blochschen Satzes und Einführung von (8).

§ 3.

Satz 1 (Bloch). Siehe Einleitung.

Beweis.

$$N = \operatorname*{Max}_{|x| \leqq 1} (1 - |x|^2) |f'(x)|$$

---

[25]) Klassisch.

ist $\geqq 1$ und wird für ein ξ mit $|\xi|<1$ angenommen. Für $|z|\leqq 1$ ist,

$$x=\frac{\xi+z}{1+\bar{\xi}z}$$

gesetzt,

$$g(z)=\frac{f(x)}{N}$$

regulär. Für $|z|<1$ ist nach Satz 3

$$(9)\quad (1-|z|^2)|g'(z)|=(1-|z|^2)\frac{1}{N}|f'(x)|\left|\frac{dx}{dz}\right|=\frac{1}{N}(1-|x|^2)|f'(x)|\leqq 1;$$

außerdem ist

$$|g'(0)|=\frac{1}{N}(1-|\xi|^2)|f'(\xi)|=1.$$

Für $|z|\leqq\frac{1}{2}$ ist nach (9)

$$|g'(z)|\leqq\frac{4}{3},$$

also

$$|g(z)-g(0)|\leqq\frac{2}{3}.$$

Nach Satz 2 (mit $g(z)-g(0)$ als Funktion von z, $R=\frac{1}{2}$, $a=1$, $M=\frac{2}{3}$) bedeckt also das g-Bild von $|z|<\frac{1}{2}$ (also das von $|z|<1$) schlicht einen offenen Kreis des Radius P (Weltkonstante), also das f-Bild von $|x|<1$ schlicht einen offenen Kreis des Radius $NP\geqq P$, also einen des Radius P.

§ 4.

Satz 4. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$ *werden für je ein passendes auf* $|x|\leqq 1$ *reguläres*

$$f(x)=x+\ldots$$

mit der Nebenbedingung

$$(8)\qquad |f'(x)|\leqq\frac{1}{1-|x|^2}\quad \textit{für}\quad |x|<1$$

beliebig genau approximiert.

D. h. zu $\delta>0$ gibt es je ein $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ bzw. $f_3(x)$ (letzteres schlicht), das die Voraussetzungen erfüllt und für das jeder (bei $f_1(x)$ schlicht) bedeckte offene Kreis einen Radius $<\mathfrak{B}(1+\delta)$ bzw. $<\mathfrak{L}(1+\delta)$ bzw. $<\mathfrak{A}(1+\delta)$ hat.

Vorbemerkung (für spätere Anwendungen). Aus (8) folgt für $|x|<1$

$$|f(x)|\leqq\int_0^{|x|}\frac{dr}{1-r^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+|x|}{1-|x|}=|x|+\frac{|x|^3}{3}+\ldots$$

und durch Betrachtung kleiner $|x|$, daß

$$f(x)=x+ax^3+\ldots,\quad |a|\leqq\frac{1}{3}$$

ist.

Beweis. Zu $\delta > 0$ wähle man zunächst nach Definition $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ hne die Nebenbedingung (8), so daß alles andere gilt. Wird

$$N = \operatorname*{Max}_{|x| \leqq 1} (1 - |x|^2) |F_\nu'(x)| \quad (\geqq 1)$$

esetzt, so gibt es ein $\xi = \xi_\nu$ mit

$$|\xi| < 1, \quad (1 - |\xi|^2) |F_\nu'(\xi)| = N.$$

Dann ist,

$$x = \frac{\xi + z}{1 + \bar{\xi} z}$$

esetzt,

$$f_\nu(z) = \frac{F_\nu(x) - F_\nu(\xi)}{(1 - |\xi|^2) F_\nu'(\xi)} = z + \dots$$

ür $|z| \leqq 1$ regulär und bei $\nu = 3$ schlicht. Nach Satz 3 ist für $|z| < 1$

$$(1 - |z|^2) |f_\nu'(z)| = \frac{(1 - |x|^2) |F_\nu'(x)|}{N} \leqq 1,$$

nd der Radius jeder offenen, und zwar bei $\nu = 1$ schlicht, bedeckten Kreisscheibe ist, $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{A}$ gesetzt,

$$< \frac{\mathfrak{C}(1 + \delta)}{N} \leqq \mathfrak{C}(1 + \delta).$$

Drittes Kapitel.

Abschätzung von $\mathfrak{L}$ nach unten.

§ 5.

Satz 5. *Für* $|x| < R$ *sei*

$$f(x) = a_1 x + \dots$$

regulär,

$$|a_1| = a > 0,$$

$$|f(x)| \leqq M.$$

Dann bedeckt das Bild den Kreis

$$|y| < \frac{R^2 a^2}{4M}.$$

Vorbemerkung. Dieser Satz ist nicht neu und natürlich schlechter als der folgende Satz 6. Aber für den Nachweis der Picard-Schottkyschen Sätze genügt bekanntlich der Blochsche Satz ohne schlicht; also genügt zur wörtlichen Anwendung des Beweises aus § 3 irgendeine nur von R, a, M abhängige Schranke. Es erscheint mir daher für Vorlesungszwecke nützlich, einen einfachen Beweis für eine beliebige solche Schranke anzugeben; auf diesem Wege bewies ich für Zuhörer im ersten Semester

den Picardschen Satz in meinen Vorlesungen über יסודות האנליזה im Wintersemester 1927—1928 (תרפ"ח) an der Jerusalemer Universität und über Funktionentheorie im Wintersemester 1928—1929 an der Göttinger Universität.

Beweis. Es sei $f(x) \neq \gamma$ für $|x| < R$. Dann ist dort

$$h(x) = \sqrt{1 - \frac{f(x)}{\gamma}} = 1 - \frac{a_1}{2\gamma} x + b_2 x^2 + \dots$$

regulär und absolut $\leqq \sqrt{1 + \frac{M}{|\gamma|}}$, also

$$1 + \frac{a^2}{4|\gamma|^2} R^2 + |b_2|^2 R^4 + \dots \leqq 1 + \frac{M}{|\gamma|},$$

$$\frac{a^2}{4|\gamma|^2} R^2 \leqq \frac{M}{|\gamma|},$$

$$|\gamma| \geqq \frac{R^2 a^2}{4M}.$$

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 5 (aus denen $M \geqq Ra$ folgt) *bedeckt das Bild den Kreis*

$$|y| < tM,$$

wo $t = 1$ *für* $M = Ra$ *und* t *für* $M > Ra$ *die Lösung von*

$$\frac{Ra}{M} = \frac{2t}{1-t^2} \log \frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1, \tag{10}$$

ist.

Und zwar ist tM *die größtmögliche Funktion von* R, a, M, *welche dies leistet.*

Vorbemerkung. (10) hat genau eine Lösung; denn, $t = \frac{1-u}{1+u}$ gesetzt, ist $1 > u > 0$, und

$$\frac{2t}{1-t^2} \log \frac{1}{t} = \frac{2\frac{1-u}{1+u}}{1-\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2} \log \frac{1+u}{1-u} = (1-u^2)\frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u}$$

$$= (1-u^2)\left(1 + \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{5} + \dots\right) = 1 - \frac{2}{1\cdot 3} u^2 - \frac{2}{3\cdot 5} u^4 - \dots$$

steigt mit fallendem u.

Beweis. Ist $M = Ra$, so muß $f(x) = a_1 x$ sein, und alles ist trivial. Es sei also $M > Ra$.

1. $$g(x) = \frac{f(Rx)}{M} = \frac{Ra_1}{M} x + \dots$$

ist für $|x| < 1$ regulär, und dort ist

$$|g(x)| \leqq 1.$$

t

$$|\gamma| < M, \quad f(x) \neq \gamma \quad \text{für} \quad |x| < R,$$

ist

$$g(x) \neq \frac{\gamma}{M} \quad \text{für} \quad |x| < 1,$$

lso

$$\frac{\frac{\gamma}{M} - g(x)}{1 - \frac{\bar{\gamma}}{M} g(x)} = \frac{\frac{\gamma}{M} - g'(0)\,x + \dots}{1 - \frac{\bar{\gamma}}{M} g'(0)\,x + \dots} = \frac{\gamma}{M} - g'(0)\left(1 - \frac{|\gamma|^2}{M^2}\right) x + \dots$$

ür $|x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und absolut $\leqq 1$. Also ist

$$h(x) = \frac{M}{\gamma} \frac{\frac{\gamma}{M} - g(x)}{1 - \frac{\bar{\gamma}}{M} g(x)} = 1 - \frac{g'(0)\,M}{\gamma}\left(1 - \frac{|\gamma|^2}{M^2}\right) x + \dots$$

$$= 1 - \frac{R a_1}{\gamma}\left(1 - \frac{|\gamma|^2}{M^2}\right) x + \dots$$

ür $|x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und absolut $\leqq \frac{M}{|\gamma|}$. Dort ist also

$$h(x) = e^{k(x)}, \quad k(x) = -\frac{R a_1}{\gamma}\left(1 - \frac{|\gamma|^2}{M^2}\right) x + \dots, \quad \Re\, k(x) \leqq \log \frac{M}{|\gamma|}.$$

Nach einer bekannten Ungleichung ist also

$$\frac{Ra}{|\gamma|}\left(1 - \frac{|\gamma|^2}{M^2}\right) \leqq 2 \log \frac{M}{|\gamma|},$$

$$\frac{Ra}{M} \leqq \frac{2\,\frac{|\gamma|}{M}}{1 - \left(\frac{|\gamma|}{M}\right)^2} \log \frac{1}{\frac{|\gamma|}{M}}.$$

Nach der Vorbemerkung ist also

$$\frac{|\gamma|}{M} \geqq t,$$

$$|\gamma| \geqq t M.$$

Daher wird

$$|y| < t M$$

angenommen.

2. Es seien M, R, a mit $M > Ra$, $R > 0$, $a > 0$ gegeben. t bezeichne die durch (10) bestimmte Zahl. Die Funktion

$$g(x) = t e^{\frac{2x}{1+x} \log \frac{1}{t}} = t + 2t \log \frac{1}{t} \cdot x + \dots$$

ist für $|x|<1$ regulär und $\neq 0$. Dort ist

$$\Re \frac{2x}{1+x} < 1,$$

$$|g(x)| < te^{\log\frac{1}{t}} = 1.$$

Für $|x|<R$ ist also

$$f(x) = M\frac{t-g\left(\frac{x}{R}\right)}{1-tg\left(\frac{x}{R}\right)} = M\frac{-\frac{2t}{R}\log\frac{1}{t}\cdot x+\dots}{(1-t^2)+\dots} = -\frac{2Mt\log\frac{1}{t}}{R(1-t^2)}x+\dots$$

$$= -ax+\dots$$

regulär,

$$f(x) \neq tM,$$

$$|f(x)| < M,$$

$$|-a| = a.$$

tM ist also die „wahre Zahl“.

§ 6.

Satz 7. $\mathfrak{L} \geqq 0{,}43.$

Beweis. Nach Satz 4 genügt es zu zeigen: Ist

$$f(x) = x + ax^3 + \dots$$

für $|x| \leqq 1$ regulär,

$$|a| \leqq \frac{1}{3},$$

$$|f(x)| \leqq \frac{1}{2}\log\frac{1+|x|}{1-|x|} \quad \text{für} \quad |x|<1,$$

$$f(x) \neq \gamma \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,$$

so ist

$$|\gamma| > 0{,}43.$$

Wäre

$$|\gamma| \leqq 0{,}43,$$

so setze ich

$$R = 2|\gamma| \ (\leqq 0{,}86), \qquad M = \frac{1}{2}\log\frac{1+R}{1-R},$$

so daß

$$M > R > |\gamma|.$$

Die Funktion

$$g(x) = \frac{f(Rx)}{M} = \frac{R}{M}x + \frac{R^3a}{M}x^3 + \dots$$

äre für $|x| \leqq 1$ regulär, $\neq \frac{\gamma}{M}$ und absolut $\leqq 1$. Für $|x| \leqq 1$ wäre also

$$h(x) = \frac{M}{\gamma} \frac{\frac{\gamma}{M} - g(x)}{1 - \frac{\bar{\gamma}}{M} g(x)} = \frac{1 - \frac{R}{\gamma} x - \frac{R^3 a}{\gamma} x^3 + \dots}{1 - \frac{\bar{\gamma} R}{M^2} x - \frac{\bar{\gamma} R^3 a}{M^2} x^3 + \dots}$$

egulär, $\neq 0$ und absolut $\leqq \frac{M}{|\gamma|}$. Dort wäre also

$$h(x) = e^{k(x)}, \quad k(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots, \quad \Re k(x) \leqq \log \frac{M}{|\gamma|},$$

lso

$$\frac{1}{2} |c_3| \leqq \log \frac{M}{|\gamma|}.$$

Nun wäre

$$c_3 = -\frac{R^3}{3\gamma^3} - \frac{R^3 a}{\gamma} + \frac{\bar{\gamma}^3 R^3}{3M^6} + \frac{\bar{\gamma} R^3 a}{M^2} = -\frac{R^3}{3\gamma^3}\left(1 - \left(\frac{|\gamma|}{M}\right)^6\right) - \frac{R^3 a}{\gamma}\left(1 - \left(\frac{|\gamma|}{M}\right)^2\right).$$

Wegen $|a| \leqq \frac{1}{3}$ wäre also

$$\frac{R^3}{6|\gamma|^3}\left(1 - \left(\frac{|\gamma|}{M}\right)^6\right) - \frac{R^3}{6|\gamma|}\left(1 - \left(\frac{|\gamma|}{M}\right)^2\right) \leqq \log \frac{M}{|\gamma|},$$

olglich,

$$\frac{M}{|\gamma|} = N\left(> \frac{R}{|\gamma|} = 2\right)$$

gesetzt,

$$0 \leqq -\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{N^6}\right) + \frac{0{,}86^2}{3}\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) + \log N.$$

Die rechte Seite steigt für $N \geqq 2$ $\left(\text{da ihre Ableitung} > -\frac{8}{N^7} + \frac{1}{N} > 0 \text{ ist}\right)$;
es wäre

$$N = \frac{1}{R} \log \frac{1+R}{1-R} \leqq \frac{100}{86} \log \frac{186}{14} < 3{,}01.$$

Daher wäre

$$0 \leqq -\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3{,}01^6}\right) + \frac{0{,}86^2}{3}\left(1 - \frac{1}{3{,}01^2}\right) + \log 3{,}01 < 0.$$

Viertes Kapitel.

Abschätzung von $\mathfrak{L}$ nach oben.

§ 7.

Satz 8. $$\mathfrak{L} \leqq \frac{e}{4}.$$

Beweis. $$f(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{2x}{1+x}} = \frac{1}{2} + x + \dots$$

ist für $|x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und absolut $< \frac{e}{2}$. Im Bilde hat also kein Kreis mit Radius $> \frac{e}{4}$ Platz.

§ 8.

Satz 9. $$\mathfrak{L} \leqq \frac{2^{\frac{4}{3}} \pi \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} \left(< 0{,}555 < \frac{9}{16}\right).$$

Beweis. Bekanntlich[26]) bildet die in der von -1 nach $-\infty$ und von 1 nach $+\infty$ aufgeschlitzten Ebene reguläre Funktion

$$g(z) = \int_0^z \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{2}{3}}} \quad (= z + \ldots \text{ für } |z| < 1)$$

die Halbebene $\Im z \geqq 0$ auf ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge

$$\int_{-1}^{1} \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{2}{3}}} = 2\int_0^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v}(1-v)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \mathsf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{4}{3}}\pi}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right.$$

ab; die Ecken des Dreiecks entsprechen den Punkten -1, 1, ∞. Be freier Bahn ist also bekanntlich $g(z)$ in der ganzen endlichen Ebene, au der ± 1 herausgenommen sind, regulär und bildet sie auf die schlichte in den Ecken des durch Spiegelungen entstehenden regulären Dreiecks netzes punktierte Ebene ab, die Ecken des Netzes auslassend. Jeder Krei des Radius

$$\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{4}{3}}\pi}$$

(Radius des Umkreises der Dreiecke des Netzes) enthält also innen oder auf dem Rande einen ausgelassenen Wert.

Nun sei α mit $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ beliebig, $\varphi(\alpha)$ die bekannte Carathéodorysche Funktion[27]). Dann gibt es ein für $|x| < 1$ reguläres

$$f(x) = \alpha + \varphi(\alpha)x + \ldots,$$

das dort $\neq 0$ und $\neq 1$ ist. Dann ist

$$F(x) = 1 - 2f(x) = 1 - 2\alpha - 2\varphi(\alpha)x + \ldots$$

---

[26]) Mit umgekehrtem Ziel (nämlich $\varphi(\alpha)$ mit Hilfe von $\mathfrak{B}$ nach oben abzuschätzen) hat schon Herr Bloch (loc. cit., S. 11—12) diese Abbildung und das Dreiecksnetz benutzt, aber ohne sehr scharf abzuschätzen.

[27]) Vgl. meine Arbeit *Über den Picardschen Satz* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 51 (1906), S. 252—318], S. 256 und S. 268—271

für $|x|<1$ regulär, $\neq 1$ und $\neq -1$. Daher ist für $|x|<1$

$$g(F(x)) = g(1-2\alpha) - 2\varphi(\alpha)\, g'(1-2\alpha)\, x + \ldots = c_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{2^{\frac{1}{3}}(\alpha(1-\alpha))^{\frac{2}{3}}} x + \ldots$$

regulär und läßt dort die Dreiecksecken aus. Folglich ist wegen

$$-\frac{2^{\frac{1}{3}}(\alpha(1-\alpha))^{\frac{2}{3}}}{\varphi(\alpha)}\, g(F(x)) = a_0 + x + \ldots$$

nach Definition von $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L} \leqq \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{1}{3}}\pi}\, \frac{2^{\frac{1}{3}}|\alpha(1-\alpha)|^{\frac{2}{3}}}{\varphi(\alpha)} = \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi}\, \frac{|\alpha(1-\alpha)|^{\frac{2}{3}}}{\varphi(\alpha)}.$$

Da nach Herrn Hartogs [28])

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{8\pi^2}$$

ist, liefert $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\mathfrak{L} \leqq \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi}\, \frac{8\pi^2}{2^{\frac{4}{3}}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{2^{\frac{2}{3}}\pi\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Fünftes Kapitel.

Abschätzung von $\mathfrak{B}$ nach unten.

§ 9.

Satz 10 (Grandjot): $\mathfrak{B} \geqq \frac{28-16\sqrt{2}}{15}$.

Beweis. Nach Satz 4 genügt es zu zeigen: Es sei $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär,

$$f(0) = 0,$$
$$g(x) = f'(x) = 1 + bx^2 + \ldots,$$
$$|b| \leqq 1,$$
$$|g(x)| \leqq \frac{1}{1-|x|^2} \quad \text{für} \quad |x|<1;$$

dann bedeckt das Bild $f(x)$ schlicht den Kreis

$$|y| < \frac{28-16\sqrt{2}}{15}.$$

Bekanntlich [29]) wird für jedes r mit $0 \leqq r \leqq 1$, für das

$$r - \operatorname*{Max}_{|x|=r} |f(x) - x| > 0$$

[28]) Vgl. S. 274 meiner in Anm. [27]) zitierten Arbeit.

[29]) Vgl. z. B. S. 471 meiner in Anm. [2]) zitierten Arbeit.

ist, ein offener Kreis um 0 mit dieser Zahl als Radius schlicht bedeckt; es genügt also, ein r mit

$$0 \leqq r \leqq 1, \quad r - \operatorname*{Max}_{|x|=r} \left| \int_0^x (g(z) - 1)\, dz \right| \geqq \frac{28 - 16\sqrt{2}}{15}$$

anzugeben.

Für $0 < R < 1$ ist auf $|x| \leqq R$

$$|g(x)| \leqq \frac{1}{1 - R^2} = M = M(R). \tag{11}$$

Für $|x| \leqq R$ ist

$$h(x) = \frac{1}{x^2} \frac{\frac{g(x)}{M} - \frac{1}{M}}{1 - \frac{g(x)}{M}\frac{1}{M}} \frac{1}{M} = \frac{1}{x^2} \frac{g(x) - 1}{M^2 - g(x)}$$

regulär; für $|x| = R$ ist nach (11)

$$|h(x)| \leqq \frac{1}{R^2 M}. \tag{12}$$

(12) gilt also für $|x| \leqq R$. Aus

$$g(x) - 1 = (M^2 - 1) \frac{x^2 h(x)}{1 + x^2 h(x)}$$

folgt für $|x| = r \leqq R$

$$|g(x) - 1| \leqq (M^2 - 1) \frac{r^2}{R^2 M - r^2} = r^2 \frac{M^2 - 1}{M - 1 - r^2}.$$

Bei jedem r mit $0 < r < 1$ ist hierin M eine beliebige Zahl $\geqq \frac{1}{1 - r^2}$. Die Ableitung von $\frac{M^2 - 1}{M - 1 - r^2}$ nach M verschwindet für

$$0 = (M - 1 - r^2)\, 2M - (M^2 - 1) = M^2 - 2(1 + r^2) M + 1,$$

$$M = 1 + r^2 + r\sqrt{2 + r^2}. \tag{13}$$

Falls $0 < r \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$, ist dies $M \geqq \frac{1}{1 - r^2}$; denn

$$\left(\frac{1}{1 - r^2}\right)^2 - 2\frac{1 + r^2}{1 - r^2} + 1 = \frac{1 - 2(1 - r^4) + (1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2} = \frac{r^2(-2 + 3r^2)}{(1 - r^2)^2} \leqq 0.$$

Für $0 < r \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist also (13) die günstigste Wahl von M, und es ergibt sich auf $|x| = r$

$$|g(x) - 1| \leqq r^2 \frac{(2 + r^2 + r\sqrt{2 + r^2})(r^2 + r\sqrt{2 + r^2})}{r\sqrt{2 + r^2}}$$

$$= r^2(\sqrt{2 + r^2} + r)(r + \sqrt{2 + r^2}) = r^2(r + \sqrt{2 + r^2})^2.$$

Daher ist für $0 < |x| = r \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\left| \int_0^x (g(z) - 1)\, dz \right| \leqq \int_0^r t^2 (t + \sqrt{2 + t^2})^2\, dt,$$

also für $0 \leqq r \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$r - \operatorname*{Max}_{|x|=r} \left| \int_0^x (g(z) - 1)\, dz \right| \geqq r - \int_0^r t^2 (t + \sqrt{2 + t^2})^2\, dt.$$

Das günstigste r ergibt sich aus

$$1 = r^2 (r + \sqrt{2 + r^2})^2, \quad 0 \leqq r \leqq \sqrt{\frac{2}{3}},$$

und ist $\frac{1}{2}$. Alsdann ist

$$r - \int_0^r t^2 (t + \sqrt{2 + t^2})^2\, dt = \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} (2t^2 + 2t^4 + 2t^3 \sqrt{2 + t^2})\, dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{1}{8} - \frac{2}{5}\frac{1}{32} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^3 \sqrt{2 + t^2}\, dt = \frac{97}{240} - \left\{ \frac{2}{5}(2 + t^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \right\}_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{97}{240} - \frac{2}{5}\frac{243}{32} + \frac{4}{3}\frac{27}{8} + \frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{28 - 16\sqrt{2}}{15}.$$

§ 10.

Satz 11. 1. $$\mathfrak{B} \geqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq r < 1} \left(r - \int_0^r \operatorname*{Min}_{M \geqq \frac{1}{1-t^2}} \varphi(t, M)\, dt \right),$$

wo

$$R = \sqrt{\frac{M-1}{M}},$$

$$\mu(t, M) = (M-1) \frac{1 + \frac{t}{(M+1)R}}{\frac{1}{\sqrt{M+1}} + \frac{t}{R}},$$

$$\varphi(t, M) = (M^2 - 1) \frac{1}{\frac{\mu(t, M)}{t^2} - 1}.$$

2. *Insbesondere*

$$\mathfrak{B} > 0{,}39 \left(> \frac{28 - 16\sqrt{2}}{15} \right).$$

Vorbemerkung. Min existiert für $0 < t < 1$, da bei $M \to \infty$

$$R \to 1, \quad \mu(t, M) \sim \frac{M}{t}, \quad \varphi(t, M) \sim M t^3, \quad \varphi(t, M) \to \infty.$$

Min ist für $0 < t < 1$ stetig und für $0 < t < \frac{1}{2}$ beschränkt, also für $0 \leqq r < 1$ von $t = 0$ bis $t = r$ integrabel. Max existiert, da für $\frac{1}{2} < t < 1$, $M > 1$

$$\varphi(t, M) > M t^2 \frac{M-1}{\mu(t, M)} > \frac{M}{4} \frac{\frac{1}{2R}}{1 + \frac{1}{2R}} > \frac{M}{12},$$

also bei $r \to 1$

$$r - \int_0^r \operatorname*{Min}_{M \geqq \frac{1}{1-t^2}} \varphi(t, M)\, dt \to -\infty.$$

Beweis. 1. Ist für $|x| \leqq R$

$$h(x) \text{ regulär}, \quad |h(x)| \leqq N, \quad |h(0)| \leqq N_0 < N,$$

so ist nach einem Lindelöfschen [30]), von Herrn Carathéodory [31]) wiedergefundenen Satz

$$|h(x)| \leqq N \frac{\frac{N_0}{N} + \frac{r}{R}}{1 + \frac{N_0}{N}\frac{r}{R}} \quad \text{für} \quad |x| \leqq r \leqq R.$$

Für das $h(x)$ aus dem Beweise des Satzes 10 ist wählbar

$$N = \frac{1}{R^2 M} = \frac{1}{M-1}$$

und (da $|b| \leqq 1$)

$$N_0 = \frac{1}{M^2 - 1} (< N).$$

Daher ist für $0 < |x| = r \leqq R < 1$

$$|h(x)| \leqq \frac{1}{M-1} \frac{\frac{1}{M+1} + \frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{M+1}\frac{r}{R}} = \frac{1}{\mu(r, M)}.$$

Für $0 < |x| = r < 1$ ist also, bei jedem $M \geqq \frac{1}{1-r^2}$,

$$|g(x) - 1| \leqq (M^2 - 1) \frac{1}{\frac{\mu(r, M)}{r^2} - 1} = \varphi(r, M),$$

$$|g(x) - 1| \leqq \operatorname*{Min}_{M \geqq \frac{1}{1-r^2}} \varphi(r, M);$$

daher ist

$$\mathfrak{B} \geqq r - \int_0^r \operatorname*{Min}_{M \geqq \frac{1}{1-t^2}} \varphi(t, M)\, dt$$

bei jedem r mit $0 \leqq r < 1$.

---

[30]) *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* [Acta societatis scientiarum fennicae **35**, Nr. 7 (1908)], S. 11.

[31]) *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten* [Mathematische Annalen 72 (1912), S. 107—144], S. 113.

2. Eine (nicht möglichst scharfe) numerische Berechnung (sogar mit festem M) ergibt,

$$r = 0{,}55, \quad M = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\geqq \frac{1}{1-t^2} \text{ für } 0 \leqq t \leqq r\right)$$

gewählt,

$$\mathfrak{B} \geqq 0{,}55 - \int_0^{0{,}55} \varphi\left(t, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) dt > 0{,}39.$$

Sechstes Kapitel.

Abschätzung von $\mathfrak{A}$ nach unten.

§ 11.

Satz 12 (Reinhardt). $\mathfrak{A} \geqq \frac{1}{2}$.

Beweis. Nach Satz 4 darf man von einem in $|x| \leqq 1$ regulär-schlichten

$$f(x) = x + a x^3 + \dots$$

ausgehen. Ist $f(x) \neq \gamma$ für $|x| \leqq 1$, so ist dort

$$\frac{f(x)}{1 - \frac{f(x)}{\gamma}} = \frac{x + a x^3 + \dots}{1 - \frac{x}{\gamma} - \frac{a}{\gamma} x^3 + \dots} = x + \frac{x^2}{\gamma} + \dots \tag{14}$$

regulär-schlicht, also nach dem Bieberbachschen Satz (3)

$$\left|\frac{1}{\gamma}\right| \leqq 2,$$

$$\mathfrak{A} \geqq \frac{1}{2}.$$

Satz 13. $\mathfrak{A} \geqq \sqrt{\frac{3}{10}}$.

Beweis. Wegen der erlaubten Annahme $|a| \leqq \frac{1}{3}$ ist, da x^3 in (14) rechts den Koeffizienten $a + \frac{1}{\gamma^2}$ hat, nach einem Löwnerschen Satz[32])

$$\left|a + \frac{1}{\gamma^2}\right| \leqq 3,$$

$$\left|\frac{1}{\gamma^2}\right| \leqq \frac{10}{3},$$

$$\mathfrak{A} \geqq \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

---

[32]) Loc. cit., S. 121, Formel (61). Auch Herr Reinhardt zieht diesen Löwnerschen Satz heran; seine entsprechende Formel (2) auf S. 85 setzt aber die obige Verschärfung des Satzes 12 nicht unmittelbar in Evidenz.

§ 12.

Satz 14 (Valiron). 1. *Es sei* $\lambda(\tau)$ *für* $\tau \geqq 0$ *reell und bis auf höchstens einen Punkt stetig*[33]) *und dort*

$$|\lambda(\tau)| \leqq e^{-\tau},$$

ferner

$$0 < N \leqq \frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty \lambda^2(\tau)\, d\tau \leqq N.$$ [34])

Dann ist

$$\left| \int_0^\infty \lambda(\tau)\, d\tau \right| \leqq V(N),$$

wo $\nu = \nu(N)$ *die Wurzel von*

$$\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-2\nu} = N, \quad \nu \geqq 0,$$

und

$$V(N) = (\nu + 1)\, e^{-\nu}$$

ist.

2. *Es läßt sich* $V(N)$ *durch keine kleinere, nur von* N *abhängige Zahl ersetzen; es gibt sogar ein Beispiel mit stetigem positivem* $\lambda(\tau)$ *und*

$$\int_0^\infty \lambda(\tau)\, d\tau = V(N).$$

Vorbemerkung. ν existiert und zwar eindeutig, da $\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-2\nu}$ die Ableitung $-2\nu e^{-2\nu} < 0$ für $\nu > 0$ hat, also von $\frac{1}{2}$ bis 0 fällt, wenn ν von 0 bis ∞ wächst.

Beweis. 1. Wird

$$\mu(\tau) = \begin{cases} e^{-\nu} & \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq \nu, \\ e^{-\tau} & \text{für} \quad \tau \geqq \nu \end{cases}$$

gesetzt, so ist

$$(15) \quad \int_0^\infty \mu^2(\tau)\, d\tau = \int_0^\nu e^{-2\nu}\, d\tau + \int_\nu^\infty e^{-2\tau}\, d\tau = \nu e^{-2\nu} + \frac{1}{2} e^{-2\nu} = N \geqq \int_0^\infty \lambda^2(\tau)\, d\tau.$$

Für $\tau \geqq 0$ ist

$$(16) \quad (\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|)\,(2e^{-\nu} - \mu(\tau) - |\lambda(\tau)|) \geqq 0;$$

denn für $0 \leqq \tau \leqq \nu$ ist die linke Seite $(e^{-\nu} - |\lambda(\tau)|)^2$; für $\tau \geqq \nu$ ist

$$e^{-\nu} \geqq \mu(\tau) = e^{-\tau} \geqq |\lambda(\tau)|.$$

---

[33]) Triviale Abschwächungen dieser Voraussetzung sind für mich ohne Belang.

[34]) Es ist trivial, daß die linke Seite $\leq \frac{1}{2}$ ist.

Aus (16) folgt

$$0 \leqq \int_0^\infty (\mu(\tau) - |\lambda(\tau)|)(2e^{-\tau} - \mu(\tau) - |\lambda(\tau)|)\, d\tau$$
$$= 2e^{-\nu}\Big(\int_0^\infty \mu(\tau)\, d\tau - \int_0^\infty |\lambda(\tau)|\, d\tau\Big) - \int_0^\infty \mu^2(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty \lambda^2(\tau)\, d\tau$$

Nach (15) ist also

$$\Big|\int_0^\infty \lambda(\tau) d\tau\Big| \leqq \int_0^\infty |\lambda(\tau)| d\tau \leqq \int_0^\infty \mu(\tau)\, d\tau = \int_0^\nu e^{-\tau} d\tau + \int_\nu^\infty e^{-\tau} d\tau = \nu e^{-\nu} + e^{-\nu} = V(N).$$

2. Für $\lambda(\tau) = \mu(\tau)$ (stetig, > 0 und $\leqq e^{-\tau}$) ist

$$\int_0^\infty \lambda^2(\tau)\, d\tau = N, \qquad \int_0^\infty \lambda(\tau)\, d\tau = V(N).$$

Satz 15. 1. *Es sei* $\varkappa(\tau)$ *für* $\tau \geqq 0$ *bis auf höchstens einen Punkt stetig*[33]) *und dort*

$$|\varkappa(\tau)| = 1,$$

ferner

$$0 \leqq M \leqq \frac{1}{2},$$

$$\Big|\int_0^\infty \varkappa^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau\Big| \leqq M.^{34})$$

Dann ist

$$\Big|\int_0^\infty \varkappa(\tau) e^{-\tau} d\tau\Big| \leqq V\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{2}\Big).$$

2. *Diese Schranke ist durch keine kleinere, nur von M abhängige Zahl ersetzbar; es gibt sogar ein Beispiel mit Gleichheitszeichen.*

Beweis. 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\int_0^\infty \varkappa(\tau) e^{-\tau} d\tau \geqq 0.$$

(Denn sonst ersetze man $\varkappa(\tau)$ durch $\varepsilon \varkappa(\tau)$ bei passendem ε mit $|\varepsilon| = 1$.)

Für $\tau \geqq 0$ ist

$$\varkappa(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}, \quad \vartheta(\tau) \text{ stetig bis auf höchstens einen Punkt.}$$

Nach Voraussetzung ist

$$M \geqq \Re \int_0^\infty \varkappa^2(\tau) e^{-2\tau} d\tau = \int_0^\infty e^{-2\tau} \cos 2\vartheta(\tau)\, d\tau = 2\int_0^\infty e^{-2\tau} \cos^2 \vartheta(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2},$$
$$\int_0^\infty e^{-2\tau} \cos^2 \vartheta(\tau)\, d\tau \leqq \frac{1}{4} + \frac{M}{2}.$$

Nach Satz 14 mit $\lambda(\tau) = e^{-\tau} \cos \vartheta(\tau)$ ist also

$$\Big|\int_0^\infty \varkappa(\tau) e^{-\tau} d\tau\Big| = \int_0^\infty e^{-\tau} \cos \vartheta(\tau)\, d\tau \leqq V\Big(\frac{1}{4} + \frac{M}{2}\Big).$$

2. Es sei

$$\nu = \nu\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2}\right).$$

Man wähle $\beta = \beta(M)$ mit

$$\int_0^\beta e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}\,d\tau - \int_\beta^\nu e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}\,d\tau = 0, \qquad 0 \leqq \beta \leqq \nu;$$

das geht, da die linke Seite in β stetig, $\leqq 0$ für $\beta = 0$, $\geqq 0$ für $\beta = \nu$ ist. Man setze

$$\vartheta(\tau) = \begin{cases} \arccos e^{\tau-\nu} & \text{für } 0 \leqq \tau \leqq \beta, \\ -\arccos e^{\tau-\nu} & \text{für } \beta < \tau \leqq \nu, \\ 0 & \text{für } \tau > \nu, \end{cases}$$

$$\varkappa(\tau) = e^{i\vartheta(\tau)}.$$

Dann ist $\varkappa(\tau)$ bis auf $\tau = \beta$ stetig, $|\varkappa(\tau)| = 1$ und

$$\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau = \int_0^\infty e^{-2\tau}(2\cos^2\vartheta(\tau) - 1)\,d\tau + 2i\int_0^\infty e^{-2\tau}\cos\vartheta(\tau)\sin\vartheta(\tau)\,d\tau$$

$$= 2\int_0^\nu e^{-2\tau}e^{2\tau-2\nu}\,d\tau + 2\int_\nu^\infty e^{-2\tau}\,d\tau - \frac{1}{2} + 2i\left(\int_0^\beta e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}\,d\tau - \int_\beta^\nu e^{-(\tau+\nu)}\sqrt{1-e^{2(\tau-\nu)}}\right.$$

$$= 2\nu e^{-2\nu} + e^{-2\nu} - \frac{1}{2} = M,$$

$$\left|\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}\,d\tau\right| \geqq \Re\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}\,d\tau = \int_0^\nu e^{-\nu}\,d\tau + \int_\nu^\infty e^{-\tau}\,d\tau = \nu e^{-\nu} + e^{-\nu} = V\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}\right),$$

also nach 1.:

$$\left|\int_0^\infty \varkappa(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\right| = V\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}\right).$$

§ 13.

Satz 16. *Es sei*

$$f(x) = \frac{1}{x} + a + b\,x + \ldots$$

für $0 < |x| < 1$ *regulär,* $\neq 0$ *und schlicht* (also $|b| \leqq 1$). *Es sei*

$$|b| \leqq \Theta \leqq 1.$$

Dann ist

$$|a| \leqq 2V\left(\frac{1+\Theta}{4}\right),$$

und dies ist die bestmögliche nur von Θ *abhängige Schranke.*

Beweis. 1.

$$\frac{1}{f(x)} = x - a\,x^2 + (a^2 - b)\,x^3 + \ldots = x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots$$

ist für $|x|<1$ regulär und schlicht. Nach Herrn Löwner[35]) gibt es ein für $\tau \geqq 0$ stetiges $\varkappa(\tau)$ mit

$$|\varkappa(\tau)| = 1,$$

so daß einerseits $-2\int_0^\infty \varkappa(\tau)\, e^{-\tau} d\tau$ beliebig nahe an $a_2 = -a$, andererseits $4\left(\int_0^\infty \varkappa(\tau)\, e^{-\tau} d\tau\right)^2 - 2\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\, e^{-2\tau} d\tau$ beliebig nahe an $a_3 = a^2 - b$ liegt, also b beliebig nahe an $2\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\, e^{-2\tau} d\tau$. Aus Stetigkeitsgründen genügt es, aus

$$\left|\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\, e^{-2\tau} d\tau\right| \leqq \frac{\Theta}{2}, \quad \varkappa(\tau) \text{ stetig}, \quad |\varkappa(\tau)| = 1,$$

zu folgern

$$\left|\int_0^\infty \varkappa(\tau)\, e^{-\tau} d\tau\right| \leqq V\left(\frac{1+\Theta}{4}\right).$$

Das tut aber der erste Teil des Satzes 15.

2. Nach Herrn Löwner[35]) gibt es zu jedem für $\tau \geqq 0$ bis auf einen Punkt stetigen $\varkappa(\tau)$ mit $|\varkappa(\tau)| = 1$ eine für $|x|<1$ reguläre-schlichte Funktion $x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ mit

$$a_2 = -2\int_0^\infty \varkappa(\tau)\, e^{-\tau} d\tau,$$

$$a_3 = 4\left(\int_0^\infty \varkappa(\tau) e^{-\tau} d\tau\right)^2 - 2\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\, e^{-2\tau} d\tau,$$

also eine für $0<|x|<1$ reguläre-schlichte Funktion $\frac{1}{x} + a + b\,x + \ldots$ $+0$ mit

$$a = 2\int_0^\infty \varkappa(\tau)\, e^{-\tau} d\tau,$$

$$b = 2\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\, e^{-2\tau} d\tau.$$

Man wähle nach dem zweiten Teil des Satzes 15 ein solches $\varkappa(\tau)$ mit

$$\left|\int_0^\infty \varkappa(\tau)\, e^{-\tau} d\tau\right| = V\left(\frac{1+\Theta}{4}\right),$$

$$\left|\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)\, e^{-2\tau} d\tau\right| \leqq \frac{\Theta}{2}.$$[36])

Dann ist

$$|b| \leqq \Theta,$$[36])

$$|a| = 2V\left(\frac{1+\Theta}{4}\right).$$

---

[35]) Loc. cit., S. 117, 118 und 120.

[36]) Natürlich gilt hier das Gleichheitszeichen.

§ 14.

Satz 17. $$\mathfrak{A} \geqq \frac{1}{2V\left(\frac{1}{3}\right)} > \frac{9}{16} \; (> 0{,}555).$$

Beweis. Nach Satz 4 genügt es zu zeigen: Es sei

$$f(x) = x + a x^3 + \dots$$

für $|x| \leqq 1$ regulär und schlicht; es sei

$$|a| \leqq \frac{1}{3},$$

$$f(x) \neq \gamma \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1.$$

Dann ist

$$|\gamma| \geqq \frac{1}{2V\left(\frac{1}{3}\right)} > \frac{9}{16}.$$

In der Tat ist

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\gamma} - a x + \dots$$

für $0 < |x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und schlicht, also nach Satz 16

$$\left|\frac{1}{\gamma}\right| \leqq 2V\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$|\gamma| \geqq \frac{1}{2V\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{e^{\nu}}{2(\nu+1)},$$

wo ν die positive Wurzel von

$$\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-2\nu} = \frac{1}{3}$$

ist. Wegen

$$\left(\log 1{,}8 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3{,}24} > \frac{1}{3}$$

ist

$$\nu > \log 1{,}8,$$

$$\frac{e^{\nu}}{2(\nu+1)} > \frac{1{,}8}{2(\log 1{,}8 + 1)} > 0{,}566 > \frac{9}{16}.$$

Berlin, den 22. März 1929.

(Eingegangen am 22. März 1929.)

Über schlichte Funktionen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Es sei $a_1 = 1$,

$$f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$$

für $|x| \leqq 1$ regulär und schlicht. Herr Littlewood[1]) hat zuerst bewiesen, daß

$$|a_n| \leqq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} n < en \quad \text{für} \quad n \geqq 2 \tag{1}$$

ist. Die obere Grenze L_n von $\frac{|a_n|}{n}$ (bei festem n) für alle Funktionen unserer Klasse ist also $< e$, die Weltkonstante

$$L = \overline{\lim_{n=\infty}} L_n \leqq e.$$

Herr Littlewood[2]) hat schon

$$L < e$$

(also $L_n < P < e$ für alle n) bewiesen. Durch Weiterführung seiner Methode werde ich

$$L \leqq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) e \tag{2}$$

beweisen.

§ 1.

Ich reproduziere zunächst (mit einer kleinen Vereinfachung[3])) Herrn Littlewoods Beweis von (1).

Für $|x| < 1$ ist

$$\varphi(x) = \sqrt{f(x^2)} = \sum_1^\infty b_n x^n \quad (b_1 = 1)$$

regulär, ungerade und schlicht.

---

[1]) *On Inequalities in the Theory of Functions* [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **23** (1925), S. 481—519], S. 498—499.

[2]) Loc. cit., S. 518—519.

[3]) Begründung von (4) nachher.

Für $|x| \leqq t < 1$ ist bekanntlich

$$|f(x)| \leqq \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Für $|x| \leqq \sqrt{t} < 1$ ist also

$$|\varphi(x)| \leqq \sqrt{\frac{t}{(1-t)^2}} = \frac{\sqrt{t}}{1-t}.$$

Wegen der Schlichtheit ist der Inhalt

$$\pi \sum_1^\infty n |b_n|^2 t^n$$

des φ-Bildes von $|x| \leqq \sqrt{t}$ höchstens

$$\pi \operatorname*{Max}_{|x| \leqq \sqrt{t}} |\varphi(x)|^2 \leqq \pi \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Daher ist für $0 \leqq t < 1$

$$\sum_1^\infty n |b_n|^2 t^{n-1} \leqq \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Für $0 < r < 1$ ist also

$$\sum_1^\infty |b_n|^2 r^n \leqq \int_0^r \frac{dt}{(1-t)^2} = \left\{ \frac{1}{1-t} \right\}_0^r = \frac{r}{1-r}. \tag{3}$$

Aus

$$\sum_1^\infty a_n r^n = \left(\sum_1^\infty b_n r^{\frac{n}{2}} \right)^2$$

folgt

$$|a_n| r^n = \left| \sum_{\nu=1}^{2n-1} b_\nu r^{\frac{\nu}{2}} b_{2n-\nu} r^{\frac{2n-\nu}{2}} \right| \leqq \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{2n-1} (|b_\nu|^2 r^\nu + |b_{2n-\nu}|^2 r^{2n-\nu})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2n-1} |b_\nu|^2 r^\nu \leqq \sum_1^\infty |b_\nu|^2 r^\nu, \tag{4}$$

also nach (3)

$$|a_n| \leqq \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}.$$

Für $n \geqq 2$ liefert $r = \frac{n-1}{n}$

$$|a_n| \leqq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} n < en.$$

§ 2.

Falls man zeigen kann, daß $\varphi(x)$ für $0 < t < 1$ den Kreis $|x| \leqq \sqrt{t}$ auf ein in $|\varphi| \leqq \frac{\sqrt{t}}{1-t}$ gelegenes Gebiet abbildet, das von der Fläche $\pi \frac{t}{(1-t)^2}$ dieses Kreises bei passenden P, p mit $0 < P < 1$, $0 < p < 1$ für $P \leqq t < 1$ höchstens das p-fache bedeckt, so erkennt man leicht, daß

ei passendem $P_1(P)$ für $n \geqq 2$

$$|a_n| < P_1(P) + p\,e\,n,$$

so

$$L \leqq p\,e$$

t. Denn dann ist

$$\sum_1^\infty n\,|b_n|^2\,t^{n-1} \leqq \begin{cases} \frac{p}{(1-t)^2} & \text{für } P \leqq t < 1, \\ P_2(P) & \text{für } 0 \leqq t < P, \end{cases}$$

lso für $P < r < 1$ nach (4)

$$|a_n|\,r^n \leqq P_2(P) \int_0^P dt + p \int_P^r \frac{dt}{(1-t)^2} < P_3(P) + \frac{p\,r}{1-r},$$

lso für $0 < r < 1$

$$|a_n|\,r^n < P_4(P) + \frac{p\,r}{1-r},$$

nd $r = \frac{n-1}{n}$ gibt für $n \geqq 2$

$$|a_n| < P_1(P) + p\,e\,n.$$

Soweit Herr Littlewood.

§ 3.

Ich behaupte, daß es zu jedem p mit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < p < 1$$

in passendes $P(p)$ im Sinne des § 2 gibt (womit (2) bewiesen sein wird).

Es sei $0 < t < 1$. Für $|x| \leqq t$ ist

$$|f(x)| \leqq \frac{t}{(1-t)^2} = M.$$

Es sei

5) $$\frac{1}{\sqrt[4]{1+M^2}} < s < 1,$$

lso

$$0 < u = \frac{\sqrt{1-s^4}}{s^2} < M;$$

(x) läßt in $|x| \leqq 1$ sicher ein $\beta = \beta(t, u, f)$ mit

$$|\beta| = \frac{M}{u}$$

us[4]). (Denn sonst wäre für $|x| = 1$

$$|f(x)| > 1, \quad \left|\frac{x}{f(x)}\right| = |1 + \ldots| < 1.)$$

[4]) Herr Littlewood begnügt sich mit $u = 1$.

Also ist

$$\frac{f(x)}{1-\frac{f(x)}{\beta}} = x + \dots$$

für $|x| \leqq 1$ regulär und schlicht. Für $|x| \leqq t$ ist also

$$\left|\frac{f(x)}{1-\frac{f(x)}{\beta}}\right| \leqq \frac{t}{(1-t)^2} = M.$$

Das φ-Bild von $|x| \leqq \sqrt{t}$ bedeckt also keinen Punkt mit

$$0 < |\varphi| < \sqrt{M}, \qquad \left|\frac{M}{\varphi^2} - \frac{M}{\beta}\right| < 1. \tag{6}$$

Für jedes s mit (5) ist, $\frac{M}{\beta} = u e^{\lambda i}$, $\lambda \gtrless 0$, gesetzt, (6) sicher für

$$\begin{cases} \varphi = s\sqrt{M}\, e^{-\frac{\lambda}{2} i}\, e^{\psi i}, \\ \psi \text{ reell}, \quad |\psi| < \frac{1}{2}\arcsin s^2 \quad \text{oder} \quad |\psi - \pi| < \frac{1}{2}\arcsin s^2, \end{cases}$$

erfüllt; denn dann ist

$$0 < |\varphi| < \sqrt{M},$$

$$\cos 2\psi > \cos \arcsin s^2 = \sqrt{1-s^4},$$

$$\left|\frac{M}{\varphi^2} - \frac{M}{\beta}\right| = \left|\frac{1}{s^2} e^{-2\psi i} - \frac{\sqrt{1-s^4}}{s^2}\right| = \frac{1}{s^2}\sqrt{(\cos 2\psi - \sqrt{1-s^4})^2 + \sin^2 2\psi}$$

$$= \frac{1}{s^2}\sqrt{2 - s^4 - 2\cos 2\psi \sqrt{1-s^4}} < 1.$$

Also läßt $\varphi(x)$ auf $|\varphi| < \sqrt{M}$ sicher leer eine Menge des Inhalts

$$\geqq M \int_{\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}}^{1} s \cdot 2 \arcsin s^2\, ds = M \int_{\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}}^{1} \arcsin z\, dz$$

$$= M\left(\int_0^1 \arcsin z\, dz + o(1)\right) \quad (\text{bei } t \to 1)$$

$$= M\left(\left\{z \arcsin z + \sqrt{1-z^2}\right\}_0^1 + o(1)\right) = M\left(\frac{\pi}{2} - 1 + o(1)\right).$$

Es bedeckt also für $P(p) \leqq t < 1$ nur eine Menge des Inhalts $\leqq M\pi p$, was zu beweisen war.

Berlin, den 22. März 1929.

(Eingegangen am 23. März 1929.)

Berichtigung zu meiner Arbeit „Über die Bewegung eines kleinen starren Probekörpers in beliebig vorgegebenen Gravitationsfeldern".

Von

G. Thomsen in Hamburg.

In meiner im Band 29 (1928) erschienenen Arbeit ist ein Fehler unterlaufen, der zwar für die sich dort anschließenden weiteren Untersuchungen keine Bedeutung hat, dessen Richtigstellung aber an und für sich von Interesse sein dürfte. Ich wurde von verschiedenen Seiten, zuerst von Herrn A. Wundheiler aus Warschau auf diesen Fehler aufmerksam gemacht.

Hat man im Riemannschen Raum eine Kurve C in der Parameterdarstellung $x^i(\sigma)$, wo σ die Bogenlänge ist, so kann man einen kontravarianten Vektor u^i nach verschiedenen invarianten Gesetzen längs der Kurve C verschieben. Gilt für die Schar der Vektoren $u^i(\sigma)$ längs C:

$$\frac{du^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{kl}\, u^k \frac{dx^l}{d\sigma} = 0, \tag{1}$$

so hat man die *Parallelverschiebung von Levi-Civita*, gilt statt dessen

$$\frac{du^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{kl}\, u^k \frac{dx^l}{d\sigma} = -\left[g_{rt}\, u^r \left(\frac{d^2x^t}{d\sigma^2} + \Gamma^t_{pq} \frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right] \cdot \frac{dx^t}{d\sigma}, \tag{2}$$

so hat man die sogenannte *Verschiebung von Fermi*, gilt endlich das Gesetz

$$\frac{du^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{kl}\, u^k \frac{dx^l}{d\sigma} = -\left[g_{rt}\, u^r \left(\frac{d^2x^t}{d\sigma^2} + \Gamma^t_{pq} \frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{dx^i}{d\sigma} - \frac{\cos\Theta}{l\cdot\sin^2\Theta} u^i\right), \tag{3}$$

wobei

$$l = \sqrt{g_{ik}\, u^i u^k} \qquad \text{und} \qquad \cos\Theta = \frac{g_{k}\, u^t \dfrac{dx^k}{d\sigma}}{l}$$

gesetzt ist, so hat man die *Verschiebung von Wundheiler*.

Die Verschiebung von Wundheiler ist durch folgende drei geometrischen Eigenschaften gekennzeichnet:

A. Verschiebt man mittels dieses Gesetzes den Vektor u^i vom Punkte P der Kurve C nach dem Nachbarpunkt $P+dP$ auf C, so bildet der dort entstehende Vektor $u^i+\Delta u^i$ in $P+dP$ mit der Kurve C denselben Winkel Θ wie u^i in P.

B. $u^i+\Delta u^i$ hat dieselbe „Länge“ l wie u^i.

C. $u^i+\Delta u^i$ liegt in dem Flächenelement, das in $P+dP$ bestimmt ist durch die Tangente von C und denjenigen Vektor, der aus u^i durch die Verschiebung (1) von Levi-Civita hervorgeht.

Auf Seite 105 meiner Arbeit ist irrtümlich die Behauptung aufgestellt worden, daß die Verschiebung (2) von Fermi die Eigenschaften A., B., C. besitzt. Dies ist offenbar nur für zur Kurve C senkrechte Vektoren u^i richtig, bei denen wegen $\Theta=\pi:2$ die Verschiebung von Wundheiler mit der von Fermi zusammenfällt. Da es sich bei dem mechanischen Problem meiner Arbeit nur um zur Kurve senkrechte Vektoren handelt, bleiben die im Späteren abgeleiteten Formeln richtig.

(Eingegangen am 4. Mai 1929.)

Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie[1]).

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Einleitung.

Die wichtigsten allgemeinen Sätze über hyperkomplexe Systeme gehen auf Molien (Math. Annalen Bd. 41 und Dorpater Ber. 1897) zurück. Im wesentlichen unabhängig davon hat Frobenius kurz darauf die Theorie der hyperkomplexen Systeme und ihrer Darstellungen — insbesondere die Darstellungstheorie endlicher Gruppen — einheitlich entwickelt. Die Grundlage bildet der auf Dedekind zurückgehende Begriff der Gruppendeterminante, allgemeiner der Determinante eines beliebigen hyperkomplexen Systems. Frobenius zeigt, daß den verschiedenen irreduziblen Faktoren dieser Determinante (als Koeffizientenbereich gilt immer der Körper aller komplexen Zahlen) die verschiedenen irreduziblen Darstellungsklassen entsprechen, und daß auf diese Art alle irreduziblen Darstellungsklassen erschöpft werden. Eine solche Darstellungsklasse ist vollständig charakterisiert durch ihr „Charakterensystem"; im Fall der endlichen Gruppen entsteht dies Charakterensystem durch Zerfällung der Determinante desjenigen kommutativen hyperkomplexen Systems, das aus den Klassen konjugierter Elemente der Gruppe abgeleitet ist. Diese Determinante zerfällt in Linearfaktoren, mit den Charakteren als Koeffizienten — eine direkte Verallgemeinerung des zuerst von Dedekind erhaltenen Resultates, daß die Gruppendeterminante einer endlichen Abelschen Gruppe in Linearfaktoren zerfällt, deren Koeffizienten die verschiedenen Charaktere der Abelschen Gruppe sind (Briefwechsel mit Frobenius).

[1]) Das Folgende ist eine von B. L. van der Waerden angefertigte freie Ausarbeitung meiner Vorlesung vom Wintersemester 1927/28. Die Bearbeitung für den Druck haben wir gemeinsam vorgenommen. Ich bin B. L. van der Waerden auch noch für eine Reihe von kritischen Bemerkungen zu Dank verpflichtet.

Diese begrifflich einfachen und durchsichtigen Resultate werden aber bei Frobenius durch mühevolle Rechnung gewonnen. Die spätere Entwicklung galt einer vereinfachten Herleitung dieser Resultate, und zugleich ihrer Ausdehnung bei Zugrundelegung eines beliebigen Körpers als Koeffizientenbereich. Diese spätere Entwicklung hat sich für hyperkomplexe Systeme und Darstellungstheorie völlig getrennt vollzogen. Die hyperkomplexen Systeme fanden eine arithmetische Behandlung durch Wedderburn: Jedes hyperkomplexe System wird eindeutig direkte Summe zweiseitig direkt unzerlegbarer Ringe; bei Systemen ohne Radikal werden diese unzerlegbaren Ringe isomorph dem System aller n-reihigen Matrizen mit Elementen aus einem — im wesentlichen eindeutig bestimmten — zugeordneten nicht notwendig kommutativen Körper[2]). Die Darstellungstheorie fand eine elementare Begründung durch Burnside und I. Schur, die unabhängig vom hyperkomplexen System direkt von einer gegebenen Darstellung ausgingen und mit Matrizensätzen operierten. Insbesondere behandelte Schur die Frage nach den Zahlkörpern kleinsten Grades, in denen eine in einem gegebenen Körper irreduzible Darstellung absolut zerfällt. Diese absolut irreduziblen Bestandteile gehören zu endlich vielen konjugierten Darstellungsklassen. Der Grad der gesuchten Zahlkörper wird gleich dem Produkt aus der Anzahl dieser Klassen mit dem Index (Anzahl der Bestandteile in jeder der konjugierten Klassen). Das Haupthilfsmittel der Schurschen Theorie bildet das System aller mit einer irreduziblen Darstellung vertauschbaren Matrizen[3]).

In der folgenden rein arithmetischen Begründung erscheinen hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie wieder als ein einheitliches Ganzes — als Spezialfall einer allgemeinen Theorie der nichtkommutativen Ringe, die nur gewissen Endlichkeitsbedingungen genügen. Und zwar handelt es sich um eine Theorie der Modul- und Idealklassen in bezug auf diese Ringe mit dem Hauptresultat, daß die irreduziblen Modulklassen schon durch die entsprechenden Idealklassen erschöpft werden; daß insbesondere für Ringe ohne Radikal alle Modulklassen in irreduzible zerfallen (vollständig reduzibel werden). Das ist das arithmetische Äquivalent des Frobeniusschen Resultates, daß die irreduziblen Faktoren der regulären Gruppen- (bzw. System-) Determinante schon die Gesamtheit der irreduziblen Darstellungsklassen erschöpfen und daß bei Systemen ohne Radikal volle Reduzibilität der Darstellungen gilt. Die Betrachtung der Systemdeterminante und ihrer Zerfällung läßt sich nämlich auffassen als ein Übergang zur Norm, während hier die direkte Summenzerlegung der Ideale und ihre Kompositionsreihen

[2]) Vgl. die Literaturangaben bei Dickson, Algebras and their Arithmetics (deutsche Ausgabe: Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927).

[3]) Vgl. die Literaturangaben im 10. Kapitel der Speiserschen Gruppentheorie.

direkt behandelt werden. Die Darstellungstheorie aber wird vermöge des Begriffs des Darstellungsmoduls eine Theorie der Modulklassen.

Die Einführung der Modul- und Idealklassen ist rein gruppentheoretisch begründet. Moduln und Ideale werden aufgefaßt als Abelsche Gruppen gegenüber der Addition, dadurch eingeschränkt, daß sie gewisse Multiplikationen mit Ringelementen gestatten: sie bilden „Gruppen mit Operatoren" (§ 1). Für solche Gruppen tritt an Stelle des gewöhnlichen Isomorphismus der „Operatorisomorphismus" (§ 2); unter sich operator-isomorphe Gruppen (eines festen Bereichs) werden in eine Klasse zusammengefaßt — ein Klassenbegriff, der etwa im Falle der Ideale eines Zahlkörpers mit dem üblichen zusammenfällt. Die Theorie der Gruppen mit Operatoren geht auf W. Krull und O. Schmidt zurück (vgl. Anm. [6]), sie wird im I. Kapitel systematisch entwickelt. Die auch hier gültig bleibenden Sätze über Kompositionsreihen, direktes Produkt (bzw. Summe) und vollständig reduzible Gruppen — Eindeutigkeitssätze im Sinn der oben erwähnten Klasseneinteilung — bilden die Grundlage alles Folgenden.

Sie ergeben vorerst die allgemeinen *Eindeutigkeitssätze* der irreduziblen Diagonalbestandteile bei *beliebigen Darstellungen* (III. Kapitel § 16), auf Grund der Tatsache des eineindeutigen Entsprechens der Darstellungsklassen mit den Klassen der Darstellungsmoduln, also Klassen von Gruppen mit Operatoren. Die weitergehende Frage nach der *Gesamtheit* der Darstellungen erfordert ein genaueres Eingehen auf die Struktur der darzustellenden Ringe, also im Spezialfall der hyperkomplexen Systeme. Im II. Kapitel werden die Wedderburnschen Resultate neu gewonnen und weitergeführt, auf Grund der gruppentheoretischen Auffassung, wonach die Betrachtung der einseitigen Ideale im Vordergrund steht. Und zwar zeigt es sich, daß der „Vielfachenkettensatz" für Rechtsideale oder die damit identische „Minimalbedingung" (in jeder Menge von Rechtsidealen gibt es mindestens ein — in der Menge — minimales) als Endlichkeitsbedingung ausreicht [4]). Es ergibt sich die Identität der Ringe ohne Radikal mit Minimalbedingung mit den (rechts) vollständig reduziblen Ringen mit Einheitselement. Bei solchen Ringen gehören alle einfachen Rechtsideale eines zweiseitig unzerlegbaren Ringes derselben Klasse an, besitzen daher

[4]) Die Wedderburnschen Schlußweisen lassen sich übertragen, wenn „Doppelkettensatz" vorausgesetzt wird. Vgl. E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Hamb. Abh. 1927. Vgl. auch A. Suschkewitsch, Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, Math. Annalen 99 (1928), S. 30—50, wo für (endliche) Bereiche mit nur *einer* assoziativen, nicht umkehrbaren Verknüpfung parallellaufende Struktursätze entwickelt werden. Die Aufspaltung des „Kerns" bei Suschkewitsch in Rechts- und Linksgruppen entspricht der Summendarstellung eines zweiseitig einfachen Ringes mit Einheitselement durch Rechts- und Linksideale.

— als Gruppe mit Operatoren — denselben Automorphismenring, der wegen der Einfachheit der Ideale zum Körper wird. Dieser Automorphismenkörper der Klasse ist es, der die von Wedderburn gefundene Matrizendarstellung vermittelt.

Diese Matrizendarstellung im Automorphismenkörper löst zugleich im vollständig reduziblen Fall das Darstellungsproblem, sobald Darstellung in bezug auf den Automorphismenkörper oder seine Unterkörper verlangt wird — also insbesondere in bezug auf den Koeffizientenbereich eines hyperkomplexen Systems. Es gibt — das ist direkte Folge des Satzes von der Zurückführung der Modul- auf Idealklassen — keine weiteren irreduziblen Darstellungen als die Wedderburnsche und diejenigen, die daraus entstehen, wenn die Elemente des Automorphismenkörpers in naheliegender Weise durch Matrizen aus einem Unterkörper ersetzt werden.

Es gibt also im vollständig reduziblen Fall soviel verschiedene irreduzible Darstellungsklassen wie Idealklassen; deren Anzahl stimmt überein mit der Anzahl der verschiedenen zweiseitig unzerlegbaren, also einfachen Ringe. Deren Anzahl ist schließlich wieder identisch mit der Anzahl der unzerlegbaren Komponenten des Zentrums, die kommutative Körper werden. Diese letzteren sind im Fall der hyperkomplexen Systeme mit algebraisch-abgeschlossenem Koeffizientenbereich vollständig bestimmt durch die verschiedenen Ringhomomorphismen (irreduzible Darstellungen) des Zentrums; das sind aber bis auf einen Zahlenfaktor die Charaktere.

Die erhaltenen Resultate ergeben zugleich Übersicht über die irreduziblen Darstellungen von Systemen mit Radikal, insofern sich diese auf die Darstellungen des Restklassenringes nach dem Radikal zurückführen lassen, der ein System ohne Radikal wird.

Wie später gezeigt werden wird, folgt für hyperkomplexe Systeme ohne Radikal aus dem Automorphismenkörper auch die Theorie der „Zerfällungskörper", d. h. der kommutativen Erweiterungen des Koeffizientenbereichs, in dem die Darstellungen in absolut irreduzible zerfallen — anders ausgedrückt, in dem eine direkte Summenzerlegung in absolut einfache Rechtsideale statthat. Die Zerfällungskörper sind identisch mit denen des Automorphismenkörpers, und alle Zerfällungskörper kleinsten Grades sind den maximalen kommutativen Unterkörpern des Automorphismenkörpers isomorph. Der Zusammenhang mit den oben erwähnten Schurschen Untersuchungen ist dadurch hergestellt, daß die Transponierten der mit der Darstellung vertauschbaren Matrizen gerade eine Darstellung des Automorphismenkörpers liefern[5]) Diese Sätze sollen systematisch im

[5]) Vgl. dazu R. Brauer-E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1927, S. 221.

Rahmen einer Galoisschen Theorie nichtkommutativer Körper entwickelt werden.

Die zugrunde gelegten Begriffe — Operatorhomomorphismus und Automorphismenring — ergeben auch die Struktur allgemeiner Ringe mit Radikal, die nur der Minimalbedingung genügen; das wird von anderer Seite ausgeführt werden.

I. Kapitel.

Gruppentheoretische Grundlagen.

§ 1.

Gruppen mit Operatoren[6]).

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe (endlich oder unendlich); Elemente $a, b, \ldots$.

Unter einem Operatorenbereich Ω für die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei eine Menge von neuen Symbolen $\mathsf{H}, \Theta, \ldots$ verstanden, so daß zu jedem a aus $\mathfrak{G}$ und jedem Θ aus Ω ein Θa aus $\mathfrak{G}$ eindeutig definiert ist, und daß das distributive Gesetz erfüllt ist:

$$\Theta(ab) = \Theta a \cdot \Theta b.$$

Demnach definiert jeder Operator einen Homomorphismus der Gruppe in sich, wobei die Gruppe auf sich selbst oder auf eine Untergruppe abgebildet wird. Das Einheitselement geht dabei ins Einheitselement, Inverses in Inverses über.

Ein Operatorenbereich heißt ein *absoluter*, wenn verschiedene Operatoren auch verschiedene Homomorphismen definieren. Aus einem beliebigen Operatorenbereich geht ein absoluter hervor, indem man alle die Elemente gleichsetzt, die denselben Homomorphismus erzeugen. Ein absoluter Operatorenbereich ist eineindeutiges Bild einer Untermenge der Menge aller Homomorphismen der Gruppe in sich.

Eine *zulässige Untergruppe* $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ — in bezug auf einen festen Operatorenbereich Ω — ist eine solche Untergruppe, die den Operatorenbereich gestattet, wo also Θa in $\mathfrak{H}$ für jedes a aus $\mathfrak{H}$ und Θ aus Ω.

Beispiele. 1. Die Operatoren seien die inneren Automorphismen: $\Theta a = c^{-1}ac$. Zulässige Untergruppen sind die Normalteiler.

2. Die Operatoren seien alle Automorphismen. Zulässige Untergruppen sind die „charakteristischen Untergruppen", welche bei allen Automorphismen in sich übergehen.

---

[6]) Die hier erklärten Begriffe stammen von W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 161–196, und O. Schmidt, Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 34–41.

3. $\mathfrak{G}$ sei ein Ring, d. h. eine Abelsche Gruppe gegenüber Addition, wo auch eine Multiplikation definiert ist, mit den Eigenschaften

$$r(a+b) = ra + rb,$$
$$(a+b)r = ar + br,$$
$$ab \cdot c = a \cdot bc.$$

Jedes Element r definiert zugleich zwei Operatoren: die Operatoren rx und xr. Zugelassene Untergruppen sind die „Ideale“ $\mathfrak{a}$, und zwar:

linksseitige, die die Operationen rx gestatten: $r\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$;

rechtsseitige, die die Operationen xr gestatten: $\mathfrak{a}r \subseteq \mathfrak{a}$;

zweiseitige, die beide Operationen gestatten.

Alle Ideale werden trivial ($= \{0\}$ oder $= \mathfrak{G}$), wenn der Ring $\mathfrak{G}$ ein *Körper* ist, d. h. wenn $\mathfrak{G} - \{0\}$ eine Gruppe gegenüber der Multiplikation ist[7]).

4. *Moduln in bezug auf einen Ring* $\mathfrak{o}$.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring, und $\mathfrak{M}$ eine Abelsche Gruppe, additiv geschrieben. Es sei eine Multiplikation $r \cdot a$ der Elemente von $\mathfrak{o}$ mit denen von $\mathfrak{M}$ gegeben; das Produkt soll wieder in $\mathfrak{M}$ enthalten sein. Man fordert:

$$\left.\begin{aligned} r(a+b) &= ra + rb \\ rs \cdot a &= r \cdot sa \\ (r+s)a &= ra + sa \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} r, s \text{ in } \mathfrak{o}, \\ a, b \text{ in } \mathfrak{M}. \end{array}$$

Dann heißt $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-*Modul*; genauer, da die Multiplikatoren aus $\mathfrak{o}$ links geschrieben werden, ein $\mathfrak{o}$-*links-Modul*. Der Ring $\mathfrak{o}$ ist zugleich Operatorenbereich. Ist es ein absoluter, d. h. ergeben verschiedene Ringelemente auch verschiedene Operationen, so redet man von einem *absoluten Multiplikatorenbereich* für den Modul $\mathfrak{M}$.

Wie oben kann man von einem beliebigen Multiplikatorenbereich zum absoluten übergehen durch Gleichsetzen der Elemente, welche dieselbe Operation erzeugen. Der absolute Multiplikatorenbereich ist wieder ein Ring. Die zulässigen Untergruppen eines Moduls $\mathfrak{M}$ heißen *Untermoduln*. Ist speziell jetzt $\mathfrak{o} = \mathfrak{M}$, so kommt man auf die Linksideale zurück[8]).

---

[7]) Es wird also weder für Ringe noch für Körper das kommutative Gesetz der Multiplikation vorausgesetzt.

[8]) In gleicher Weise fordert man für Rechtsmoduln:

$$(a+b)r = ar + br,$$
$$a \cdot rs = ar \cdot s,$$
$$a(r+s) = ar + as.$$

5. *Doppelmoduln.* Ist $\mathfrak{M}$ zugleich $\mathfrak{o}$-links-Modul und $\mathfrak{o}'$-rechts-Modul, und ist außerdem für a in $\mathfrak{o}$, α in $\mathfrak{M}$, a' in $\mathfrak{o}'$ stets:

$$a \cdot \alpha a' = a\alpha \cdot a',$$

so heißt $\mathfrak{M}$ ein *Doppelmodul.*

6. *Automorphismenring einer Abelschen Gruppe*[9]). Für die Homomorphismen in sich einer (additiv geschriebenen) Abelschen Gruppe kann man eine Addition und eine Multiplikation definieren durch die Formeln:

$$(\mathsf{H} + \Theta)a = \mathsf{H}a + \Theta a, \quad (\mathsf{H}\Theta)a = \mathsf{H}(\Theta a).$$

Die so definierten Operationen stellen ersichtlich wieder Homomorphismen dar, gehören also wieder dem System an. Das System bildet einen Ring, und die Abelsche Gruppe läßt sich nach 4. auffassen als Modul in bezug auf diesen Ring.

Mit „Untergruppen" sind fortan immer zulässige Untergruppen gemeint. Der Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ zweier zulässiger Untergruppen ist wieder eine zulässige Untergruppe. Ebenso das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, falls mindestens eine der beiden Untergruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Normalteiler ist.

§ 2.

Die Isomorphiesätze.

Eine Abbildung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ — wobei $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ denselben Operatorenbereich besitzen sollen — heißt *Operatorhomomorphismus,* wenn sie erstens ein Homomorphismus im gewöhnlichen Sinne ist $(a\,b \to \bar{a}\,\bar{b})$, und wenn zweitens, sobald a auf $\bar{a}$ abgebildet ist, Θa auf $\Theta \bar{a}$ abgebildet wird[10]). Zeichen: $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}$. Ist die Zuordnung eineindeutig, so heißt sie *Operatorisomorphie.* Zeichen: $\mathfrak{G} \simeq \overline{\mathfrak{G}}$. Man beweist entsprechend wie bei gewöhnlichen Gruppen den Homomorphiesatz:

Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ ein operatorhomomorphes Bild von $\mathfrak{G}$, so wird $\overline{\mathfrak{G}}$ operatorisomorph einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{N}$ ein zulässiger Normalteiler ist, bestehend aus allen Elementen von $\mathfrak{G}$, denen die Einheit in $\overline{\mathfrak{G}}$ entspricht. Umgekehrt definiert jeder zulässige Normalteiler $\mathfrak{N}$ eine Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, die den Operatorenbereich von $\mathfrak{G}$ gestattet und ein operatorhomomorphes Abbild von $\mathfrak{G}$ ist.

---

[9]) Vgl. A. Chatelet, Les Groupes Abéliens finis, Paris, Gauthier-Villars, 1925, p. 99.

[10]) Man kann den Begriff des Operatorhomomorphismus dahin erweitern, daß die Gruppen $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ getrennte Operatorenbereiche besitzen, wobei der Homomorphismus nicht nur $\mathfrak{G}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$, sondern auch die Operatorenbereiche aufeinander abbildet, derart, daß, wenn a auf $\bar{a}$ und Θ auf $\bar{\Theta}$ abgebildet wird, $\bar{\Theta}\bar{a}$ das Bild von Θa ist. In dieser allgemeinen Fassung umfaßt der Begriff des Operatorhomomorphismus auch den des Ringhomomorphismus; vgl. § 8.

Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine Normalteiler außer sich selbst und der Einheitsgruppe besitzt. Jeder Homomorphismus einer einfachen Gruppe ist entweder ein Isomorphismus, oder jedem Element wird das Einheitselement zugeordnet.

Erster Isomorphiesatz. *Ist* $\overline{\mathfrak{G}}$ *homomorphes Abbild von* $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ *ein Normalteiler von* $\overline{\mathfrak{G}}$, *und* $\mathfrak{A}$ *die Gesamtheit der Elemente von* $\mathfrak{G}$, *denen Elemente von* $\overline{\mathfrak{A}}$ *zugeordnet sind, so ist* $\mathfrak{A}$ *wieder Normalteiler, und*

$$\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Beweis. $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{G}} \sim \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$, also $\mathfrak{G} \sim \overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$. Also $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$ isomorph einer Faktorgruppe in $\mathfrak{G}$; der zugehörige Normalteiler ist die Gesamtheit der Elemente, denen die Einheit in $\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}}$ entspricht; das ist aber $\mathfrak{A}$.

Zusatz. Setzt man nach dem Homomorphiesatz $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so wird $\mathfrak{A}$ sicher $\mathfrak{N}$ umfassen. Aus $\mathfrak{A}$ läßt sich $\overline{\mathfrak{A}}$ zurückgewinnen: $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$. Die Zuordnung $\mathfrak{A} \rightleftarrows \overline{\mathfrak{A}}$ ist eineindeutig. Die Formel (1) läßt sich auch schreiben:

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\big/(\mathfrak{A}/\mathfrak{N}) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}.$$

Zweiter Isomorphiesatz. *Sei* $\mathfrak{A}$ *Untergruppe*, $\mathfrak{B}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. *Dann ist* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *Normalteiler in* $\mathfrak{A}$, *und*

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

Beweis. Bei der Homomorphie $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ werden insbesondere den Elementen a von $\mathfrak{A}$ gewisse Restklassen $a\mathfrak{B}$ zugeordnet, die zusammen die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ ausmachen. Also $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$, woraus nach dem Homomorphiesatz die Behauptung folgt.

Eine operatorhomomorphe Abbildung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ auf sich selbst oder auf eine Untergruppe heißt ein *Homomorphismus-in-sich* von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ speziell eine (additiv geschriebene) Abelsche Gruppe (mit Operatoren) und definiert man wie oben (§ 1, Beispiel 6) Summe und Produkt von Homomorphismen, so bilden die Operatorhomomorphismen der Gruppe in sich einen Ring, den *Automorphismenring*.

Der Automorphismenring einer einfachen Abelschen Gruppe (mit Operatoren) ist ein Körper.

Beweis. Jeder Homomorphismus bildet die Gruppe entweder auf sich oder auf die Nullgruppe ab (da es keine anderen zulässigen Untergruppen gibt). Die Homomorphismen, welche nicht alles auf die Null abbilden, sind nach dem oben über einfache Gruppen bemerkten Isomorphismen, und die isomorphen Abbildungen einer Gruppe auf sich bilden eine Gruppe. Somit wird der Ring nach Weglassung des Nulloperators eine Gruppe, also ist der Ring selbst ein Körper.

Ist speziell $\mathfrak{G}$ ein $\mathfrak{o}$-links-Modul, und schreibt man die Operatorhomomorphismen als Rechtsoperatoren, so wird $\mathfrak{G}$ ein *Doppelmodul in bezug auf $\mathfrak{o}$ links und den Automorphismenring rechts.* Denn die Tatsache, daß die neuen Operatoren Γ als Homomorphismen gewählt waren, wird ausgedrückt durch die Formeln

$$(a+b)\Gamma = a\Gamma + b\Gamma, \qquad ra\cdot\Gamma = r\cdot a\Gamma,$$

die (zusammen mit den übrigen, schon früher gedeuteten) den Doppelmodul charakterisieren.

Ist umgekehrt ein Doppelmodul gegeben, so drücken ebendieselben Formeln aus, daß jedes Element des Rechtsmultiplikatorenbereichs einen Operatorhomomorphismus in bezug auf die Linksoperatoren induziert, und umgekehrt.

§ 3.

Kompositionsreihen.

Wenn es in $\mathfrak{G}$ eine endliche Reihe von zulässigen Untergruppen

$$\mathfrak{G} > \mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}_2 > \ldots > \mathfrak{A}_r = \mathfrak{E} \tag{2}$$

($\mathfrak{E}$ ist die aus der Einheit e allein bestehende Gruppe) gibt, so daß jedes $\mathfrak{A}_i$ Normalteiler im vorangehenden ist, und es unmöglich ist, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe noch eines von gleicher Eigenschaft einzuschieben, so heißt die Reihe eine *Kompositionsreihe.*

Die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_{r-1}/\mathfrak{E}$ heißen *Kompositionsfaktoren.* Sie sind *einfache Gruppen,* d. h. besitzen keine zulässigen Normalteiler außer sich selbst und der Einheitsgruppe.

Nimmt man unter die Operatoren insbesondere alle inneren Automorphismen auf, so besteht die Reihe (2) aus lauter Normalteilern, und man nennt sie *Hauptreihe.* Nimmt man alle Automorphismen auf, so heißt sie *charakteristische Reihe.* Bei den weiteren Beispielen des § 1 würde es sich um Kompositionsreihen von Idealen in $\mathfrak{o}$, bzw. Kompositionsreihen von Moduln oder Doppelmoduln handeln.

Satz von Jordan-Hölder. *Wenn für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ zwei verschiedene Kompositionsreihen existieren:*

$$\mathfrak{G} > \mathfrak{A} > \mathfrak{A}_2 > \ldots > \mathfrak{A}_r = \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{G} > \mathfrak{B} > \mathfrak{B}_2 > \ldots > \mathfrak{B}_s = \mathfrak{E},$$

so haben sie dieselbe Länge: $r = s$, und die Kompositionsfaktoren

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{A}_{r-1}/\mathfrak{E}$$

sind in irgendeiner Reihenfolge isomorph zu

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}/\mathfrak{B}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{B}_{s-1}/\mathfrak{E}.$$

Für den Beweis siehe etwa E. Noether, Abstrakter Aufbau usw., Math Annalen 96 (1926), § 10, S. 57. Gleichzeitig wird dort bewiesen:

Wenn es in $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe gibt, so läßt sich durch jeden Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe ziehen.

Die Existenz einer Kompositionsreihe ist klar für endliche Gruppen, allgemeiner für diejenigen Gruppen, in denen eine Maximal- und eine Minimalbedingung gilt:

Die *Maximalbedingung* besagt, daß es in jeder Menge von Untergruppen eine maximale Untergruppe gibt, d. h. eine solche, die nicht mehr von einer anderen Untergruppe der Menge umfaßt wird. Äquivalent damit ist, daß jede aufsteigende Kette von Untergruppen $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3 \ldots$ nach endlich vielen Gliedern abbricht.

Die *Minimalbedingung* besagt, daß es in jeder Menge von Untergruppen eine minimale gibt, die keine andere der Menge mehr umfaßt, oder auch daß jede absteigende Kette $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3 \ldots$ nach endlichvielen Gliedern abbricht.

Sind nur Normalteiler als Untergruppen zugelassen (z. B. bei Abelschen Gruppen), *so folgen aus der Existenz der Kompositionsreihe umgekehrt die Maximal- und Minimalbedingung.*

Beweis. Jeder Normalteiler besitzt eine Kompositionsreihe, deren Länge als *Länge des Normalteilers* bezeichnet wird. Ist $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so ist die Länge von $\mathfrak{A}$ kleiner als die von $\mathfrak{B}$, da durch $\mathfrak{A}$ eine Kompositionsreihe für $\mathfrak{B}$ gezogen werden kann. Also ist jede Untergruppe kürzester Länge zugleich minimal, und jede von größter Länge zugleich maximal.

§ 4.

Direkte Produkte und Durchschnitte.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *direktes Produkt* von zwei Faktoren, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, wenn

1. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ sind,
2. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$,
3. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$.

Die Definition ist offenbar äquivalent mit:

Jedes Element g von $\mathfrak{G}$ ist eindeutig darstellbar als $g = ab$, a in $\mathfrak{A}$, b in $\mathfrak{B}$, und die Elemente von $\mathfrak{A}$ sind mit denen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar: $ab = ba$.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *direktes Produkt* von n Faktoren, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$, wenn $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}\, \mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n$ gesetzt, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i$ direkt für jedes i ist.

Die Definition ist wieder äquivalent mit:

Jedes g von $\mathfrak{G}$ ist eindeutig darstellbar als

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n, \quad a_i \text{ in } \mathfrak{A}_i,$$

und die Elemente von $\mathfrak{A}_i$ sind mit denen von $\mathfrak{A}_k$ vertauschbar.

Die folgenden Tatsachen werden oft benutzt:

1. Ist $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \times \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n \times \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$.

2. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_n$, und $\mathfrak{C}_i \leqq \mathfrak{A}_i$, so $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{A}_i$. (Folgt aus der Darstellung der Elemente von $\mathfrak{A}_i$ durch die $\mathfrak{C}_j$.)

3. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{K} \geqq \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{B})$. (Folgt aus der Darstellung der Elemente von $\mathfrak{K}$ in der Form $a\,b$, wobei der zweite Faktor sowohl zu $\mathfrak{K}$ wie zu $\mathfrak{B}$ gehört.)

4. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ (zweiter Isomorphiesatz). Daraus folgt weiter:

5. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, und besitzen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Kompositionsreihen der Längen m und n, so besitzt $\mathfrak{G}$ eine Kompositionsreihe der Länge $m + n$.

6. Ist $\mathfrak{A} \simeq \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \simeq \overline{\mathfrak{B}}$, so $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \simeq \overline{\mathfrak{A}} \times \overline{\mathfrak{B}}$.

Eine Gruppe heißt *direkt unzerlegbar*, wenn sie sich nicht als direktes Produkt von Faktoren $\neq \mathfrak{E}$ darstellen läßt.

Klar ist:

Jede Gruppe mit Minimalbedingung ist direktes Produkt von endlichvielen direkt unzerlegbaren Gruppen[11]).

Schreibt man die betreffenden Gruppen additiv, so gehen die Begriffe: Produkt, direktes Produkt, über in Summe, direkte Summe. Zeichen: für eine Summe von Gruppen $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots)$, für direkte Summe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots$.

Der Begriff des „direkten Durchschnittes" wird zwar im weiteren nicht benutzt, aber die folgenden Sätze über den Zusammenhang zwischen direktem Durchschnitt und direktem Produkt zeigen, wie die Idealtheorie der nächsten Kapitel sich auch mit Durchschnitten statt Summen formulieren läßt, wodurch der Zusammenhang mit den bekannten kommutativen Theorien hergestellt wird.

---

[11]) Wie W. Krull im kommutativen Fall und O. Schmidt allgemein gezeigt haben (vgl. Anmerk. [6])), ist unter Voraussetzung von Maximal- und Minimalbedingung die Darstellung bis auf Isomorphie eindeutig. Da man, ohne den Begriff der direkt-Unzerlegbarkeit zu ändern, alle inneren Automorphismen zum Operatorenbereich hinzunehmen kann, so genügt es, die Endlichkeitsbedingungen für Normalteiler oder die Existenz einer Hauptreihe zu verlangen.

Eine Gruppe $\mathfrak{D}$ heißt *direkter Durchschnitt* von zwei Gruppen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$, wenn

1. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ sind,
2. $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{D}$,
3. $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$.

Ebenso heißt $\mathfrak{D}$ *direkter Durchschnitt* von n Gruppen $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$, wenn $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_{i-1} \cap \mathfrak{S}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_n$ gesetzt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{S}_i$ direkt für jedes i ist.

Aus der Definition folgt, daß $\mathfrak{D}$ Normalteiler in $\mathfrak{G}$ sein muß.

Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_n$ direkt und gehen beim Homomorphismus $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ die Gruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}, \mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{E}}$ über, so wird $\overline{\mathfrak{E}} = \overline{\mathfrak{S}}_1 \cap \ldots \cap \overline{\mathfrak{S}}_n$ direkt. Umgekehrt kommt man von jeder solchen Darstellung $\overline{\mathfrak{E}} = \overline{\mathfrak{S}}_1 \cap \ldots \cap \overline{\mathfrak{S}}_n$ zu einer direkten Darstellung $\mathfrak{D} = \mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_n$ zurück. Durch diese Zuordnung werden Sätze über direkte Durchschnitte bei beliebigem $\mathfrak{D}$ auf den Spezialfall $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ zurückgeführt.

Im Falle $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ und zwei Faktoren stimmen die Bedingungen für direktes Produkt und direkten Durchschnitt überein. Bei n Faktoren besteht folgende eineindeutige Beziehung zwischen direktem Produkt und Durchschnitt:

I. *Ist* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{B}_i$, *so* $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{C}_i$ *direkt und* $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{A}_i$.

II. *Ist* $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_n = \mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{S}_i$ *direkt, so* $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_i \times \mathfrak{T}_i$ *und* $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{S}_i$.

Beweis von I. Sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{C}_i$, dann $\mathfrak{C}_i \geq \mathfrak{A}_i$; wir zeigen $\mathfrak{C}_i \leq \mathfrak{A}_i$. Sei c etwa in $\mathfrak{C}_1$, dann ist c in $\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$, also ergibt die Komponentendarstellung vermöge der $\mathfrak{A}$:

$$c = a_1 a_2 \ldots a_n = a_1 e a_3 \ldots a_n = a_1 a_2 e \ldots a_n = \ldots = a_1 \ldots a_{n-1} e.$$

Da das Produkt aller $\mathfrak{A}_i$ direkt ist, stimmen die Darstellungen überein; an jeder Stelle außer der ersten steht einmal e, somit $c = a_1$ oder $\mathfrak{C}_1 \leq \mathfrak{A}_1$, d. h. $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_1$ und entsprechend $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{A}_i$. Es folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{A}_i = \mathfrak{E}$; $\mathfrak{B}_i \mathfrak{C}_i = \mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_i = \mathfrak{G}$, also direkter Durchschnitt.

Beweis von II. Sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_i \mathfrak{T}_i$, dann $\mathfrak{T}_i \leq \mathfrak{S}_i$; wir zeigen $\mathfrak{S}_i \leq \mathfrak{T}_i$. Sei etwa s in $\mathfrak{S}_1$; es wird — vermöge $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_i \times \mathfrak{R}_i$ — $s = s_1 e = s_2 r_2 = \ldots = s_n r_n$. Bilden wir $t_1 = e r_2 \ldots r_n = t_i r_i$, dann kommt unter Berücksichtigung der elementweisen Vertauschbarkeit von $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{S}_i$: $s t_1^{-1} = s_i t_i^{-1}$, also Element aller $\mathfrak{S}_i$ und damit gleich e.

Also $\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}_1$ und entsprechend $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{S}_i$. Es folgt $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_i \mathfrak{T}_i = \mathfrak{R}_i \mathfrak{S}_i = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{T}_i = \mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{S}_i \quad \mathfrak{E}$; somit $\mathfrak{G}$ direktes Produkt der $\mathfrak{R}_i$.

§ 5.

Vollständig reduzible Gruppen.

Eine Gruppe heißt *vollständig reduzibel,* wenn sie direktes Produkt von endlichvielen einfachen Gruppen ist:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n .$$

In diesem Fall bilden die Gruppen

$$\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{E}$$

eine Kompositionsreihe. Die Länge ist n, die Kompositionsfaktoren sind $\simeq \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{A}_1$.

Ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel, so ist jeder Normalteiler direkter Faktor, und der andere Faktor kann als Produkt von solchen einfachen Gruppen gewählt werden, die in einer vorgelegten Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$ auftreten. Der Normalteiler $\mathfrak{H}$ ist ebenfalls vollständig reduzibel.

Beweis. Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n . \tag{3}$$

Setzt man nun $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_i$, so ist $\mathfrak{H}_{i+1} = \mathfrak{H}_i\,\mathfrak{A}_{i+1}$. Entweder ist nun $\mathfrak{A}_{i+1} \subseteq \mathfrak{H}_i$, also $\mathfrak{H}_{i+1} = \mathfrak{H}_i$; dann lassen wir in (3) den Faktor $\mathfrak{A}_{i+1}$ weg. Oder es ist $\mathfrak{H}_i \cap \mathfrak{A}_{i+1}$ ein echter Normalteiler von $\mathfrak{A}_{i+1}$, also $= \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{H}_i \times \mathfrak{A}_{i+1}$ direkt. Nach Weglassung der überflüssigen Faktoren wird (3):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{A}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{i_r} ,$$

also $\mathfrak{H}$ direkter Faktor. Weiter folgt

$$\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{i_r} \simeq \mathfrak{A}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{j_\mu} ,$$

wo $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_\mu}$ die übrigen $\mathfrak{A}_i$ sind; also ist $\mathfrak{H}$ vollständig reduzibel.

Folgerung. *Jede Zerlegung einer vollständig reduziblen Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren ist eine Zerlegung in einfache Faktoren, und gibt demnach zu einer Kompositionsreihe Anlaß, woraus die eindeutige Bestimmtheit der Faktoren, bis auf Isomorphie, folgt.*

§ 6.

Moduln in bezug auf einen Körper. Hyperkomplexe Systeme.

Ein fast triviales Beispiel für vollständig reduzible Gruppen mit Operatoren bilden die Moduln mit endlicher Basis in bezug auf einen (nicht notwendig kommutativen) Körper.

Es sei $\mathfrak{G}$ ein K-Rechtsmodul, und das Einheitselement e von K sei zugleich Einheitsoperator: $ae = a$ für a in $\mathfrak{G}$. Jeder aus einem a abgeleitete Untermodul $a\mathsf{K}$ ist einfach, nämlich gleich dem aus irgendeinem seiner Elemente $\neq 0$ abgeleiteten Modul. Ist also $\mathfrak{H}$ der aus irgendwelchen Elementen abgeleitete Untermodul, und a ein Element, das nicht zu $\mathfrak{H}$ gehört, so ist $\mathfrak{H} \cap a\mathsf{K} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{H} + a\mathsf{K}$ direkt. So kann man von irgendeinem Basiselement a_1 ausgehend, immer neue Basiselemente $a_2, a_3, \ldots$ hinzunehmen und erhält $\mathfrak{G}$ als direkte Summe: $\mathfrak{G} = a_1\mathsf{K} + a_2\mathsf{K} + \ldots + a_n\mathsf{K}$. *Also ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel.*

Die Zahl n, die Länge der Kompositionsreihe, heißt der *Rang* von $\mathfrak{G}$ in bezug auf K. Die Basis $a_1, \ldots, a_n$ ist wegen der eindeutigen Darstellung der Elemente von $\mathfrak{G}$ (und weil e als Einheitsoperator vorausgesetzt wurde) linear-unabhängig.

Jeder Untermodul $\mathfrak{H}$ ist direkter Summand.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{R} = (h_1\mathsf{K} + \ldots + h_s\mathsf{K}) + (r_1\mathsf{K} + \ldots + r_{n-s}\mathsf{K}),$$

oder: *Man kann jede linear-unabhängige Basis von $\mathfrak{H}$ zu einer linear-unabhängigen Basis für $\mathfrak{G}$ ergänzen.* Die r_i kann man sogar aus den ursprünglichen Basiselementen a_i wählen.

Seien $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ linear-unabhängige Basen. Dann ist

$$c_k = \sum a_i \pi_{ik}$$

oder in Matrizen geschrieben:

$$(c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_n)\,P; \qquad P = \begin{pmatrix} \pi_{11} \cdots \pi_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \pi_{n1} \cdots \pi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt ist

$$(a_1, \ldots, a_n) = (c_1, \ldots, c_n)\,Q.$$

Daraus folgt

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)\,PQ,$$

$$(c_1, \ldots, c_n) = (c_1, \ldots, c_n)\,QP,$$

also, da die a_i und die c_i linear-unabhängig sind,

$$PQ = QP = E.$$

Spezielle K-Moduln, die zugleich Ringe sind, sind die „Hyperkomplexen Systeme".

Ein Ring $\mathfrak{o}$, der zugleich Rechtsmodul in bezug auf einen kommutativen Körper K ist, heißt *hyperkomplexes System in bezug auf* K (in der Literatur auch als „Algebra über K" bezeichnet), wenn:

1. der Rang endlich ist (eine linear-unabhängige Basis sei $u_1, \ldots, u_n$).

2. $ab \cdot x = a \cdot bx = ax \cdot b$. Man drückt das so aus: K ist kommutativ mit $\mathfrak{o}$ verbunden.

3. das Einheitselement ε von K zugleich Einheitsoperator ist: $a\varepsilon = a$ für a in $\mathfrak{o}$.[12])

Wegen $(\sum u_i \alpha_i)(\sum u_k \beta_k) = \sum_{i,k}(u_i u_k)(\alpha_i \beta_k)$ ist das System eindeutig bestimmt, wenn (außer K) die *Multiplikationstafel* gegeben ist, die angibt, wie jedes Produkt $u_i u_k$ sich durch die u_j ausdrückt: $u_i u_k = \sum_j u_j \gamma_{ik}^j$. (Die γ_{ik}^j müssen den bekannten Relationen genügen, die aus dem Assoziativgesetz folgen.)

Wenn $\mathfrak{o}$, was wir oft annehmen werden, ein Einheitselement e ($ea = ae = a$ für alle a) besitzt, so kann man die Elemente $\varkappa$ von K mit $e\varkappa$ identifizieren, also K als Unterkörper von $\mathfrak{o}$ annehmen. Das hyperkomplexe System läßt sich dann auch beschreiben als *Ring von endlichem Rang in bezug auf einen im Zentrum gelegenen Körper.*

Ein Beispiel eines hyperkomplexen Systems ist der *Gruppenring* einer endlichen Gruppe, der entsteht, wenn man für die Basiselemente u_i die Elemente einer endlichen Gruppe nimmt, und als Multiplikation die Gruppenmultiplikation. Der Körper K ist dabei beliebig.

§ 7.

Matrizes.

Die quadratischen Matrizes (π_{ik}) mit π_{ik} aus einem Ring $\mathfrak{o}$ bilden bei der gewöhnlichen Matrixmultiplikation $\sum \pi_{ij}\varrho_{jk} = \sigma_{ik}$ und Addition $\pi_{ik} + \varrho_{ik} = \sigma_{ik}$ einen Ring.

Eine Matrix mit Elementen aus einem Körper K, zu der es eine Rechts- und eine Linksinverse gibt, heißt *regulär.*

Wir sahen in § 6: *Die überführende Matrix zweier linear-unabhängigen Basen eines K-Moduls ist regulär.*

Für Regularität genügt Rechtsinverses; denn bilden wir einen K-Rechtsmodul mit linear-unabhängiger Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ (Modul aus Linearform der Unbestimmten $a_1, \ldots. a_n$), und setzen wir

$$(c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_n) P,$$

so wird

$$(c_1, \ldots, c_n) P^{-1} = (a_1, \ldots, a_n) P P^{-1} = (a_1, \ldots, a_n);$$

also ist $(c_1, \ldots, c_n)$ wieder Basis, also wieder linear-unabhängig, also die Matrix P regulär. Außerdem ist die Rechtsinverse gleich der Linksinversen.

Ebenso genügt eine Linksinverse.

---

[12]) Die Bedingung 2. sagt aus, daß die Multiplikation mit einem Element aus K einen Homomorphismus für $\mathfrak{o}$ bedeutet, wenn $\mathfrak{o}$ sowohl als $\mathfrak{o}$-Links-, wie $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul aufgefaßt wird. Vermöge 3. sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.

Besitzt P eine Linksinverse, so ist P kein linker Nullteiler.

Beweis. Aus $PA = 0$ folgt $A = P^{-1}PA = 0$.

Also besitzt P auch *nur* eine Rechtsinverse, welche nach § 6 mit der Linksinversen zusammenfällt.

Versteht man, wie üblich, unter $P_\varkappa$ die Matrix $(\pi_{ik}\varkappa)$, und unter C_{ik} die Matrix, die an der Stelle ik das Einheitselement und sonst überall Nullen hat, so ist

$$(\pi_{ik}) = \sum C_{ik}\pi_{ik};$$

also bilden die Matrizes in K einen K-Modul vom Rang n^2. Die C_{ik} genügen den Relationen.

$$C_{ij}C_{jk} = C_{ik},$$
$$C_{ij}C_{\bar{j}k} = 0, \quad j \neq \bar{j}.$$

Die Matrizes in K bilden somit einen endlichen K-Modul, und, wenn K kommutativ ist, ein hyperkomplexes System.

II. Kapitel.

Nichtkommutative Idealtheorie.

§ 8.

Homomorphiesatz für Ringe.

Ist $\mathfrak{a}$ zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{o}$, so ist der Restklassenbereich $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ nicht nur $\mathfrak{o}$-Modul, sondern auch Ring, wie man mühelos sieht. Jedes homomorphe Abbild von $\mathfrak{o}$ ist wieder ein Ring, und isomorph einem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal ist. Beweis wie bei Gruppen.

Ist insbesondere $\mathfrak{o}$ ein Körper, so gibt es keine anderen Ideale als (0) und $\mathfrak{o}$; also ist hier der Homomorphismus entweder ein Isomorphismus, oder er ordnet jedem Element die Null zu.

Ist insbesondere der Ring $\mathfrak{o}$ ein K-Rechtsmodul, wo K ein elementweis mit $\mathfrak{o}$ vertauschbarer Ring sein soll: — $ab\cdot\varkappa = a\cdot b\varkappa = a\varkappa\cdot b$ — (z. B. wenn es sich um ein hyperkomplexes System in bezug auf einen kommutativen Körper K handelt), so werden als zulässige (rechts-, links- oder zweiseitige) Ideale nur solche betrachtet, die zugleich K-Moduln sind, und man verlangt außer Ringhomomorphismus auch noch Operatorhomomorphismus in bezug auf Multiplikation mit K. Die zulässigen Ideale werden Doppelmoduln in bezug auf $\mathfrak{o}$ und K. (Bei hyperkomplexen Systemen versteht man unter „Idealen“ schlechthin immer nur solche, die zulässig in bezug auf den zugrunde gelegten Koeffizientenkörper K sind.) Auch bei dieser Erweiterung gilt der obige Homomorphiesatz.

Ein Beispiel von Ringhomomorphie bildet der Übergang von einem Multiplikatorenbereich $\mathfrak{o}$ zum absoluten Multiplikatorenbereich (§ 1, Beispiel 4). Also ist der absolute Multiplikatorenbereich isomorph dem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{d}$, wo $\mathfrak{d}$ das zweiseitige Ideal der Elemente von $\mathfrak{o}$ ist, die $\mathfrak{M}$ annullieren.

Aus der Gültigkeit des Homomorphiesatzes folgen wie in § 2 der erste und zweite Isomorphiesatz für Ring- und Operatorisomorphie

Alle Produkte $\mathfrak{AB}$ von Untermengen von $\mathfrak{o}$ sind als Modulprodukte zu verstehen: $\mathfrak{AB}$ ist die Gesamtheit aller Summen $\sum ab$, wo a in $\mathfrak{A}$, b in $\mathfrak{B}$, und $a\mathfrak{B}$ ist die Gesamtheit aller Summen $\sum ab$, b in $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{B}$ Rechtsmodul in bezug auf irgendeinen Ring als Operatorenbereich, so ist auch das Produkt $\mathfrak{AB}$ bzw. $a\mathfrak{B}$ Rechtsmodul. (Insbesondere: Rechtsideal, zulässiges Ideal in bezug auf einen Koeffizientenbereich K, usw.) Es gelten, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Summe der Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ bezeichnet, die Rechnungsregeln

$$\mathfrak{AB} \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{BC},$$
$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{AB}, \mathfrak{AC}),$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\mathfrak{C} = (\mathfrak{AC}, \mathfrak{BC}).$$

Die *direkte* Summe wird mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ bezeichnet (§ 4).

Wir betrachten im folgenden oft Ringe, die eine Maximal- oder Minimalbedingung (§ 3) für Rechtsideale erfüllen. Zu diesen gehören insbesondere die hyperkomplexen Systeme, da infolge der obigen Verabredung nur K-Moduln als Ideale zugelassen werden, deren Rang also beschränkt bleibt (§ 6).

§ 9.

Idempotente Elemente. Direkte Summenzerlegung in Rechtsideale.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Einheitselement.

Ist $\mathfrak{r}$ Rechtsideal, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{r}$, und wegen des Einheitselementes sogar $\mathfrak{r}\mathfrak{o} = \mathfrak{r}$. Entsprechend für Linksideale: $\mathfrak{o}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$.

Ein Element c heißt idempotent, wenn $c^2 = c$.

Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n$ *eine Zerlegung in Rechtsideale,* und dabei

$$e = e_1 + \ldots + e_n \quad (e_i \text{ in } \mathfrak{r}_i),$$

so ist

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \quad (i \neq k) \quad (\text{„}\textit{Orthogonalitätsrelationen}\text{“})$$
$$\mathfrak{r}_i = e_i \mathfrak{o}.$$

Beweis. Sei r ein Element von $\mathfrak{r}_1$. Es wird

$$r = er = e_1 r + \ldots + e_n r, \quad e_i r \text{ in } \mathfrak{r}_i,$$

aber auch

$$r = r + 0 + \ldots + 0,$$

also

$$e_1 r = r, \quad e_i r = 0 \qquad (i \neq 1).$$

Aus der ersten Formel folgt $\mathfrak{r}_1 \leqq e_1 \mathfrak{o}$; andererseits ist $e_1 \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{r}_1$, also $e_1 \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1$. Spezialisiert man $r = e_1$, so folgt:

$$e_1^2 = e_1, \quad e_i e_1 = 0 \qquad (i \neq 1).$$

Dasselbe gilt, wenn man den Index 1 durch k ersetzt.

Ist umgekehrt $e = \sum e_i$, $e_i e_k = 0$ $(i \neq k)$, $e_i^2 = e_i$, *und setzt man* $\mathfrak{r}_i = e_i \mathfrak{o}$, *so wird* $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n$.

Beweis. Jedes Element r von $\mathfrak{o}$ ist

$$r = er = e_1 r + \ldots + e_n r,$$

also

$$\mathfrak{o} = (e_1 \mathfrak{o}, \ldots, e_n \mathfrak{o}).$$

Aber die Darstellung ist eindeutig; denn aus

$$0 = e_1 a_1 + \ldots + e_n a_n$$

folgt durch Multiplikation mit e_i:

$$e_i^2 a_i = e_i a_i = 0.$$ [13])

Aus einer Rechtsdarstellung

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n = e_1 \mathfrak{o} + \ldots + e_n \mathfrak{o}$$

folgt demnach eine Linksdarstellung

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_n = \mathfrak{o} e_1 + \ldots + \mathfrak{o} e_n.$$

Sind die $\mathfrak{r}_i$ direkt-unzerlegbar, so sind es auch die $\mathfrak{l}_i$; denn eine Zerlegung etwa von $\mathfrak{l}_1$ würde heißen

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{o} e_1 = \mathfrak{o} e_1' + \mathfrak{o} e_1'', \qquad \mathfrak{o} = \mathfrak{o} e_1' + \mathfrak{o} e_1'' + \mathfrak{o} e_2 + \ldots + \mathfrak{o} e_n,$$

Daraus ergibt sich die Rechtszerlegung

$$\mathfrak{o} = e_1' \mathfrak{o} + e_1'' \mathfrak{o} + e_2 \mathfrak{o} + \ldots + e_n \mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_1'' + \mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n,$$

$$\mathfrak{r}_1 \cong \mathfrak{o}/(\mathfrak{r}_2 + \ldots + \mathfrak{r}_n) = \mathfrak{r}_1' + \mathfrak{r}_2';$$

also wäre $\mathfrak{r}_1$ zerlegbar.

---

[13]) Es gilt noch eine andere Umkehrung: Ist $e_i e_k = 0$, $e_i^2 = e_i$, $c = \sum e_i$, so ist c Linkseinheit für den Ring $e_1 \mathfrak{o} + \ldots + e_n \mathfrak{o}$. Daß die Summe direkt ist, sieht man ganz entsprechend wie oben.

§ 10.

Zerlegung in zweiseitige Ideale.

Ist $\mathfrak{o}$ *wieder ein Ring mit Einheitselement,*

1) $$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n$$

ine Zerlegung von $\mathfrak{o}$ *in zweiseitige Ideale, so gelten die Orthogonalitäts-elationen auch für die Ideale:*

2) $$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = 0 \qquad (i \neq k),$$
$$\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1$; dann wird $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1 = 0$, lso $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 = 0$, um so mehr also

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_i = 0 \qquad (i \neq 1);$$
$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}_1^2, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{a}_1^2.$$

Umgekehrt: *Aus* (1) *und* (2) *folgt, daß die Moduln* $\mathfrak{a}_i$ *zweiseitige deale sind.*

Beweis. $\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}_i = (\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n)\,\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i$, ebenso $\mathfrak{a}_i \mathfrak{o} = \mathfrak{a}_i$.

Rechtsideale im Ringe $\mathfrak{a}_i$ *sind Rechtsideale in* $\mathfrak{o}$.

Beweis. $\mathfrak{r}\,\mathfrak{o} = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_i, \mathfrak{r}\,\mathfrak{b}_i) \leqq (\mathfrak{r}, \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i) = (\mathfrak{r}, 0) = \mathfrak{r}$.

Ist $\mathfrak{r}$ *ein Rechtsideal in* $\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{r}$ *direkte Summe von Rechtsidealen* $\mathfrak{a}_i \leqq \mathfrak{a}_i$.

Beweis. $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_n)$, $\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_i \mathfrak{o} = \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_i$, also $\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_i$ Rechtsideale $\leqq \mathfrak{r}$. $\mathfrak{a}_i \leqq \mathfrak{a}_i$, also ist die Summe $(\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_n)$ direkt:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_n.$$

Ist insbesondere $\mathfrak{r}$ *direkt-unzerlegbar, so kann* $\mathfrak{r}$ *nur eine Komponente aben, also muß* $\mathfrak{r} \leqq$ *einem* $\mathfrak{a}_i$ *sein.*

Auf Grund dieser Sätze beherrscht man die Idealtheorie in $\mathfrak{o}$, wenn nan die der einzelnen $\mathfrak{a}_i$ kennt. Wir beschränken uns darum meist auf weiseitig unzerlegbare Ringe.

Zwei Rechtsideale, die in verschiedenen $\mathfrak{a}_i$ *enthalten sind, können iemals operatorisomorph sein.*

Beweis. Ein in $\mathfrak{a}_1$ liegendes Ideal wird von allen anderen $\mathfrak{a}_k$ an-ulliert, nicht aber von $\mathfrak{a}_1$. Dagegen wird ein in $\mathfrak{a}_2$ liegendes Ideal von $_1$ annulliert.

Wenn es also möglich ist, den Ring $\mathfrak{o}$ in zweiseitig unzerlegbare Ideale $_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n$ zu zerlegen, und jedes $\mathfrak{a}_i$ wiederum in einseitig unzerlegbare echtsideale $\mathfrak{r}_i' + \mathfrak{r}_i'' + \ldots$, so hat man die operatorisomorphen $\mathfrak{r}$ unter enen zu suchen, die zum selben $\mathfrak{a}_i$ gehören. Es kommt aber vor, daß es

noch verschiedene Klassen von $\mathfrak{r}$ — d. h. nicht operatorisomorphe — in selben $\mathfrak{a}_i$ gibt, wie das folgende Beispiel zeigt:

K sei der Körper der rationalen Zahlen,

$$\mathfrak{o} = e_1\mathsf{K} + e_2\mathsf{K} + u\mathsf{K}$$

ein hyperkomplexes System, die e_i und u vertauschbar mit den Zahlen aus K, und die Multiplikationstafel

	e_1	e_2	u
e_1	e_1	0	u
e_2	0	e_2	0
u	0	u	0

Einheitselement ist $e = e_1 + e_2$. Die e_i erfüllen die Orthogonalitätsrelationen. Also ist die Rechtszerlegung: $\mathfrak{o} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o} = (e_1, u) + (e_2)$, und die Linkszerlegung: $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2 = (e_1) + (e_2, u)$.

Da $e_2\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}e_1$ offenbar unzerlegbar sind, müssen $\mathfrak{o}e_2$ und $e_1\mathfrak{o}$ es auch sein.

Eine zweiseitige Zerlegung ist unmöglich; denn dann würde eine Komponente $e_1\mathfrak{o}$ und die andere $e_2\mathfrak{o}$ enthalten müssen; die erste enthielte dann u, aber die zweite auch $ue_2 = u$.

Aber $e_1\mathfrak{o}$ und $e_2\mathfrak{o}$ sind nicht operatorisomorph, da sie verschiedenen Rang in bezug auf K haben.

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n$, *und die* $\mathfrak{a}_i$ *zweiseitig unzerlegbar. Dann sind sie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei außerdem $\mathfrak{o} = \mathfrak{c}_1 + \ldots + \mathfrak{c}_n$, also $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i\mathfrak{o} = (\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_n)$. Die letztere Summe ist direkt wegen $\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_k \leqq \mathfrak{c}_k$ und $\leqq \mathfrak{a}_i$; da aber die $\mathfrak{a}$ unterlegbar sind, so müssen alle $\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_k$ Null sein bis auf eins: $\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_{j_i}$. Also ist

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_{j_i}.$$

Ebenso: $\mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{o}\mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_{j_i} + \ldots + \mathfrak{a}_n\mathfrak{c}_{j_i}$ und $\mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_{j_i} \neq 0$, also alle übrigen $= 0$

$$\mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{c}_{j_i} = \mathfrak{a}_i,$$

q. e. d.

§ 11.

Das Zentrum.

Das *Zentrum* $\mathfrak{Z}$ eines Ringes $\mathfrak{o}$ ist die Gesamtheit der z, die mit allen Ringelementen vertauschbar sind ($za = az$ für alle a). $\mathfrak{Z}$ ist ein kommutativer Ring.

Jedes einseitige Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{o}$ hat ein „*Verengungsideal*“ $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{Z}$. Denn da sowohl $\mathfrak{a}$ wie $\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{Z}$-Moduln sind, ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{Z}$ es auch.

Jedes Ideal $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{Z}$ hat ein *Erweiterungsideal*: das von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{o}$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{o}\mathfrak{A})$. Dieses ist zweiseitig wegen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{o} = (\mathfrak{o}\mathfrak{A}, \mathfrak{A})\,\mathfrak{o} = (\mathfrak{o}\mathfrak{A}\mathfrak{o}, \mathfrak{A}\mathfrak{o}) = (\mathfrak{o}^2\mathfrak{A}, \mathfrak{o}\mathfrak{A}) \leqq \mathfrak{o}\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{a}.$$

Wird in $\mathfrak{o}$ ein Einheitselement vorausgesetzt, so kann man schreiben: $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mathfrak{A}$. In diesem Fall gilt der folgende Satz:

Jede zweiseitige Zerlegung von $\mathfrak{o}$ entspricht eineindeutig einer Zerlegung des Zentrums: Aus

(1)
$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n,$$
$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{Z}$$

folgt

(2)
$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n,$$
$$\mathfrak{o}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{a}_i$$

und umgekehrt.

Beweis. Sei z Zentrumselement, und

(3)
$$z = z_1 + \ldots + z_n$$

seine Zerlegung in (1). Dann sind die z_i Zentrumselemente; denn

$$z\,a = z_1 a + \ldots + z_n a = a\,z = a\,z_1 + \ldots + a\,z_n;$$

wegen der direkten Summe also, und da $\mathfrak{a}_i$ zweiseitig,

$$z_i a = a\,z_i.$$

Also z_i in $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_i$; also besagt (3) die behauptete Summenzerlegung. Insbesondere wird $e = \Sigma e_i$; also sind die e_i Zentrumselemente. Schließlich wird

$$z = z\,e_1 + \ldots + z\,e_n,$$

also

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{Z}\,e_i, \qquad \mathfrak{o}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{o}\mathfrak{Z}\,e_i = \mathfrak{o}\,e_i = \mathfrak{a}_i.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ eine Zerlegung des Zentrums, so wird nach § 9:

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{Z}\,e_i; \qquad e_i^2 = e_i; \qquad e_i\,e_k = 0 \qquad (i \neq k).$$

Also kommt wegen der Orthogonalitätsrelationen (§ 9)

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\,e = \mathfrak{o}\,e_1 + \ldots + \mathfrak{o}\,e_n = \mathfrak{o}\mathfrak{Z}\,e_1 + \ldots + \mathfrak{o}\mathfrak{Z}\,e_n = \mathfrak{o}\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{o}\mathfrak{A}_n$$
$$= \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n.$$

Setzt man nun $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_1'$, so weiß man aus dem ersten Teil der Behauptung:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_1' + \ldots + \mathfrak{A}_n' \text{ direkt.}$$

Aber $\mathfrak{A}_i' \geqq \mathfrak{A}_i$; also $\mathfrak{A}_i' = \mathfrak{A}_i$ (§ 4, 2).

Folgerung. $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{A}_i$ sind gleichzeitig zweiseitig direkt zerlegbar oder nicht.

§ 12.

Nilpotente Ideale.

Ein Ideal $\mathfrak{c}$ heißt *nilpotent*, wenn $\mathfrak{c}^{\varrho} = 0$.

Beispiel. Das Ideal (u) in § 10.

Wenn es in $\mathfrak{o}$ ein nilpotentes Rechtsideal $\mathfrak{r}$ gibt, so gibt es auch ein nilpotentes Linksideal (sogar zweiseitiges Ideal).

Beweis. Sei $\mathfrak{r}^{\varrho} = 0$. Dann ist $\mathfrak{o}\mathfrak{r}$; bzw., wenn $\mathfrak{o}$ kein Einheitselement enthält und $\mathfrak{o}\mathfrak{r}$ Null sein könnte, $(\mathfrak{o}\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ ein Linksideal, und

$$(\mathfrak{o}\mathfrak{r})^{\varrho} = \mathfrak{o}\mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{r} \ldots \mathfrak{o}\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{o}\mathfrak{r}\mathfrak{r} \ldots \mathfrak{r} = \mathfrak{o}\mathfrak{r}^{\varrho} = 0.$$

Die Summe zweier nilpotenter Rechtsideale ist wieder ein nilpotentes Rechtsideal.

Beweis. Sei $\mathfrak{c}^{\varrho} = 0$, $\mathfrak{d}^{\sigma} = 0$. In

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})^{\varrho+\sigma-1} = (\ldots, \mathfrak{d}\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{c} \ldots, \ldots)$$

kommen in jedem Glied entweder mindestens ϱ Faktoren $\mathfrak{c}$ oder mindestens σ Faktoren $\mathfrak{d}$ vor. Im ersten Fall haben wir

$$\mathfrak{d}\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{c} \ldots \subseteq \mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{c}\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{c} = \mathfrak{d}\mathfrak{c}^{\varrho} = 0;$$

im letzteren Fall entsprechend für die Faktoren $\mathfrak{d}$. Also ist

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})^{\varrho+\sigma-1} = 0.$$

Ist nun die Maximalbedingung für die Rechtsideale in $\mathfrak{o}$ erfüllt, so gibt es ein maximales nilpotentes Rechtsideal. Dieses umfaßt alle anderen nilpotenten Rechtsideale, da man sonst mit einem solchen die Summe bilden könnte. Es sei $\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{o}\mathfrak{c}$ auch nilpotentes Rechtsideal ist, ist $\mathfrak{o}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{c}$ Linksideal. Jedes nilpotente Linksideal $\mathfrak{d}$ ist auch in $\mathfrak{c}$ enthalten. Denn $(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}\mathfrak{o})$ ist nilpotentes Rechtsideal, also $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{c}$. *Es gibt also ein maximales (zweiseitiges) nilpotentes Ideal $\mathfrak{c}$ oder „Radikal", das alle anderen (rechts- und linksseitige) umfaßt.*

Im Beispiel des § 10 ist (u) das maximale nilpotente Ideal.

Ist das Radikal das Nullideal, so spricht man von einem „Ring ohne Radikal" („Halbeinfacher Ring", „Dedekindsches System"). Der Restklassenring nach dem Radikal ist immer ein Ring ohne Radikal.

Ist $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{c}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{Z}$ das Radikal von $\mathfrak{Z}$.

Beweis. Klar ist, daß $\mathfrak{C}$ nilpotent ist. Gäbe es noch ein umfassenderes nilpotentes Ideal $\overline{\mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{Z}$, so würde dieses zu einem nicht ganz in $\mathfrak{c}$ enthaltenen nilpotenten Ideal $\bar{\mathfrak{c}}$ erweitert werden können ($(\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{o})^{\varrho} = \overline{\mathfrak{C}}^{\varrho}\mathfrak{o}^{\varrho} = 0$).

Folge. *Ist* $\mathfrak{o}$ *Ring ohne Radikal, so auch* $\mathfrak{Z}$. Die Umkehrung gilt aber nicht, wie unser Beispiel in § 10 zeigt. Das Zentrum von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ umfaßt einen zu $\mathfrak{Z}/\mathfrak{C}$ isomorphen Ring; dieser kann aber echter Unterring sein (Beispiel in § 10).

§ 13.

Vollständig reduzible Ringe.

Nach § 5 heißt ein Ring rechts vollständig reduzibel, wenn er direkte Summe von endlich vielen einfachen Rechtsidealen ist.

Ein rechts vollständig reduzibler Ring mit Einheitselement besitzt kein nilpotentes Ideal $\neq (0)$, *also kein Radikal.*

Beweis. Jedes Rechtsideal $\mathfrak{r}$ ist direkter Summand (§ 5):

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{t} + \mathfrak{r} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o}.$$

Wegen $e_2^2 = e_2$ ist auch $e_2^\varrho = e_2$. Wäre $\mathfrak{r}$ nilpotent, so wäre $e_2^\varrho = 0$, also $e_2 = 0$, also $\mathfrak{r} = 0$, q. e. d.

Wir zeigen nun die beiden Umkehrungen. Erstens: *Ein Ring ohne Radikal mit Minimalbedingung für Rechtsideale ist vollständig reduzibel in bezug auf Rechtsideale.*

Beweis. Sei $\mathfrak{t}$ ein minimales Rechtsideal $\neq 0$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{t}$ *ein idempotentes Element enthält.*

Da $\mathfrak{t}^2 \leqq \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^2 \neq 0$, folgt $\mathfrak{t}^2 = \mathfrak{t}$; denn $\mathfrak{t}^2$ ist Rechtsideal. Also gibt es ein a in $\mathfrak{t}$, so daß $a\mathfrak{t} \neq 0$. Dann muß aber $a\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ sein; denn $a\mathfrak{t}$ ist Rechtsideal.

Die Gesamtheit aller b in $\mathfrak{t}$, die von a annulliert werden ($ab = 0$), ist ein Rechtsideal, und nicht $= \mathfrak{t}$, also $= 0$. Also: aus $ab = 0$ folgt $b = 0$.

Wegen $\mathfrak{t} = a\mathfrak{t}$ muß a sich in der Gestalt ac darstellen lassen: $a = ac$, $c \neq 0$. Es folgt

$$ac = ac^2, \quad a(c - c^2) = 0, \quad c - c^2 = 0, \quad c^2 = c.$$

Nun zeigen wir weiter, daß $\mathfrak{t}$ *direkter Summand ist.*

$c\mathfrak{o}$ ist ein Rechtsideal $\leqq \mathfrak{t}$, $\neq 0$, da $c^2 = c$ in $c\mathfrak{o}$; also $= \mathfrak{t}$.

Jedes Element r aus $\mathfrak{o}$ läßt eine Darstellung zu:

$$r = cr + (r - cr) \quad \text{(Einseitige Peircesche Zerlegung).}$$

Die Elemente cr bilden das Ideal $\mathfrak{t}$; die Elemente $r - cr$ bilden ein anderes Rechtsideal $\mathfrak{r}$, das von c annulliert wird: $c\mathfrak{r} = 0$. Also

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{t}, \mathfrak{r}).$$

Da die Elemente von $\mathfrak{t}$ von c nicht annulliert werden, ist die Summe direkt:

(1) $$\mathfrak{o} = \mathfrak{t} + \mathfrak{r}.$$

Stellt man nun $\mathfrak{o}$ auf Grund der Minimalbedingung als direkte Summe von direkt-unzerlegbaren Idealen dar:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n,$$

so müssen die $\mathfrak{r}_i$ einfach (= minimal) sein, denn wäre etwa $\mathfrak{r}_1$ nicht einfach und $\mathfrak{t}$ ein minimales Ideal in $\mathfrak{r}_1$, so hätte man aus (1):

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{t} + \mathfrak{r} \cap \mathfrak{r}_1 \quad (\S\,4,\,3);$$

also wäre $\mathfrak{r}_1$ zerlegbar, was nicht geht.

Also ist $\mathfrak{o}$ *vollständig reduzibel.*

Zweitens: *Ein Ring ohne Radikal mit Minimalbedingung besitzt ein Einheitselement.*

Um zunächst die Existenz einer Linkseinheit zu zeigen, genügt es, folgendes zu zeigen: *Besitzt ein Rechtsideal* $\mathfrak{a} = c_1\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}$ *eine Linkseinheit* c_1, *so gibt es ein Rechtsideal* $c\,\mathfrak{o}$ *größerer Länge, welches ebenfalls eine Linkseinheit* c *besitzt.* Da wir nämlich die volle Reduzibilität, also die Beschränktheit aller Längen, schon gezeigt haben, kommt man damit in endlichvielen Schritten zu einer Linkseinheit für $\mathfrak{o}$ selbst.

Sei also $\mathfrak{a} = c_1\mathfrak{o}$ und $c_1^2 = c_1$. Durch die Formel

$$r = c_1 r + (r - c_1 r)$$

ist wie oben eine Peircesche Zerlegung $\mathfrak{o} = c_1\mathfrak{o} + \mathfrak{r}$ gegeben. Sei wie oben c_2 ein idempotentes Element aus $\mathfrak{r}$, also $c_2^2 = c_2$, $c_1 c_2 = 0$ (da c_1 alle Elemente von $\mathfrak{r}$ annulliert). Setzt man nun $e_1 = c_1$, $e_2 = c_2 - c_2 c_1$, so wird $e_1^2 = e_1$, $e_1 e_2 = 0$, $e_2 c_1 = 0$, $e_2 c_2 = c_2$, also $e_2 \neq 0$, und schließlich $e_2^2 = e_2$. Nach der in Anmerkung [13]) gemachten Bemerkung wird demnach $c = e_1 + e_2$ Linkseinheit für den Ring $c\,\mathfrak{o} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o}$, der wegen $e_2^2 = e_2 \neq 0$ als Rechtsideal eine größere Länge als $\mathfrak{a}$ hat.

Um zu zeigen, daß die konstruierte Linkseinheit e auch Rechtseinheit ist, machen wir die Peircesche Zerlegung in Linksideale:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}e + \mathfrak{l}.$$

Wir haben $\mathfrak{l}e = 0$, $\mathfrak{l} = e\mathfrak{l}$, also $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}e\mathfrak{l} = 0$, also, da nach Voraussetzung kein nilpotentes Linksideal existieren kann, $\mathfrak{l} = 0$, also ist e auch Rechtseinheit und damit Einheit überhaupt.

Satz. *Aus der rechtsseitigen vollständigen Reduzibilität und Existenz der Einheit folgt die zweiseitige:* $\mathfrak{o} = \mathfrak{b}_1 + \ldots + \mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{b}_i$ *zweiseitig einfach.*

Wie im vorigen Beweis genügt es, zu zeigen, daß jedes minimale (zweiseitige) Ideal $\mathfrak{a}$ direkter Summand ist. $\mathfrak{a}$ ist als Rechtsideal direkter Summand:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r} = e_1\mathfrak{o} + e_2\mathfrak{o}.$$

Die entsprechende Linkszerlegung lautet:

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{c} + \mathfrak{l} = \mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2.$$

Es folgt:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{r}\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r} \cap \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{l}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}e_2e_1\mathfrak{o} = 0,$$

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{l})^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{l}\,\mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0, \quad \text{also } \mathfrak{a}\mathfrak{l} = 0;$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}\mathfrak{c}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}) = \mathfrak{r}\mathfrak{l}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{o}\mathfrak{l} = (\mathfrak{a}\mathfrak{l}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}) = \mathfrak{r}\mathfrak{l};$$

also ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{l}$, also $\mathfrak{r}$ zweiseitig; also ist $\mathfrak{a}$ zweiseitig direkter Summand. Von da an wie der Beweis der einseitigen vollständigen Reduzibilität.

Die $\mathfrak{d}_i$ sind auch als Ring zweiseitig einfach, da alle Ideale in $\mathfrak{d}_i$ Ideale in $\mathfrak{o}$ sind. Wir untersuchen ihre Struktur.

§ 14.

Zweiseitig einfache vollständig reduzible Ringe mit Einheitselement.

Sei $\mathfrak{o}$ ein solcher Ring,

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n = e_1\mathfrak{o} + \ldots + e_n\mathfrak{o}, \quad \mathfrak{r}_i \text{ einfach},$$

dann folgt

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_n = \mathfrak{o}e_1 + \ldots + \mathfrak{o}e_n, \quad \mathfrak{l}_i \text{ direkt unzerlegbar (§ 9)}.$$

$\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i$ ist zweiseitiges Ideal $\neq 0$ (da e_i^2 in $\mathfrak{l}_i\mathfrak{r}_i$), also $= \mathfrak{o}$.

Setzt man $\mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_k$, so wird

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n) \cdot (\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_n) = (\ldots, \mathfrak{A}_{ij}, \ldots)$$

direkt; denn aus $0 = \sum_{i,j} a_{ij}$ folgt, da a_{ij} in $\mathfrak{r}_i$ und $\sum \mathfrak{r}_i$ direkt ist,

$$0 = \sum_j a_{ij},$$

also weiter wegen a_{ij} in $\mathfrak{l}_j$

$$0 = a_{ij}.$$

Weiter: $\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i\mathfrak{l}_j\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_i$, also $\mathfrak{A}_{ij} \neq 0$. Sei $a_{ij} \neq 0$ aus $\mathfrak{A}_{ij}$. Dann ist

$$a_{ij}\mathfrak{r}_j \leqq \mathfrak{r}_i, \quad a_{ij}\mathfrak{r}_j \neq 0 \text{ wegen } a_{ij}e_j = a_{ij},$$

also

$$a_{ij}\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i.$$

Setzt man für jedes r_j aus $\mathfrak{r}_j$

$$a_{ij}r_j = r_i,$$

so ist die Abbildung $r_j \to r_i$ ein Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{r}_j$ zu $\mathfrak{r}_i$. Die Elemente, denen die Null zugeordnet wird, bilden ein Ideal $< \mathfrak{r}_j$, also das Nullideal; also *Isomorphismus*. Mithin:

Je zwei in einer Darstellung von $\mathfrak{o}$ *auftretende einfache Rechtsideale* $\mathfrak{r}_i$ *und* $\mathfrak{r}_j$ *sind operatorisomorph; Isomorphismen werden durch die Elemente von* $\mathfrak{A}_{ij}$ *vermittelt.* Da je zwei verschiedene einfache Rechtsideale $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$

immer in mindestens einer Darstellung von $\mathfrak{o}$ zusammen auftreten, so sind auch je zwei solche Ideale isomorph.

Alle Homomorphismen von $\mathfrak{r}_j$ *in* $\mathfrak{r}_i$ *werden durch Elemente von* $\mathfrak{A}_{ij}$ *vermittelt.*

Beweis. Wenn $e_j \to a_{ij}$, so folgt $e_j^2 \to a_{ij} e_j$, also liegt $a_{ij} = a_{ij} e_j$ in $\mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_j = \mathfrak{A}_{ij}$; weiter wird

$$\mathfrak{r}_j = e_j \mathfrak{r}_j \to a_{ij} \mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}_i .$$

Insbesondere werden die Homomorphismen in sich von $\mathfrak{r}_i$ *durch* $\mathfrak{A}_{ii}$ *vermittelt.*

Dem Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{A}_{ii}$ entspricht das Produkt der Homomorphismen, der Summe die Summe. (Def. siehe § 1, 6.) Verschiedene a_{ii} geben verschiedene Automorphismen, denn e_i geht über in $a_{ii} e_i = a_{ii}$. Also ist der Ring $\mathfrak{A}_{ii}$ isomorph dem Automorphismenring von $\mathfrak{r}_i$.

Der Automorphismenring eines einfachen Ideals ist aber ein Körper (§ 2), *also ist* $\mathfrak{A}_{ii}$ *ein Körper.* Da weiter alle $\mathfrak{r}_i$ operatorisomorph sind, so sind auch ihre Automorphismenringe ringisomorph: $\mathfrak{A}_{ii}$ *ist bis auf Ringisomorphismus durch* $\mathfrak{o}$ *eindeutig bestimmt.* Die verschiedenen möglichen $\mathfrak{A}_{ii}$ sind nur verschiedene konkrete Realisationen des abstrakt definierten Automorphismenringes der einfachen Rechtsideale.

Hauptsatz. *Jeder vollständig reduzible zweiseitig einfache Ring* $\mathfrak{o}$ *mit Einheitselement ist isomorph dem Ring der Matrizes n-ten Grades in einem Körper* K. (Der Körper K ist isomorph dem Automorphismenkörper der Rechtsideale von $\mathfrak{o}$.)

Beweis[13a]). *Konstruktion der Matrizeneinheiten* c_{ik}:

Sei Γ_{11} der identische Automorphismus von $\mathfrak{r}_1$, Γ_{i1} ein beliebiger Isomorphismus $\Gamma_{i1} \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_i$, schließlich

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{i1} \Gamma_{k1}^{-1} .$$

Dann folgt allgemein

$$\Gamma_{ik} \Gamma_{kl} = \Gamma_{il} .$$

Wird Γ_{ik} vermittelt durch das Element c_{ik} von $\mathfrak{A}_{ik}$, so folgt weiter:

$$c_{ik} = e_i c_{ik} = c_{ik} e_k ,$$

$$c_{ik} c_{kl} e_l = c_{il} e_l ,$$

also

$$c_{ik} c_{kl} = c_{il} , \qquad c_{ij} c_{kl} = c_{ij} e_j e_k c_{kl} = 0 \qquad (j \neq k) .$$

Die c_{ik} sind also Matrizeneinheiten (§ 7).

[13a]) Neuerdings hat B. L. v. d. Waerden einen einfacheren, direkt mit dem abstrakten Automorphismenkörper operierenden Beweis gefunden, der in seinem Buch über Algebra (Grundlehren d. Math. Wiss., Berlin: Julius Springer) gebracht werden soll. [11. 6. 29.]

Konstruktion von K:

Die Zuordnung $a_{ii} = c_{i1} a_{11} c_{1i}$ ordnet jedem a_{11} aus $\mathfrak{A}_{11}$ ein „konjugiertes Element“ a_{ii} von $\mathfrak{A}_{ii}$ zu.

Die Zuordnung ist ringisomorph, da die Isomorphismen Δ, Γ, die den a und c entsprechen, durch

$$\Delta_{ii} = \Gamma_{i1} \Delta_{11} \Gamma_{i1}^{-1}$$

verknüpft sind; eine Relation, die bekanntlich einen Ringisomorphismus darstellt. Man bilde nun die Elemente

$$\alpha = a_{11} + \ldots + a_{nn} = a_{11} + c_{21} a_{11} c_{12} + \ldots + c_{n1} a_{11} c_{1n}.$$

Jedem a_{11} ist ein α zugeordnet (eineindeutig wegen der direkten Summe). Die Gesamtheit der α ist ein Körper $\mathsf{K} \simeq \mathfrak{A}$; denn aus

$$\alpha = a_{11} + \ldots + a_{nn},$$
$$\beta = b_{11} + \ldots + b_{nn}$$

folgt

$$\alpha + \beta = (a_{11} + b_{11}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}),$$
$$\alpha \cdot \beta = a_{11} b_{11} + \ldots + a_{nn} b_{nn};$$

also ist die Zuordnung $a_{11} \to \alpha$ ein Isomorphismus.

Weiter ist

$$c_{ik} \alpha = c_{ik} a_{kk} = c_{ik} c_{k1} a_{11} c_{1k} = c_{i1} a_{11} c_{1k},$$
$$\alpha c_{ik} = a_{ii} c_{ik} = c_{i1} a_{11} c_{1i} c_{ik} = c_{i1} a_{11} c_{1k},$$

also jedes α mit allen c_{ik} vertauschbar.

Schließlich folgt aus denselben Formeln

$$c_{ik} \mathsf{K} = c_{ik} \mathfrak{A}_{kk} = c_{ik} \mathfrak{r}_k \mathfrak{l}_k = \mathfrak{r}_i \mathfrak{l}_k = \mathfrak{A}_{ik},$$

also

$$\mathfrak{o} = \sum c_{ik} \mathsf{K}.$$

Die Zuordnung. Stellt man jedes Element von $\mathfrak{o}$ in der Gestalt $\sum c_{ik} \alpha_{ik}$ dar, und ordnet man dem Element die Matrix (α_{ik}) zu, so wird die Zuordnung ein Isomorphismus, wie aus der Definition der Matrixmultiplikation sofort folgt. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Umkehrung. *Der Ring der Matrizes n-ten Grades in einem Körper Λ ist zweiseitig einfach und vollreduzibel; Λ ist isomorph dem Automorphismenring der Rechtsideale, und Λe ist das im vorigen Satz konstruierte* K.

Beweis. Die Matrizeneinheiten (§ 7) seien c_{ik}. Es sei $\mathfrak{r}_i = \sum_k c_{ik} \Lambda$. Dann ist offenbar $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n$. Die $\mathfrak{r}_i$ sind einfache Rechtsideale; denn jedes Element $\sum c_{ik} \alpha_k \neq 0$ erzeugt das volle $\mathfrak{r}_i$. Ist nämlich $\alpha_j \neq 0$, so ist $(\sum c_{ik} \alpha_k) \cdot (c_{jl} \alpha_j^{-1}) = c_{il}$, und $\sum c_{il} \beta_l$ durchläuft alle Elemente von $\mathfrak{r}_i$.

Die $\mathfrak{r}_i$ sind operatorisomorph: $\mathfrak{r}_i = c_{ik}\mathfrak{r}_k$.

Daraus folgt: $\mathfrak{o}$ ist zweiseitig unzerlegbar, also nach dem Satz von § 13 auf Grund der schon bewiesenen vollständigen Reduzibilität — und da ein Einheitselement existiert — zweiseitig einfach (wie man auch daran sieht, daß ein $\sum\sum c_{ik}a_{ik} \neq 0$ das ganze zweiseitige Ideal $\mathfrak{o}$ erzeugt).

Weiter ist

$$\mathfrak{r}_i = c_{ii}\mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{l}_i = \mathfrak{o}c_{ii},$$

$$e = \sum c_{ii}, \quad c_{ii} = e_i;$$

$$\mathfrak{A}_{ii} = \mathfrak{r}_i \cap \mathfrak{l}_i = c_{ii}A \simeq A.$$

Setzt man schließlich $a_{11} = c_{11}\lambda$, so folgt

$$\alpha = a_{11} + c_{21}a_{11}c_{12} + \ldots = c_{11}\lambda + c_{22}\lambda + \ldots = e\lambda,$$

womit alles bewiesen ist.

Das Zentrum von $\mathfrak{o}$ ist das Zentrum von K, also ein Körper.

Beweis. $\mathfrak{Z}(\mathsf{K})$ besteht aus allen ζ, die mit allen $\varkappa$ vertauschbar sind. Diese sind aber auch mit allen c_{ik} vertauschbar, also auch mit den Summen $\sum c_{ik}a_{ik}$. Also:

$$\mathfrak{Z}(\mathsf{K}) \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{o}).$$

Umgekehrt: Sei z in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{o})$, $z = \sum\sum c_{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$;

$$zc_{ik} = c_{ik}z, \qquad \sum_{\mu} c_{\mu k}\gamma_{\mu i} = \sum_{\nu} c_{i\nu}\gamma_{k\nu};$$

also

$$\gamma_{\mu i} = 0 \ (\mu \neq i); \qquad c_{ik}\gamma_{ii} = c_{ik}\gamma_{kk}; \qquad \gamma_{ii} = \gamma_{kk} = \gamma;$$

$$z = \sum c_{ii}\gamma = e\gamma = \gamma,$$

also z in K, und vertauschbar mit allen $\varkappa$, also z in $\mathfrak{Z}(\mathsf{K})$.

Da ein Matrizenring natürlich auch linksseitig vollreduzibel ist, und jeder rechtsseitig vollreduzible Ring mit Einheitselement direkte Summe von Matrizenringen, so folgt:

Jeder rechtsseitig vollreduzible Ring mit Einheitselement ist es auch linksseitig, und umgekehrt.

Und: *Das Zentrum eines vollreduziblen Ringes mit Einheitselement ist direkte Summe von kommutativen Körpern, die den zweiseitig einfachen Matrizenringen entsprechen.*

Es gilt noch der folgende Satz[14]):

Je zwei verschiedene Zerlegungen $\mathfrak{o} = \sum c_{ik}\mathsf{K}$, $\mathfrak{o} = \sum c'_{ik}\mathsf{K}'$ gehen durch innere Automorphismen $\alpha' \to x^{-1}\alpha x$, $c_{ik} = x^{-1}c_{ik}x$ ineinander über.

---

[14]) Vgl. E. Artin, a. a. O. S. 258.

Beweis. Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}_1 + \ldots + \mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}'_1 + \ldots \mathfrak{r}'_n$, und seien a, b Elemente, welche zwei zueinander reziproke Isomorphismen der Ideale $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}'_1$ vermitteln: $\mathfrak{r}_1 = a\mathfrak{r}'_1$, $\mathfrak{r}'_1 = b\mathfrak{r}_1$, $ab = c_{11}$, $ba = c'_{11}$. Setzt man $x = \sum c_{i1} a c'_{1i}$, $y = \sum c'_{i1} b c_{1i}$, so wird $xy = e$, $y = x^{-1}$ und $x^{-1} c_{ik} x = c'_{ik}$, $x^{-1} \alpha x = \alpha'$.

III. Kapitel.

Modul- und Darstellungstheorie.

§ 15.

Darstellungen und Darstellungsmoduln [15]).

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring, K ein Ring mit Einheitselement. (Bei späteren Anwendungen ist K immer ein Körper.)

Eine Darstellung n-ten Grades von $\mathfrak{o}$ in K ist eine Homomorphie

$$\mathfrak{o} \sim \mathfrak{D},$$

wo $\mathfrak{D}$ ein Ring aus Matrizes n-ten Grades in K ist.

Unter einem *Darstellungsmodul* von $\mathfrak{o}$ in bezug auf K versteht man einen Doppelmodul $\mathfrak{M}$ (§ 1, 5), der Links-$\mathfrak{o}$-Modul und Rechts-K-Modul ist:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}\mathsf{K} \subseteq \mathfrak{M},$$

der weiter direkte Summe von endlichvielen eingliedrigen K-Moduln ist:

$$\mathfrak{M} = x_1 \mathsf{K} + \ldots + x_n \mathsf{K};$$

und wo das Einheitselement von K Einheitsoperator ist.

Jeder Darstellungsmodul führt zu einer Darstellung. Sei c in $\mathfrak{o}$ und

$$c x_k = \sum x_i \gamma_{ik}$$

oder

$$c(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) C, \qquad C = (\gamma_{ik}).$$

Dann bilden die Matrizes C eine Darstellung für c, denn

$$(b + c) x_k = \sum x_i (\beta_{ik} + \gamma_{ik})$$

$$bc x_k = b \sum x_j \gamma_{jk} = \sum b x_j \gamma_{jk} = \sum\sum x_i \beta_{ij} \gamma_{jk} = \sum x_i (\sum \beta_{ij} \gamma_{jk})$$

oder

$$bc(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) BC.$$

Umgekehrt: *Jede Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{o}$ gehört zu einem Darstellungsmodul, und zwar zu einer bestimmten Basis desselben.*

Man verstehe unter $\mathfrak{M}$ nämlich die Gesamtheit der formalen Linearformen in $x_1, \ldots, x_n$

$$y = \sum x_i \alpha_i.$$

---

[15]) Darstellungsmoduln in bezug auf kommutative Körper finden sich zuerst bei W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsber. Heidelberger Ak. 1926, 1. Abhandl.

Dann ist $\mathfrak{M}$ ein rechts-K-Modul. Man definiere weiter, wenn dem Element c die Matrix $C=(\gamma_{ik})$ zugeordnet ist,

$$(1)\qquad cx_k=\sum x_i\gamma_{ik},$$
$$c(\sum x_k\alpha_k)=\sum\sum x_i\gamma_{ik}\alpha_k.$$

Aus den Homomorphierelationen

$$c+d\to C+D,$$
$$cd\to CD$$

folgt

$$(c+d)x_i=cx_i+dx_i,$$
$$cdx_i=c\cdot dx_i$$

und dasselbe für Summen $\sum x_i\alpha_i$. Die übrigen Doppelmoduleigenschaften

$$c(y+z)=cy+cz,$$
$$c(y\alpha)=(cy)\alpha$$

sind trivial. Also ist $\mathfrak{M}$ Darstellungsmodul, der wegen (1) genau zur Darstellung $\mathfrak{o}\sim\mathfrak{D}$ gehört.

Sei nun $(y_1,\ldots,y_n)$ eine andere Basis für denselben Darstellungsmodul

$$(y_1,\ldots,y_n)=(x_1,\ldots,x_n)\cdot P,$$
$$(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)\cdot P^{-1},$$
$$b(y_1,\ldots,y_n)=b(x_1,\ldots,x_n)P=(x_1,\ldots,x_n)BP=(y_1,\ldots,y_n)P^{-1}BP.$$

Man nennt die Darstellungen $b\sim B$ und $b\sim P^{-1}BP$ *äquivalent*, und rechnet sie zur selben *Darstellungsklasse*. Da jede reguläre Matrix P eine Basis von $\mathfrak{M}$ wieder in eine Basis überführt, ist also bewiesen:

Jeder Darstellungsmodul führt eindeutig zu einer bestimmten Darstellungsklasse[15a]).

[15a]) Zusatz bei der Korrektur (14. April 1929). Wie B. L. v. d. Waerden mir mitteilt, kann man einen von der speziellen Basiswahl unabhängigen, also invarianten Zusammenhang direkt gewinnen durch Trennung der Begriffe: *lineare Transformation* und *Matrix*. Eine lineare Transformation ist ein Homomorphismus zweier Linearformenmoduln; eine Matrix ist der Ausdruck (die Darstellung) dieses Homomorphismus bei einer bestimmten Basiswahl.

I. *Jeder Darstellungsmodul ordnet dem Multiplikatorenbereich* $\mathfrak{o}$ *eindeutig ein homomorphes System linearer Transformationen des Moduls in sich zu.*

Denn nach § 2 Schluß erzeugen die Linksmultiplikatoren eines Doppelmoduls $\mathfrak{M}$ Operatorhomomorphismen von $\mathfrak{M}$ in sich in bezug auf die Rechtsoperatoren (hier Multiplikation mit K); und zwar ist die Zuordnung eine homomorphe.

II. *Jedes zu* $\mathfrak{o}$ *homomorphe System linearer Transformationen eines Linearformenmoduls in sich führt zu einem Darstellungsmodul.*

(Fortsetzung der Fußnote 15a) auf nächster Seite.)

Klar ist:

Zwei operatorisomorphen Darstellungsmoduln entspricht dieselbe Darstellungsklasse.

Aber auch umgekehrt:

Wenn zwei Darstellungsmoduln $(x_1, \ldots, x_n)$ *und* $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *dieselbe Darstellung erzeugen, so gibt die Zuordnung* $x_i \to \bar{x}_i$, $\sum x_i \alpha_i \to \sum \bar{x}_i \alpha_i$ *einen Isomorphismus ab.*

Denn die Multiplikationsvorschrift ist durch die Matrizes C vollständig bestimmt.

Spezialfall: Erzeugen zwei Basen von $\mathfrak{M}$ dieselbe Darstellung, so gehen sie durch einen Operatorisomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf sich auseinander hervor.

Oder: Ist $C = PCP^{-1}$ für alle C und festes P, so ist die Zuordnung $y_i \to x_i$ $(y_i = \sum x_i \pi_{ik})$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ auf sich. Umgekehrt: jeder Isomorphismus $y_i \to x_i$ des Doppelmoduls $\mathfrak{M}$ auf sich wird vermittelt durch eine Matrix P, die mit allen C vertauschbar ist.

Man kann den Darstellungsbegriff auch ausdehnen auf solche Ringe, die noch mit einem kommutativen Multiplikatorenbereich P kommutativ verknüpft sind (§ 8). Man nimmt in diesem Fall nur solche Darstellungsringe K, die P in ihrem Zentrum enthalten, und verlangt von der Darstellung nicht nur, daß sie ein Ringhomomorphismus $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{O}$, sondern sogar, daß sie ein Operatorhomomorphismus sein soll: aus $a \to A$ soll folgen $\varrho a \to A \varrho$ für ϱ aus P.

Für die Darstellungsmoduln bedeutet diese Forderung die hinzukommende Rechnungsregel:

$$am \cdot \varrho \,[= a \cdot m\varrho] = a\varrho \cdot m.$$

Der Modul und der Ring sind dann, wie man sagt, „kommutativ mit P verbunden".

Denn wieder nach § 2 Schluß ergeben diese Homomorphismen als Linksmultiplikatoren einen Doppelmodul; also gilt das gleiche in bezug auf den Multiplikatorenbereich $\mathfrak{o}$, wenn man $cm = \Gamma m$ setzt für jedes m aus $\mathfrak{M}$ und c aus $\mathfrak{o}$, wobei $c \to \Gamma$ die ursprünglich gegebene ringhomomorphe Zuordnung war.

Operatorisomorphen Darstellungsmoduln — in bezug auf Rechts- und Linksmultiplikation — entsprechen dieselben Transformationen, nicht operatorisomorphen verschiedene.

Drückt man bei bestimmter Basiswahl von $\mathfrak{M}$ jede Transformation durch eine Basis aus, so ergibt I. die Darstellung $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{O}$, während II. aussagt, daß jede solche Darstellung zu einem Darstellungsmodul, und zwar zu einer bestimmten Basis desselben führt. Daraus folgt dann wieder die Zuordnung von Darstellungsmodul und Darstellungsklassen, alles ohne jede Rechnung.

§ 16.

Reduzible Darstellungen.

Wenn $\mathfrak{A}$ ein Untermodul des Darstellungsmoduls $\mathfrak{M}$ ist und wenn es möglich ist, eine Basis für $\mathfrak{M}$ zu wählen, bestehend aus einer Basis $z_1, .., z_t$ von $\mathfrak{A}$, ergänzt durch $y_1, \ldots, y_r$, also:

$$\mathfrak{M} = y_1\mathsf{K} + \ldots + y_r\mathsf{K} + z_1\mathsf{K} + \ldots + z_t\mathsf{K}\ ^{16}),$$

so sehen die Darstellungen so aus:

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & T \end{pmatrix},$$

wo die Matrizes T für sich allein eine Darstellung t-ten Grades bilden, die durch $\mathfrak{A}$ erzeugt wird, und die Matrizes R eine Darstellung r-ten Grades, die durch $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$ erzeugt wird.

Beweis. Es ist

$$(cy_1, \ldots, cy_r, cz_1, \ldots, cz_t) = (y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_t)\cdot C.$$

Da die cz_i, als Elemente von $\mathfrak{A}$, sich durch die z_i allein ausdrücken, so steht in C rechts oben Null. Nennt man die übrigen Abteilungen von C in der obigen Anordnung R, S, T, so wird insbesondere

$$(cz_1, \ldots, cz_t) = (z_1, \ldots, z_t)\cdot T;$$

also bilden die T eine Darstellung, vermittelt durch $\mathfrak{A}$. Weiter wird

$$(cy_1, \ldots, cy_r) \equiv (y_1, \ldots, y_r)\cdot R \pmod{\mathfrak{A}},$$

während die y_i eine mod $\mathfrak{A}$ linear-unabhängige Basis bilden. Also bilden die R eine Darstellung, erzeugt durch $\mathfrak{M}/\mathfrak{A}$.

Ist umgekehrt eine „*reduzible*“ Darstellung

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ S & T \end{pmatrix}$$

gegeben, wo R und T quadratische Matrizes sind, so drücken sich im zugehörigen Darstellungsmodul die Produkte eines jedeen c mit den letzten t Basiselementen $z_1, \ldots, z_t$ allein aus, d. h. $\mathfrak{A} = (z_1, \ldots, z_t)$ *ist ein Untermodul.*

Folgerung. Sei

$$\mathfrak{M} > \mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}_2 > \ldots > \mathfrak{A}_e = 0$$

eine Kompositionsreihe für $\mathfrak{M}$, und sei jedes $\mathfrak{A}_i$ im vorangehenden direkter Summand als K-Modul, so daß man eine Basis

$$z_{11}, \ldots, z_{1r_1},\ z_{21}, \ldots, z_{2r_2}, \ldots,\ z_{e1}, \ldots, z_{er_e},$$

---

[16]) Anders ausgedrückt: Wenn $\mathfrak{A}$ als K-Modul direkter Summand ist. Ist K ein Körper, so ist diese Voraussetzung immer erfüllt.

ählen kann, so daß die z_{ik} mit $i > \nu$ eine Basis für $\mathfrak{A}_\nu$ bilden. *Dann ehen die durch $\mathfrak{M}$ vermittelten Darstellungen so aus:*

2)
$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ R_{12} & R_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 & R_2 & \dots & R_{ee} \end{pmatrix}$$

nd die $R_{\nu\nu}$ bilden Darstellungen, vermittelt durch die Kompositions-aktoren $\mathfrak{A}_{\nu-1}/\mathfrak{A}_\nu$.

Die einzelnen Darstellungen $R_{\nu\nu}$ sind irreduzibel, da die Kompositions-aktoren $\mathfrak{A}_{\nu-1}/\mathfrak{A}_\nu$ einfach sind.

Setzt man voraus, daß K ein Körper ist, daß also jeder Untermodul irekter Summand ist, so führt auch umgekehrt jede in der Gestalt (2) öglichst weit reduzierte Darstellung zu einer Kompositionsreihe. Nach em Satz von Jordan-Hölder sind die Kompositionsfaktoren bis auf Ope-atorisomorphie eindeutig, also: *Die $R_{\nu\nu}$ sind bis auf äquivalente Dar-tellung und bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ direkte Summe zweier Darstellungsmoduln $\mathfrak{A} = (y_1, \dots, y_r)$, $= (z_1, \dots, z_s)$, so sieht die durch die Basis $(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)$ ver-ittelte Darstellung offenbar so aus

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

o R die durch $\mathfrak{A}$, S die durch $\mathfrak{B}$ vermittelte Darstellung des Elements c edeutet, und umgekehrt. Stellt man den Modul $\mathfrak{M}$ zunächst als direkte umme von direkt unzerlegbaren Bestandteilen dar, und sucht man zu iesen die Kompositionsreihen wie oben, so sieht bei passender Basiswahl ie Darstellung so aus:

3)
$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ R_{ik} & & R_{rr} \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} S_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ S_{ik} & & S_{ss} \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} T_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ T_{ik} & & T_{tt} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ist wieder K ein Körper, so führt auch umgekehrt jede möglichst weit reduzierte Darstellung (3) zu einer Darstellung des Moduls durch direkt-unzerlegbare Summanden und Kompositionsfaktoren in diesen. Nach dem Satz von Krull und Otto Schmidt (Fußnote [11])) sind die Klassen der direkt-unzerlegbaren Darstellungsbestandteile bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Ist der Modul $\mathfrak{M}$ vollständig reduzibel, so bestehen alle Kästen in (3) aus einer einzigen irreduziblen Darstellung und man nennt die Darstellung (3) *vollständig reduzibel.*

§ 17.

Direkte Summenzerlegung von Darstellungsmoduln bei Ringen mit Einheitselement.

Sei $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul, $\mathfrak{o}$ Ring mit Einheit. Dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_0$, wo für $\mathfrak{M}_e$ die Einheit Einheitsoperator, für $\mathfrak{M}_0$ Nulloperator ist. ($\mathfrak{M}_e$ und $\mathfrak{M}_0$ sind auch Rechts-K-Moduln, wenn $\mathfrak{M}$ es ist.)

Beweis. Jedes m von $\mathfrak{M}$ ist darstellbar als

$$m = em + (m - em).$$

Die Gesamtheit der em sei $\mathfrak{M}_e$, die Gesamtheit der $m - em$ sei $\mathfrak{M}_0$. Dann sind $\mathfrak{M}_e$ und $\mathfrak{M}_0$ selbstverständlich additive Gruppen (und Rechts-K-Moduln, falls $\mathfrak{M}$ es ist). Weiter ist

$$rem = erm,$$

also $\mathfrak{M}_e$ auch $\mathfrak{o}$-Modul; ebenso

$$r(m - em) = rm - rem = rm - rm,$$

also $\mathfrak{M}_0$ $\mathfrak{o}$-Modul. Für die em ist e Einheitsoperater, für die $(m - em)$ Nulloperator. Also gehört nur die Null sowohl zu $\mathfrak{M}_e$ wie zu $\mathfrak{M}_0$: die Summe $\mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_0$ ist direkt.

Handelt es sich um Darstellungsmoduln, so erzeugt $\mathfrak{M}_0$ die triviale Darstellung, wobei jedem Element die Null zugeordnet wird. Spaltet man den Summanden $\mathfrak{M}_0$ ab, so bleibt die durch $\mathfrak{M}_e$ vermittelte Darstellung, *wobei dem Einheitselement die Einheitsmatrix zugeordnet ist.* Auf solche Darstellungen können und wollen wir uns daher von jetzt an beschränken.

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_s$ direkte Summe von zweiseitigen Idealen, $e = e_1 + \ldots + e_s$ die Zerlegung von e, und $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul, wo e Einheitsoperator ist. Dann ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{M} + \ldots + \mathfrak{a}_s\mathfrak{M}$$

direkt.

Beweis. Offenbar ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}\mathfrak{M} = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{M}, \ldots, \mathfrak{a}_s\mathfrak{M})$. Setzt man $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_s$ und entsprechend $\mathfrak{b}_i$, so ist

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{a}_i\mathfrak{M}, \mathfrak{b}_i\mathfrak{M}),$$

und diese Summe ist direkt, da e_i für $\mathfrak{a}_i\mathfrak{M}$ Einheitsoperator, für $\mathfrak{b}_i\mathfrak{M}$ Nulloperator ist.

Wir beschränken uns auf Grund dieses Satzes meist auf Darstellungen von zweiseitig unzerlegbaren Ringen.

§ 18.

Modul- und Darstellungstheorie vollständig reduzibler Ringe.

Sei $\mathfrak{o}$ *vollständig reduzibel und zweiseitig einfach, und* $\mathfrak{M}$ *endlicher* $\mathfrak{o}$*-Modul, für den das Einheitselement von* $\mathfrak{o}$ *Einheitsoperator ist. Dann ist* $\mathfrak{M}$ *vollständig reduzibel, und die einfachen Bestandteile sind den einfachen Linksidealen* $\mathfrak{l}_i$ *operatorisomorph.*

Beweis. Sei

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_n,$$

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{o}m_1, \ldots, \mathfrak{o}m_k),$$

$$\mathfrak{M} = (\ldots, \mathfrak{l}_i m_k, \ldots). \tag{4}$$

Die $\mathfrak{l}_i m_k$, die $\neq 0$ sind, sind $\simeq \mathfrak{l}_i$, denn die Zuordnung $a \to a m_k$ ist ein Operatorisomorphismus. Also sind die $\mathfrak{l}_i m_k$ einfach. Läßt man aus der Darstellung (4) diejenigen $\mathfrak{l}_i m_k$, die in der Summe der vorangehenden schon enthalten sind, weg, so wird die Summe direkt.

Folge. *Ist außerdem* $\mathfrak{M}$ *direkt-unzerlegbar, so ist* $\mathfrak{M}$ *einfach und* $\simeq \mathfrak{l}_i$.

Sei nun Δ der Automorphismenkörper dieses einfachen $\mathfrak{M}$, A der von $\mathfrak{l}_i$, dann gilt auf Grund des Operatorisomorphismus von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{l}_i$ die Ringisomorphie $\Delta \simeq A$. Nach § 1 kann man $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{l}$ als Doppelmoduln mit Δ bzw. A als Rechtsbereich auffassen, und zwar sind diese Doppelmoduln auch Darstellungsmoduln; denn $\mathfrak{l}$ und folglich $\mathfrak{M}$ ist von endlichem Rang in bezug auf den Automorphismenkörper (§ 14), und dessen Einheitselement ist Einheitsoperator. Die durch sie vermittelten Darstellungen gehen durch den Ringisomorphismus $\Delta \simeq A$ auseinander hervor. *Wir können uns also für das Studium dieser Darstellungsklasse auf die durch* $\mathfrak{l}_1$ *in dessen Automorphismenkörper vermittelte Darstellung beschränken.*

Sei speziell für $\mathfrak{l}_1$ eine Basis aus Matrizeneinheiten $\mathfrak{l}_1 = (c_{11}, \ldots, c_{n1})$ zugrunde gelegt, und als Realisation für den Automorphismenkörper A der früher (§ 14) mit K bezeichnete Unterkörper von $\mathfrak{o}$ (man hat dabei in unseren früheren Überlegungen Rechtsideale durch Linksideale zu ersetzen und dementsprechend die Automorphismen rechts zu schreiben). *Stellt*

man dann jedes Element a von $\mathfrak{o}$ in der Gestalt $a = \sum c_{ik}\alpha_{ik}$ dar, so ist $a \to (\alpha_{ik})$ die durch $\mathfrak{l}_1$ vermittelte Darstellung in K.

Denn es ist

$$a \cdot c_{k1} = (\sum\sum c_{ij}\alpha_{ij}) \cdot c_{k1} = \sum c_{ik}\alpha_{ik}c_{k1} = \sum c_{i1}\alpha_{ik}$$

oder

$$a(c_{11}, \ldots, c_{n1}) = (c_{11}, \ldots, c_{n1})(\alpha_{ik}).$$

Sei Γ ein Unterkörper von K, derart, daß K von endlichem Rang t in bezug auf Γ: $\mathsf{K} = \varkappa_1\Gamma + \ldots + \varkappa_t\Gamma$. Dann wird K sein eigener Darstellungsmodul in bezug auf Γ. Die Elemente β von K werden dargestellt durch Matrizes B in Γ, die man so erhält:

$$\beta\varkappa_j = \sum \varkappa_i\beta_{ij}; \qquad B = (\beta_{ij}).$$

Betrachtet man nun $\mathfrak{l}_1$ als Darstellungsmodul in bezug auf den Unterkörper Γ, so findet man:

Die durch $\mathfrak{l}_1$ vermittelte Darstellung von $\mathfrak{o}$ in Γ erhält man, indem man in der oben angegebenen Darstellung von $\mathfrak{o}$ in K:

$$a \to (\alpha_{ik})$$

die Elemente α_{ik} ersetzt durch die Matrizes A_{ik}, die ihnen in der Darstellung von K in Γ entsprechen.

Beweis. $\qquad \mathfrak{l}_1 = \sum c_{i1}\mathsf{K} = \sum\sum c_{i1}\varkappa_j\Gamma.$

Vermöge der Basis $(\ldots, c_{i1}\varkappa_j, \ldots)$ wird:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ c_{ik} \to i \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & & k & & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & E_t & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

wo E_t die Einheitsmatrix, 0 die Nullmatrix t-ten Grades ist,

$$\alpha \to \begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix},$$

also:

$$a = \sum c_{ik}\alpha_{ik} \to \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Der Übergang zu beliebigem $\mathfrak{M}$ bedeutet wieder einen Ringisomorphismus für die Darstellung.

Bemerkung. Die hier studierten Darstellungen im Automorphismenkörper der Linksideale und dessen endlichen Unterkörpern sind bis auf Isomorphie die einzigen, die durch einfache $\mathfrak{o}$-Moduln (oder Linksideale) vermittelt werden können. Denn nach einer früher (§ 2) gemachten Bemerkung erzeugen, wenn man den $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{M}$ als Doppelmodul in bezug auf irgendeinen Körper K auffaßt, die Elemente von K Modulhomomorphismen, also muß der Körper K notwendigerweise auf einen Unterkörper des Automorphismenkörpers dieses $\mathfrak{o}$-Moduls homomorph bezogen sein. Dieser Homomorphismus ist, da das Einheitselement Einheitsoperator ist, ein Isomorphismus, und der ganze Automorphismenkörper muß in bezug auf den betreffenden Unterkörper einen endlichen Grad haben, da sonst auch der Darstellungsmodul einen unendlichen Rang haben würde, was nicht geht.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die hier untersuchten irreduziblen Darstellungen noch nicht alle sind, sondern nur die durch einfache $\mathfrak{o}$-Moduln vermittelten. Es gibt im allgemeinen noch Darstellungsmoduln (z. B. ein Körper Ω, aufgefaßt als Doppelmodul in bezug auf einen Unterkörper Σ als Linksbereich und sich selbst als Rechtsbereich), die als $\mathfrak{o}$-Moduln reduzibel, als Doppelmoduln aber irreduzibel sind, und die deswegen doch zu irreduziblen Darstellungen führen.

§ 19.

Die einfachen Kompositionsfaktoren bei Moduln und Darstellungsmoduln.

Sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Maximal- und Minimalbedingung für Linksideale, $\mathfrak{c}$ das maximale nilpotente Ideal. Dann gilt:

Jeder einfache $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{M}$ wird entweder von $\mathfrak{o}$ annulliert, oder er ist einem einfachen Linksideal $\mathfrak{l}$ aus dem Ring ohne Radikal $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ isomorph. Im letzteren Fall wird der Modul annulliert von allen denjenigen zweiseitigen Idealen aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, welche $\mathfrak{l}$ nicht enthalten, und der absolute Multiplikatorenbereich (§ 1) *ist isomorph dem zweiseitig einfachen Ring, der $\mathfrak{l}$ enthält.*

Beweis. Sei $\mathfrak{c}^e = 0$. Es muß $\mathfrak{c}\mathfrak{M} = 0$ sein, da sonst $\mathfrak{c}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{c}\mathfrak{M} = \mathfrak{c}^2\mathfrak{M} = \ldots = 0$ folgen würde. Daher kann man $\mathfrak{M}$ auch als $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$-Modul auffassen (alle Elemente einer Restklasse nach $\mathfrak{c}$ ergeben dasselbe bei Multiplikation mit einem Element von $\mathfrak{M}$). Als Ring ohne Radikal besitzt $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ ein Einheitselement, also wird $\mathfrak{M}$ direkte Summe aus einem Modul, der von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ annulliert wird, und einem, für den das Einheitselement Einheitsoperator wird (§ 17). Da $\mathfrak{M}$ einfach ist, kann nur einer von den beiden Summanden auftreten. Wenn das Einheitselement Einheitsoperator ist, folgt entsprechend wie in § 18 die Isomorphie zu einem einfachen Linksideal. Ist nämlich $m \neq 0$ ein Element aus $\mathfrak{M}$, so wird auch

$\mathfrak{o}/\mathfrak{c} \cdot m \neq 0$, also wird $\mathfrak{l} \cdot m \neq 0$ für mindestens ein einfaches Linksideal $\mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, und muß daher $\mathfrak{M}$ erschöpfen. Die weiteren Behauptungen sind für solche Linksideale klar und übertragen sich sofort auf alle dazu isomorphen Moduln.

Folgerung. *Ist $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{o}$-Modul, der eine Kompositionsreihe besitzt, so werden die einfachen Kompositionsfaktoren entweder von $\mathfrak{o}$ annulliert, oder sie sind einfachen Linksidealen aus $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ isomorph.*

Ist P ein kommutativ mit $\mathfrak{o}$ verbundener Ring, so bleiben alle Ergebnisse erhalten. Man muß dann nur statt Moduln betrachten Doppelmoduln in bezug auf P rechts und $\mathfrak{o}$ links, welche der Bedingung genügen:

$$a m \cdot \varrho = a \cdot m \varrho = a \varrho \cdot m \quad (\S\ 15).$$

Außerdem soll das Einheitselement von P auch Einheitsoperator sein. Als Untermoduln werden immer nur solche betrachtet, die die Multiplikation mit P gestatten (wie bei Idealen). Die bei unseren Beweisen konstruierten Untermoduln $\mathfrak{c}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{c}^2\mathfrak{M}$, ... genügen dieser Bedingung.

Ist insbesondere P ein Körper und $\mathfrak{M}$ ein P-Modul endlichen Ranges, so ist $\mathfrak{M}$ zugleich Darstellungsmodul. Die durch $\mathfrak{M}$ vermittelte Darstellung ist nicht nur ringhomomorph, sondern auch operatorhomomorph in bezug auf P (§ 15). Alle Darstellungen in P mit dieser Eigenschaft werden durch solche Moduln geliefert. Irreduzible Darstellungen gehören zu einfachen Moduln, und umgekehrt. Also lassen sich die Sätze dieses Paragraphen sofort als Sätze über Darstellungen von $\mathfrak{o}$ in P deuten: *Alle irreduziblen Darstellungen (abgesehen von den Nulldarstellungen) werden durch die einfachen Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vermittelt.* Wenn man also eine beliebige Darstellung nach § 16 vermöge einer Kompositionsreihe reduziert, so treten in der Hauptdiagonale (außer Nullen) nur solche Darstellungen auf, die äquivalent den durch einfache Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vermittelten Darstellungen sind.

Bemerkung. Unter den über $\mathfrak{o}$ und P gemachten Voraussetzungen braucht für $\mathfrak{o}$ keine Endlichkeitsbedingung vorausgesetzt zu werden. Denn alle Darstellungen sind zugleich isomorphe Darstellungen des absoluten Multiplikatorenbereiches, und dieser wird, als isomorphes Urbild eines Ringes aus Matrizen endlichen Grades, selbst ein P-Modul endlichen Ranges, und da nach Definition als zulässige Ideale nur P-Moduln betrachtet werden, sind Maximal- und Minimalbedingung für diesen absoluten Multiplikatorenbereich erfüllt.

Dieser absolute Multiplikatorenbereich wird ein hyperkomplexes System in bezug auf P, wenn P als kommutativer Körper vorausgesetzt wird. Diese Voraussetzung ist immer erfüllt, sobald nicht nur Nullen in der

Hauptdiagonale auftreten. Denn dann wird P nach der Bemerkung in § 18 einem Unterkörper des Automorphismenkörpers von I isomorph, der bei der Realisation durch den Unterkörper K von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ (§ 14) — wegen der kommutativen Verbundenheit — im Zentrum von K liegen muß.

IV. Kapitel.

Darstellungen von Gruppen und hyperkomplexen Systemen.

§ 20.

Einordnung der hyperkomplexen Systeme.

Wir betrachten hyperkomplexe Systeme $\mathfrak{o}$ in bezug auf einen kommutativen Körper P. Da nach Verabredung für die Ideale in $\mathfrak{o}$ nur P-Moduln in Betracht kommen, so gelten für Links- und Rechtsideale die Maximal- und Minimalbedingung (vgl. § 8). Also gilt die ganze in Kap. II dargelegte Ringtheorie.

Unter *Darstellungen* des hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ werden immer im folgenden Darstellungen im Körper P verstanden, und zwar solche Darstellungen, bei denen aus $a \to A$ folgt $a\varrho \to A\varrho$ für ϱ in P (Modulhomomorphie in bezug auf P). Für die Darstellungsmoduln heißt das $x\varrho \cdot m = a \cdot m\varrho$ (vgl. § 15, Schluß). Für die Darstellungsmoduln gelten mithin die Sätze von § 19, aus denen folgt, daß *alle irreduziblen Darstellungen durch einfache Linksideale von* $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ *vermittelt* werden, und daß es somit *so viele nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen* gibt wie *zweiseitig-einfache Summanden* $\mathfrak{a}$ *in einer Zerlegung* $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}e^{(1)} + \ldots + \bar{\mathfrak{o}}e^{(s)}$.

Um die durch ein solches Linksideal I definierte Darstellung von $\mathfrak{o}$ nun wirklich zu bestimmen, gehe man zunächst von den Elementen von $\mathfrak{o}$ auf die zugehörigen Restklassen in $\bar{\mathfrak{o}}$ über. Da die Multiplikation mit einem Element von P einen Isomorphismus für alle Ideale in $\bar{\mathfrak{o}}$ darstellt, so ist der Körper P einem Unterkörper $e^{(\nu)}\mathsf{P}$ des Automorphismenkörpers K_ν eines jeden einfachen Linksideals homomorph und, da das Einheitselement Einheitsoperator ist, sogar isomorph. Man kann die durch ein einfaches Linksideal $\mathfrak{l}_\nu$ vermittelte Darstellung in P erhalten, indem man zuerst die durch $\mathfrak{l}_\nu$ in diesem Unterkörper $e^{(\nu)}\mathsf{P}$ vermittelte Darstellung untersucht und dann vermöge des Isomorphismus $e^{(\nu)}\mathsf{P} \simeq \mathsf{P}$ zu P übergeht. Der Isomorphismenkörper K_ν hat endlichen Rang in bezug auf P; es handelt sich also um Darstellung in einem Unterkörper endlichen Grades des Automorphismenkörpers von $\mathfrak{l}_\nu$.

Um also die gesuchte Darstellung zu erhalten, stelle man zunächst ein jedes c von $\bar{\mathfrak{o}}$ durch seine zweiseitigen Komponenten dar:

$$c = c_1 + \ldots + c_s.$$

Man braucht jetzt nur noch die darstellende Matrix von c_ν zu suchen, da die übrigen c_i das Ideal $\mathfrak{l}_\nu$ annullieren, also durch die Nullmatrix dargestellt werden. Diese findet man nach § 18 so: Man stelle c_ν durch die Matrizeneinheiten $c_{ik}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{a}_\nu$ dar:

$$c_\nu = \sum c_{ik}^{(\nu)} \alpha_{ik}^{(\nu)},$$

und ersetze in der Matrix $(\alpha_{ik}^{(\nu)})$ jedes Element $\alpha_{ik}^{(\nu)}$ durch die Matrix $A_{ik}^{(\nu)}$, die ihm in der durch K_ν vermittelten Darstellung von K_ν in P zugeordnet ist.

Bemerkung. Der Körper K_ν ist von endlichem Rang in bezug auf P. Jedes Element $\varkappa$ genügt einer Gleichung $f(\varkappa) = 0$ mit Koeffizienten aus $e^{(\nu)}\mathsf{P}$, da zwischen den Potenzen von $\varkappa$ sicher eine lineare Abhängigkeit besteht. Ist insbesondere P algebraisch abgeschlossen, so zerfällt diese Gleichung in Linearfaktoren; da K Körper ist, so ist $\varkappa$ schon Nullstelle eines Linearfaktors, mithin gehört $\varkappa$ schon zu $e^{(\nu)}\mathsf{P}$, d. h. es ist $\mathsf{K}_\nu = e^{(\nu)}\mathsf{P}$. In diesem Fall bilden also die Matrizes $(\alpha_{ik}^{(\nu)})$ selbst die irreduzible Darstellung.

Aus dieser Bemerkung zusammen mit § 19 Schluß ergibt sich der „Burnsidesche Satz“:

Es sei P *algebraisch abgeschlossen nnd kommutativ mit einem Ring* $\mathfrak{o}$ *verbunden. Dann enthält jede irreduzible Darstellung* n*-ten Grades in* $\mathsf{P} - \mathfrak{o} \sim \mathfrak{O} -$ *genau* n^2 *linear unabhängige Matrizes*[17]).

Aus dieser Fassung folgt sofort die übliche: „Ein System von Matrizes n-ten Grades in P, welches zu je zweien auch das Produkt enthält, ist stets dann und nur dann irreduzibel, wenn sich keine lineare homogene Relation

$$\sum \alpha_{ik} \varrho_{ik} = 0$$

mit Koeffizienten aus P angeben läßt, die durch die Elemente α_{ik} einer jeden Matrix des Systems befriedigt wird.“ Man kann nämlich aus jedem solchen System von Matrizes durch Hinzunahme aller linearen Verbindungen einen Ring und P-Modul ableiten und diesen Ring als seine eigene Darstellung auffassen.

Beweis. Nach § 19 wird $\mathfrak{O}$ isomorph einem zweiseitig einfachen und vollständig reduziblen Ring $\bar{\mathfrak{o}}$ mit Einheitselement; ein solcher Ring ist aber voller Matrizenring (etwa Ring aller Matrizes m-ten Grades) in bezug auf den Automorphismenkörper der Linksideale, der wegen der algebraischen Abgeschlossenheit mit P zusammenfällt. Jede irreduzible Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}$, also auch die gegebene, wird durch ein einfaches Linksideal erzeugt. Das

[17]) $\mathfrak{o}$ wird also nicht als hyperkomplexes System vorausgesetzt und kann z. B. der aus allen linearen Verbindungen je endlichvieler Elemente einer unendlichen Gruppe bestehende Gruppenring sein.

Linksideal hat den Rang m, die Darstellung den Grad n, also folgt $m = n$, mithin gibt es genau n^2 linear-unabhängige Elemente in $\bar{\mathfrak{o}}$, also auch in $\mathfrak{O}$.

Ebenso folgt leicht der „verallgemeinerte Burnsidesche Satz“ [18]):

Sei unter den gleichen Voraussetzungen $\mathfrak{O}$ eine vollständig reduzible Darstellung von $\mathfrak{o}$, die in lauter inäquivalente Bestandteile zerfällt, der Grade $n_1, n_2, \ldots, n_s$; dann ist $\mathfrak{O}$ vom Rang $n_1^2 + \ldots + n_s^2$ in bezug auf P.

Beweis. Sei wieder $\bar{\mathfrak{o}}$ der absolute Multiplikatorenbereich, der notwendig ein hyperkomplexes System ist. Die verschiedenen inäquivalenten Darstellungen werden durch Linksideale $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ erzeugt, die zu verschiedenen zweiseitig einfachen Komponenten $\mathfrak{a}_i$ von $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{c}}$ gehören, (wo $\bar{\mathfrak{c}}$ das Radikal ist). Also wird die gegebene Darstellung durch $\mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_s$ erzeugt, besitzt somit $\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_s$ als absoluten Multiplikatorenbereich. Daraus folgt mit Hilfe derselben Rangbetrachtungen wie oben die Behauptung.

Sei jetzt $\mathfrak{o}$ ein hyperkomplexes System ohne Radikal in bezug auf einen beliebigen Körper. Nach § 13 ist $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel und besitzt ein Einheitselement. Aus den Sätzen von § 17 und § 18 folgt nun: *Jede Darstellung von $\mathfrak{o}$ ist vollständig reduzibel.*

Umgekehrt gilt: *Jede vollständig reduzible Darstellung eines mit* P *kommutativ verbundenen Ringes $\mathfrak{o}$ besitzt als absoluten Multiplikatorenbereich ein hyperkomplexes System ohne Radikal.*

Beweis. Der absolute Multiplikatorenbereich $\bar{\mathfrak{o}}$ ist isomorph einem Ring und P-Modul aus Matrizes in P, also ein hyperkomplexes System. Die Elemente des Radikals $\bar{\mathfrak{c}}$ werden nach § 19 in jeder irreduziblen Darstellung, also auch in der gesamten Darstellung, durch Null dargestellt, also ist $\bar{\mathfrak{c}} = 0$.

(Treten in der Darstellung nur äquivalente Bestandteile auf, die also alle durch ein Linksideal $\mathfrak{l}$ vermittelt werden, so wird der absolute Multiplikatorenbereich zweiseitig einfach.)

Als *reguläre Darstellung* eines hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ bezeichnet man die durch das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ selbst vermittelte Darstellung. (Beim Gruppenring wählt man dabei speziell die aus den Gruppenelementen $u_1, \ldots, u_h$ bestehende Basis; vgl. § 6.) Da in $\mathfrak{o}$ als Kompositionsfaktoren alle Linksideale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ vorhanden sind, *so stecken alle irreduziblen Darstellungen schon in der regulären Darstellung als Diagonalmatrizen R_{ii}*, wenn man sich die reguläre Darstellung nach Formel (2) § 16 vermöge einer Kompositionsreihe auf eine passende Basis transformiert denkt.

---

[18]) G. Frobenius und I. Schur, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsber. Berlin 1906.

Eine Darstellung ist bekannt, wenn die darstellenden Matrizes der Basiselemente $u_1, \ldots, u_h$ bekannt sind. Handelt es sich speziell um einen Gruppenring, wo also $u_1, \ldots, u_h$ Elemente einer Gruppe sind, so erzeugt jede homomorphe Darstellung der Gruppe durch Matrizes auch eine Darstellung des Gruppenrings, so daß das Problem der Darstellung einer Gruppe ein Spezialfall der Darstellung hyperkomplexer Systeme ist.

§ 21.

Erweiterung des Grundkörpers. Die Darstellungen des Zentrums.

Ist $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \ldots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System und Ω ein Erweiterungskörper des Grundkörpers P, so kann man bilden

$$\mathfrak{o}\,\Omega = a_1 \Omega + \ldots + a_h \Omega$$

mit den alten Multiplikationsregeln für die Basiselemente a_i.[18a]) $\mathfrak{o}\,\Omega$ ist wieder hyperkomplex in bezug auf Ω.

Jede Darstellung von $\mathfrak{o}$ führt zu einer Darstellung von $\mathfrak{o}\,\Omega$, da die Darstellung aller Elemente bekannt ist, sobald die Darstellungen der Basiselemente a_i bekannt sind[19]).

Ein Ideal oder Darstellungsmodul, sowie die entsprechende Darstellung, heißen *absolut-irreduzibel*, wenn sie irreduzibel bleiben nach Übergang zum algebraisch abgeschlossenen Körper.

Ist $\mathfrak{o}\,\Omega$ ohne Radikal, so ist $\mathfrak{o}$ e auch; denn ein nilpotentes Ideal $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{o}$ würde zu einem Erweiterungsideal $\mathfrak{c}\,\Omega$ in $\mathfrak{o}\,\Omega$ führen. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir unten sehen werden.

Das Zentrum von $\mathfrak{o}\,\Omega$ wird gleich dem erweiterten Zentrum $\mathfrak{Z}\,\Omega$. Ist $\mathfrak{o}$ vollständig reduzibel, so ist $\mathfrak{Z}$ direkte Summe von Körpern:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \ldots + \mathfrak{Z}_s.$$

Wenn $\mathfrak{o}$ bei Übergang zu $\mathfrak{o}\,\Omega$ vollständig reduzibel bleibt (d. h. wenn kein nilpotentes Ideal hinzukommt), so zerfällt das neue Zentrum:

$$\mathfrak{Z}\,\Omega = \mathfrak{Z}_1\,\Omega + \ldots + \mathfrak{Z}_s\,\Omega$$

in Ω wieder in eine direkte Summe von Körpern, die, wenn Ω algebraisch abgeschlossen, nach einer Bemerkung in § 20 den Rang 1 in bezug auf Ω haben (und $\simeq \Omega$ sind).

[18a]) Genauer gesagt: man führt neue Symbole $\bar{a}_i$ mit den alten Multiplikationsregeln ein; $\bar{a}_1 \Omega + \ldots + \bar{a}_p \Omega$ enthält dann einen zu $\mathfrak{o}$ isomorphen Unterring, so daß man nachträglich die $\bar{a}$ mit den a identifizieren kann.

[19]) Es werden natürlich wieder nur solche Darstellungen betrachtet, die P-modulhomomorph sind; aus $a \to A$ soll folgen $a\varrho \to A\varrho$ für ϱ in P entsprechend für Ω.

Für die Darstellungen des Zentrums $\mathfrak{Z}$ gelten die folgenden Sätze:

Jede irreduzible Darstellung eines kommutativen hyperkomplexen Systems $\mathfrak{Z}$ im algebraisch abgeschlossenen Körper Ω ist vom ersten Grad (oder: Die irreduziblen Darstellungen sind identisch mit den Homomorphismen von $\mathfrak{Z}$ in Ω).

Beweis. Jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{Z}$ ergibt eine solche von $\mathfrak{Z}_\Omega$, also auch eine solche von $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ das Radikal von $\mathfrak{Z}_\Omega$ ist. $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$ ist ein kommutatives System ohne Radikal, also nach § 14, Schluß direkte Summe von Körpern. Diese sind vom ersten Grad, da Ω algebraisch-abgeschlossen vorausgesetzt wurde, und erzeugen alle irreduziblen Darstellungen (§ 20).

Zugleich folgt, da äquivalente Darstellungen ersten Grades notwendig gleich werden ($\lambda^{-1}\alpha\lambda = \alpha$): *Die Anzahl der verschiedenen Homomorphismen von $\mathfrak{Z}$ in Ω ist gleich dem Rang von $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$.*

Die letzte Bemerkung ergibt für den Spezialfall, daß $\mathfrak{Z}$ Körper über P, den Satz:

Ist $\mathfrak{Z}$ ein kommutativer Körper, so ist $\mathfrak{Z}$ dann und nur dann vollständig reduzibel (ohne Radikal), wenn $\mathfrak{Z}$ Erweiterung erster Art von P *ist.*

Denn für einen Körper werden die Homomorphismen Isomorphismen; ihre Anzahl ist gleich dem Rang von $\mathfrak{Z}_\Omega/\mathfrak{C}$, also dann und nur dann gleich dem Körpergrad ($\mathfrak{Z}$ Erweiterung erster Art), wenn $\mathfrak{C} = 0$ ist.

Ist $\mathfrak{Z}$ vollständig reduzibel:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_t,$$

so werden bei jeder Darstellung auch die einzelnen Körper $\mathfrak{Z}_\nu$ homomorph abgebildet, und zwar wird bei einer irreduziblen Darstellung einer dieser Körper isomorph, die übrigen durch Null dargestellt (§ 19).

Die Anwendung dieser Sätze auf hyperkomplexe Systeme ergibt vorerst für Systeme ohne Radikal:

Ist $\mathfrak{o}_\Omega$, also auch $\mathfrak{o}$ ein System ohne Radikal, so werden bei einer jeden absolut-irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{o}$ die Zentrumselemente z durch Diagonalmatrizes $E\zeta^{(\nu)}$ dargestellt, und $z \to \zeta^{(\nu)}$ ist eine Darstellung ersten Grades von $\mathfrak{Z}$ in Ω. Die so vermittelte Beziehung zwischen den absolut-irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{o}$ und denen von $\mathfrak{Z}$ ist eineindeutig. Die Anzahl dieser Darstellungsklassen ist also gleich dem Rang des Zentrums[20]).

[20]) Entsprechende Sätze gelten nicht nur für Darstellungen im algebraisch-abgeschlossenen Körper Ω, sondern auch für Darstellungen in den einzelnen Automorphismenkörpern, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll.

Beweis. Der Zerfällung in zweiseitig-unzerlegbare Ideale

$$\mathfrak{o}_\Omega = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_t$$

entspricht eineindeutig eine Zerfällung des Zentrums in Körper:

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \mathfrak{Z}_1 + \ldots + \mathfrak{Z}_t,$$

wo $\mathfrak{Z}_\Omega$ das Zentrum von $\mathfrak{o}_\Omega$ ist. Bei einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{o}$ wird ein $\mathfrak{a}_\nu$ isomorph, die übrigen durch Null dargestellt, und die Darstellungsklasse ist durch $\mathfrak{a}_\nu$ eindeutig bestimmt. $\mathfrak{a}_\nu$ wird durch einen vollen Matrizenring dargestellt und das Zentrum eines solchen vollen Matrizenringes besteht aus Diagonalmatrizen $E\zeta^{(\nu)}$. Die Zuordnung $z \to \zeta^{(\nu)}$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{Z}$, und zwar wird das eine $\mathfrak{Z}_\nu$ isomorph, die übrigen durch Null dargestellt. Damit ist alles bewiesen.

Für die Frage, wann einem $\mathfrak{o}$ ohne Radikal ein ebensolches $\mathfrak{o}_\Omega$ entspricht, folgt noch:

Hat $\mathfrak{Z}$ eine Komponente $\mathfrak{Z}_\nu$, die Erweiterung zweiter Art von P ist so besitzt $\mathfrak{o}_\Omega$ sicher ein Radikal[21]). Denn $\mathfrak{Z}_\Omega$ besitzt in diesem Falle schon eines.

§ 22.

Anwendung auf Abelsche Gruppen.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r$ eine endliche Abelsche Gruppe, zerlegt in zyklische Gruppen $\mathfrak{C}_i$ der Ordnungen h_i. Elemente:

$$a = c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r}.$$

Es sei P ein Körper, dessen Charakteristik nicht in der Gruppenordnung $h = h_1 h_2 \ldots h_r$ aufgeht.

Der Gruppenring $\mathfrak{Z}$ besteht aus allen Summen

$$\sum a_\lambda \varrho_\lambda = \sum c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r} \varrho_\lambda \quad (\varrho_\lambda \text{ in } \mathsf{P})$$

und ist homomorphes Abbild des Polynombereichs $\mathsf{P}\,[z_1, \ldots, z_r]$ vermöge $\sum \varrho_\lambda z_1^{\lambda_1} \ldots z_r^{\lambda_r} \to c_1^{\lambda_1} \ldots c_r^{\lambda_r} \varrho_\lambda$. Also ist $\mathfrak{Z} \simeq \mathsf{P}\,[z_1, \ldots, z_r]/\mathfrak{m}$, und man findet leicht:

$$\mathfrak{m} = (z_1^{h_1} - e, \ldots, z_r^{h_r} - e).$$

Im Erweiterungskörper Ω zerfallen die $z_i^{h_i} - e$ in lauter verschiedene Faktoren: $z_i - \varepsilon_i$; also wird $\mathfrak{m}$ Produkt (oder Durchschnitt) von lauter

---

[21]) Hat $\mathfrak{Z}$ nur Komponenten von erster Art, so wird $\mathfrak{o}_\Omega$ ohne Radikal, wie ebenfalls an späterer Stelle bewiesen werden soll. Für Charakteristik Null hat schon I. Schur den äquivalenten Satz bewiesen, daß irreduzible Darstellungen in P bei jeder Erweiterung des Koeffizientenbereichs vollständig reduzibel bleiben (Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen, Transact. Am. Math. Soc. **15** (1909), S. 159).

erschiedenen Primidealen

$$\mathfrak{P}^{(\nu)} = (z_1 - \varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots, z_r - \varepsilon_r^{(\nu)})$$

nit je nur einer Nullstelle $(\varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots, \varepsilon_r^{(\nu)})$. Der Durchschnittsbildung entpricht eine direkte Summenzerlegung (§ 4):

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \mathfrak{Z}_1 + \ldots + \mathfrak{Z}_h,$$

vo jeweils $\mathfrak{Z}_\nu \simeq \mathfrak{Z}_\Omega / \mathfrak{P}^{(\nu)}$ wird, also die Darstellung

$$c_1^{\lambda} \ldots c_r^{\lambda_r} \to \varepsilon_1^{(\nu)\lambda_1} \ldots \varepsilon_r^{(\nu)\lambda_r} \quad \text{oder} \quad a \to \chi^{(\nu)}(a)$$

ermittelt. Diese Darstellungen sind die *Charaktere*. Ihre Anzahl ist $_1 h_2 \ldots h_r = h$, wie es nach der allgemeinen Theorie sein muß.

§ 23.

Determinante eines hyperkomplexen Systems.

Sei $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \ldots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System. Ich adjungiere u P h Unbestimmte $x_1, \ldots, x_h$ und bilde

$$\mathfrak{o}^* = a_1 \mathsf{P}(x) + \ldots + a_h \mathsf{P}(x).$$

Die x sollen mit den a_i vertauschbar sein; dadurch sind die Rechnungsegeln in $\mathfrak{o}^*$ schon bestimmt.

In $\mathfrak{o}^*$ liegt „das allgemeine Element von $\mathfrak{o}$“

$$w = a_1 x_1 + \ldots + a_h x_h.$$

st in einer Darstellung $a_i \to A_i$, so ist dem w zugeordnet:

$$W = A_1 x_1 + \ldots + A_h x_h.$$

W heißt die zur Darstellung gehörige *Systemmatrix* (oder speziell, wenn lie a_i eine Gruppe bilden und $\mathfrak{o}$ daher der Gruppenring ist, die *Gruppenmatrix*). Handelt es sich um die reguläre Darstellung, so hat man die *reguläre Systemmatrix*.

Die Elemente w_{ik} von W sind Linearformen der x. Die „*Systemdeterminante*“ $|W|$ ist also vom Grad n, wenn es sich um Darstellungen n-ten Grades handelt. Insbesondere ist die *reguläre Systemdeterminante* vom Grad h.

Die Systemdeterminante ändert sich nicht bei Übergang zu äquivalenten Darstellungen, da $|\mathsf{P} W \mathsf{P}^{-1}| = |\mathsf{P}|\,|W|\,|\mathsf{P}^{-1}| = |W|$.

Bei Übergang von $(a_1, \ldots, a_h)$ zu einer neuen Basis $(b_1, \ldots, b_h)$ und von $w = \sum a_i x_i$ zu $w = \sum b_i y_i$ findet man die neuen Elemente von W und somit auch die neue Determinante, indem man in den alten eine Substitution

$$x_i = \sum \varrho_{ik} y_k$$

mit regulärer Substitutionsmatrix vornimmt.

Liegt eine Kompositionsreihe des Darstellungsmoduls vor, so sieht be passender Basiswahl die Matrix W so aus:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & & 0 \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ W_{ik} & & & W_r \end{pmatrix},$$

$$|W| = |W_1| \cdot |W_2| \cdot \ldots \cdot |W_r|.$$

Unter den $|W_i|$ einer beliebigen Darstellung kommen keine anderen vor als in der regulären Darstellung von $\mathfrak{o}$ oder sogar von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ das Radikal ist.

Ist P *algebraisch abgeschlossen, so ist die zu einer irreduziblen Darstellung gehörige Determinante* $|W_i|$ *eine Primfunktion in den* x*, und zu inäquivalenten Darstellungen gehören verschiedene Primfaktoren.*

Beweis. Wir können, da alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{o}$ auch Darstellungen von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ sind, uns auf den Ring ohne Radikal $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ beschränken. In ihm führen wir als Basis die Matrizeneinheiten c_{ik} ein; das allgemeine Element lautet dann:

$$w = \sum c_{ik}^{(\nu)} x_{ik}^{(\nu)}.$$

Die Matrizes der irreduziblen Darstellungen lauten: $W_\nu = (x_{ik}^{(\nu)})$. Die Funktionen $|W_\nu| = |x_{ik}^{(\nu)}|$ sind bekanntlich irreduzibel und offenbar voneinander verschieden.

Um die $|W_\nu|$ zu berechnen, kann man die reguläre Systemmatrix von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ in ihre Primfaktoren zerlegen. Jeder Primfaktor kommt so oft vor, wie der Grad der irreduziblen Darstellung angibt, da das entsprechende Ideal $\mathfrak{l}_\nu$ so oft in der Kompositionsreihe vorkommt.

Man kann auch die reguläre Systemmatrix von $\mathfrak{o}$ zugrunde legen, erhält dann aber jeden irreduziblen Faktor öfter, nämlich so oft, wie das entsprechende $\mathfrak{l}_\nu$ als Kompositionsfaktor bei den Linksidealen vorkommt. Bei dieser regulären Darstellung war $\mathfrak{o}$ als Linksideal gedacht; faßt man $\mathfrak{o}$ als Rechtsideal auf, so kommt eine zweite reguläre Systemmatrix (die „antistrophe Matrix“ bei Frobenius), welche dieselben irreduziblen Faktoren enthält (nämlich die Systemdeterminanten sämtlicher irreduzibler Darstellungen), aber möglicherweise mit anderen Exponenten (siehe das Beispiel in § 10).

Die Systemdeterminante eines kommutativen Systems zerfällt in Linearfaktoren, da alle irreduziblen Darstellungen vom ersten Grad sind. Diese Linearfaktoren sind selbst die irreduziblen Darstellungen, ergeben also bei Abelschen Gruppen die Charaktere. Diese Tatsache war Dedekinds Ausgangspunkt bei der Untersuchung der Gruppendeterminante nichtabelscher Gruppen.

§ 24.

Spuren und Charaktere.

Ist in einer Darstellung $\mathfrak{o} \sim \mathfrak{D}$ eines hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ dem lement a die Matrix A zugeordnet, so setzt man

$$Sp_{\mathfrak{D}}(a) = Sp\,A.$$

Spuren sind lineare Funktionen:

$$Sp(c+d) = Sp(c) + Sp(d); \qquad Sp(c\alpha) = \alpha\, Sp(c).$$

Äquivalente Darstellungen haben dieselben Spuren.

Die Spur in einer reduziblen Darstellung ist Summe der Spuren in en durch die Kompositionsfaktoren vermittelten Darstellungen.

Beweis.

$$Sp\begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & A_{22} & \\ & \ddots & \\ A_{ik} & & A_{rr} \end{pmatrix} = Sp(A_{11}) + Sp(A_{22}) + \ldots + Sp(A_{rr}).$$

Hauptspur = Spur bei der regulären Darstellung.

Reduzierte Spur = Summe der Spuren bei den verschiedenen irreduziblen arstellungen.

Ist c Element des maximalen nilpotenten Ideals $\mathfrak{c}$, *so ist* $Sp(c) = 0$ *ir jede Darstellung.*

Beweis. Ich habe nur die Darstellungen durch die einfachen Links-eale von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ zu untersuchen; denn bei jeder anderen Darstellung treten ur diese Kompositionsfaktoren auf, und die Spur ist additiv zusammen-esetzt.

$\mathfrak{c}$ annulliert aber alle Elemente von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$; also ist jedem c aus $\mathfrak{c}$ die ullmatrix zugeordnet, also $Sp(c) = 0$, q. e. d.

Ist $\mathfrak{o}$ zweiseitig einfach und P algebraisch-abgeschlossen, also $\mathfrak{o}$ Ma-izenring: $\mathfrak{o} = \sum c_{ik}\mathsf{P}$, so ist bei der irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{o}$ dem lement $a = \sum c_{ik}\alpha_{ik}$ zugeordnet die Matrix (α_{ik}), also

reduzierte Spur $Sp_1(a) = \sum \alpha_{ii}$,

Hauptspur $Sp_0(a) = n \cdot$ reduzierte Spur $= n \cdot \sum \alpha_{ii}$

nsbesondere:

$$Sp(c_{ik}) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k,$$

$$Sp_1(c_{ii}) = e,$$

$$Sp_0(c_{ii}) = n \cdot e.$$

Geht man von P *zum algebraisch abgeschlossenen Körper* Ω *über, so ändert sich die Hauptspur nicht,* da sie aus derselben Basis berechnet werden kann. Das gilt nicht für die reduzierte Spur.

Die Spuren der Elemente a des Systems ohne Radikal $\mathfrak{o}$ in den absolut-irreduziblen Darstellungen nennt man *Charaktere* und bezeichnet sie mit $\chi(a)$ oder, wenn angegeben werden soll, welche Darstellung gemeint ist, mit $\chi^{(\nu)}(a)$.

Bei einer irreduziblen Darstellung vom Grad n_ν werden die Zentrumselemente nach § 21 durch Diagonalmatrizes $E\zeta^{(\nu)}$ dargestellt, wo $z \to \zeta^{(\nu)}$ eine Darstellung ersten Grades des Zentrums (oder Homomorphismus des Zentrums in Ω) ist. Daraus folgt für die Spur der Wert $n_\nu \zeta^{(\nu)}$. *Also sind die Homomorphismen* Θ *des Zentrums mit den Charakteren* χ *durch die Relation*

$$\chi(z) = n_\nu \cdot \Theta(z) \tag{1}$$

verknüpft.

Im kommutativen Fall ist $n_\nu = 1$, und die Charaktere selbst geben die Homomorphismen (vgl. § 22).

Hat der Körper Ω die Charakteristik Null, was wir im folgenden immer annehmen werden, so kann man (1) durch n durchdividieren:

$$\Theta(z) = \frac{\chi(z)}{n_\nu}.$$

Die Homomorphismuseigenschaft der $\Theta(z)$ drückt sich durch die Formeln aus:

$$\frac{\chi(z)}{n_\nu} + \frac{\chi(z')}{n_\nu} = \frac{\chi(z+z')}{n_\nu},$$

$$\frac{\chi(z)}{n_\nu} \cdot \frac{\chi(z')}{n_\nu} = \frac{\chi(zz')}{n_\nu}.$$

Eine Darstellungsklasse ist durch die Spuren der Matrizes allein schon eindeutig festgelegt. (Um die Spuren aller Matrizes zu kennen, genügt es natürlich, die Spuren der Basiselemente in der gegebenen Darstellung zu kennen.)

Beweis. Der Darstellungsmodul $\mathfrak{N}$ ist bekannt, wenn man weiß, wie oft in ihm ein jeder irreduzible Darstellungsmodul $\mathfrak{M}_\nu$ als direkter Summand vorkommt. Ist diese Anzahl p_ν, so ist die Spur von $e^{(\nu)}$ in der Darstellung gleich $p_\nu n_\nu$, wo n_ν der Grad der irreduziblen Darstellung ist. Also ist

$$p_\nu = \frac{Sp\, e^{(\nu)}}{n_\nu}.$$

§ 25.

Diskriminanten.

Sei $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \ldots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System.

Diskriminantenmatrix = Matrix, deren Elemente die Hauptspuren $Sp(a_i a_k)$ sind.

Reduzierte Diskriminantenmatrix = dasselbe bei reduzierten Spuren, gebildet im algebraisch-abgeschlossenen Körper.

Determinante der Matrix = *Diskriminante* (bzw. *reduzierte Diskriminante*).

Die Diskriminante bleibt dieselbe bei Erweiterung des Grundkörpers.

Bei Übergang zu einer anderen Basis multipliziert sich die Diskriminante mit dem Quadrat der Transformationsdeterminante.

Beweis. Sei

$$(a_1, \ldots, a_h) = (b_1, \ldots, b_h) P,$$

$$(a_i a_1, \ldots, a_i a_h) = (a_i b_1, \ldots, a_i b_h) P,$$

$$(Sp(a_i a_1), \ldots, Sp(a_i a_h)) = (Sp(a_i b_1), \ldots, Sp(a_i b_h)) P,$$

oder in Matrizes

$$(Sp(a_i a_k)) = (Sp(a_i b_k)) P. \tag{1}$$

Ebenso, wenn $\tilde{P}$ die gespiegelte Matrix ist,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix} = \tilde{P} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix}$$

und daraus wie vorhin

$$(Sp(a_i b_k)) = \tilde{P}(Sp(b_i b_k)). \tag{1a}$$

Aus (1) und (1a)

$$(Sp(a_i a_k)) = \tilde{P} \cdot (Sp(b_i b_k)) \cdot P.$$

Durch Übergang zu Determinanten folgt die Behauptung.

Die Determinante ist also nur bis auf eine Quadratzahl aus P bestimmt: aber ihr Verschwinden oder Nichtverschwinden ist eine invariante Eigenschaft.

Aus (1) folgt noch: *Man kann die Diskriminante bis auf einen Faktor $\neq 0$ auch aus zwei verschiedenen Basen, nämlich als $|(Sp(a_i b_k))|$ bestimmen.*

Die Diskriminante verschwindet, wenn $\mathfrak{o}$ ein nilpotentes Ideal $\mathfrak{c}$ besitzt.

Beweis. Als Basiselemente für $\mathfrak{o}$ wähle ich $(c_1, \ldots, c_t, d_{t+1}, \ldots, d_h)$, wo $(c_1, \ldots, c_t)$ eine Basis für $\mathfrak{c}$ bilden. Die Diskriminante wird:

$$\begin{vmatrix} Sp(c_i c_k) & Sp(c_i d_k) \\ Sp(d_i c_k) & Sp(d_i d_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Sp(d_i d_k) \end{vmatrix} = 0.$$

(Das gilt auch für die reduzierte Diskriminante.)

Folge. *Die Diskriminante verschwindet auch dann, wenn nach Übergang zum algebraisch-abgeschlossenen Körper ein nilpotentes Idealauftritt.*

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_s$ *direkt zweiseitig, und seien* $M, M_1, \ldots, M_s$ *die Diskriminantenmatrizes der Ringe* $\mathfrak{o}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$. Dann wird

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & M_s \end{pmatrix},$$

also $|M| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_s|$.

Beweis. Man wähle eine Basis für $\mathfrak{o}$, die sich aus den Basen für $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ zusammensetzt. Ist a in $\mathfrak{a}_i$, so ist

$$Sp_{\mathfrak{o}}(a) = Sp_{\mathfrak{a}_i}(a),$$

wo beide Male Hauptspuren gemeint sind, aber in den Ringen $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{a}_i$. Weiter ist $a_i a_k = 0$, wenn a_i in $\mathfrak{a}_i$, a_k in $\mathfrak{a}_k$, also auch $Sp(a_i a_k) = 0$. Daraus folgt die Behauptung, die ebenso für die reduzierte Diskriminante folgt.

Um die *Diskriminante eines Matrizenringes* $\sum c_{ik} \mathsf{P}$ zu bilden, wähle man zwei verschiedene Basen, nämlich die c_{ik} einmal nach ersten Indizes, einmal nach zweiten Indizes angeordnet. Die Produkttafel sieht so aus:

	$\underbrace{c_{11} \ldots c_{1n}}_{\mathfrak{r}_1}$	$\underbrace{c_{21} \ldots c_{2n}}_{\mathfrak{r}_2}$	$\ldots$
$\mathfrak{l}_1 \begin{cases} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{cases}$	(c_{ik})	0	0
$\mathfrak{l}_2 \begin{cases} c_{12} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{cases}$	0	(c_{ik})	0
$\vdots$	0	0	(c_{ik})

Die Diskriminante wird

$$D = \begin{vmatrix} Sp(c_{11}) & & 0 \\ & Sp(c_{22}) & \\ & & \ddots \\ 0 & & Sp(c_{nn}) \end{vmatrix}^n = \begin{cases} e \text{ für reduzierte Spuren,} \\ n^{n^2} \cdot e \text{ für Hauptspuren.} \end{cases}$$

Folge. *Zerfällt* o *im algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper* ı *Matrizenringe der Grade* $n_1, \ldots, n_s$, *so wird die Diskriminante*

$$D = n_1^{n_1^2} n_2^{n_2^2} \ldots n_s^{n_s^2} \cdot e$$

nd die reduzierte Diskriminante

$$D_{\text{red}} = e.$$

Die reduzierte Diskriminante ist demnach bei Systemen ohne Radikel nmer $\neq 0$, die andere nur dann, wenn kein n_i durch die Charakteristik es Körpers teilbar ist. Mithin:

Das Nichtverschwinden der reduzierten Diskriminante ist notwendig nd hinreichend für Systeme ohne Radikal (nach algebraischem Abschluß es Körpers P).

Das Nichtverschwinden der Diskriminante ist im Fall der Charakte-istik Null notwendig und hinreichend für Nichtauftreten eines Radikals nach algebraischem Abschluß des Körpers P).[22])

§ 26.

Einordnung des Gruppenrings.

Sind $a_1, \ldots, a_h$ *die Elemente einer endlichen Gruppe und bildet man en Gruppenring in einem Körper, dessen Charakteristik nicht Teiler on* h *ist, so ist die Diskriminante* $D \neq 0$, *also der Gruppenring ein Ring hne Radikal.*

Beweis. Wir zeigen zuerst (*Sp* heißt fortan Hauptspur):

$$Sp(e) = he;$$
$$Sp(a_i) = 0 \quad \text{für} \quad (a_i \neq e).$$

In der regulären Darstellung ist nämlich

$$e \to \begin{pmatrix} e & & 0 \\ & e & \\ & & \ddots \\ 0 & & e \end{pmatrix},$$

$$Sp(e) = he.$$

Für $a_i \neq e$ ist

$$a_i a_k = a_\lambda, \qquad \lambda \neq k;$$

---

[22]) Vgl. für kommutative Systeme E. Noether, Diskriminantensatz für Ordnungen..., f. M. 157 (1927), S. 82–104, §§ 4–6. Die dortige Beweismethode ist die gleiche, ber im einzelnen komplizierter; der Übergang von einer Basis zu einer andern (§ 4, 4.) t durch den hier (am Anfang des Paragraphen) gegebenen zu ersetzen (denn die eterminante $|(\varrho_i \varrho_k)|$ verschwindet).

also hat die Matrix, vermöge der die Produkte $a_i a_1, \ldots, a_i a_h$ durch $a_1, \ldots, a_h$ ausgedrückt werden, in der Hauptdiagonale lauter Nullen; also ist $Sp(a_i) = 0$.

Wir nehmen nun die Basen $a_1, \ldots, a_h$ und $a_1^{-1}, \ldots, a_h^{-1}$. Die Matrix $(Sp(a_i a_k^{-1}))$ lautet

$$\begin{pmatrix} he & & 0 \\ & he & \\ & & \ddots \\ 0 & & he \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$D = h^h e \neq 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Als *Klasse* eines Gruppenelements bezeichnet man die (im Gruppenring gebildete) Summe

$$K_a = \sum s^{-1} a s, \tag{1}$$

wo nur über die verschiedenen $s^{-1} a s$ summiert wird. *Die Klassen K_a sind Zentrumselemente*, da sie mit allen Gruppenelementen vertauschbar sind. *Die Klassen K_a erzeugen das Zentrum*; denn wenn ein Element $\sum a_i \varrho_i$ des Gruppenrings mit allen s vertauschbar ist, so ist

$$\sum_i a_i \varrho_i = s^{-1} \left(\sum_i a_i \varrho_i\right) s = \sum_i (s^{-1} a_i s) \varrho_i$$

$$= \frac{1}{h} \sum_i \left(\sum_s s^{-1} a_i s\right) \varrho_i = \frac{1}{h} \sum_i \left(\frac{h}{h_i} K_i\right) \varrho_i,$$

wo h die Anzahl der Gruppenelemente und h_i die Anzahl der Elemente der Klasse K_i ist.

Also ist der Rang des Zentrums gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Gruppenelemente, mithin auch *die Anzahl der absolut-irreduziblen Darstellungen gleich dieser Klassenzahl.*

Die Matrizes A und $S^{-1} A S$ haben dieselbe Spur; also haben die Gruppenelemente a und $s^{-1} a s$ dieselbe Spur.

Bildet man nun auf beiden Seiten von (1) die Spur, so folgt:

$$\chi(K_i) = h_i \chi(a_i),$$

in Worten:

Der Charakter eines Gruppenelements ist gleich dem Charakter der Klasse, dividiert durch die Anzahl der Elemente der Klasse.

(Eingegangen am 12. August 1928.)

as Punktspektrum eines beschränkten symmetrischen Kerns ohne Streckenspektrum.

Von

Johannes Mollerup in Hellerup bei Kopenhagen.

Einleitung.

1. Es sei $\sum a_{st} x_s x_t$ eine beschränkte quadratische Form, $a_{st} = a_{ts} \gtrless 0$.
r setzen

$$K(s,t) = a_{st} \qquad (s = 1, 2, \ldots;\ t = 1, 2, \ldots)$$

l nennen $K(s,t)$ *einen beschränkten symmetrischen Kern*; wir nehmen
daß *keine Zeile oder Spalte der Matrix* a_{st} *aus lauter Nullen besteht.*
sei $g(s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ eine Funktion mit konvergenter Quadratsumme

$$\|g\|^2 = \sum_s g(s)^2;^{1})$$

s) wird *eine Funktion der Klasse* (S) genannt.

Wir bilden nun die neue Funktion dieser Klasse:

$$g_1(s) = (K(s.); g) = \sum_t K(s,t)\, g(t),^{2})$$

l betrachten die homogene Gleichung

$$g(s) - \lambda g_1(s) = 0;$$

ın besteht *das Punktspektrum des Kerns* $K(s,t)$ aus den *Eigenwerten*,
ı. aus der (abzählbaren) Punktmenge λ, in deren Punkten diese Glei-
ıng eine nicht verschwindende Lösung $g(s)$ von konvergenter Quadrat-
ıme besitzt. Der Zweck dieser Arbeit ist eine nähere Bestimmung des
ıktspektrums; das Mittel, welches in diesem Sinne zur Verfügung steht,
die *Methode der Iteration einer Funktion durch einen gegebenen Kern*,
in die Theorie der Integralgleichungen von Herrn Vergerio systematisch

---

[1]) Erhard Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen
bekannten, Rend. di Palermo **25** (1908), S. 53–77.

eingeführt wurde. Die Methode der Iteration ist schon in einer unlängst erschienenen Arbeit[2]) benutzt, um die Gleichungen

$$\sum a_{st} x_t = b_s \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu lösen; sie stützt sich auf eine von Herrn Toeplitz[3]) gefundene Tatsache die wir in unserer Sprache so ausdrücken:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschränktheit des Kerns $K(s,t)$ ist, daß für jede Funktion $g(s)$ der Klasse (S) die Iteration $g_1(s)$ wieder dieser Klasse angehört.

§ 1.

Das Iterationsverfahren und der erste Entwicklungssatz.

2. Wie in der Theorie der Integralgleichungen besteht das Iterationsverfahren aus einer Wiederholung der folgenden vier Schritte:

1. Iteration:

$$g_0(s) = g(s); \quad g_n(s) = (K(s.); g_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wenn $g_1(s)$ nicht identisch verschwindet, so verschwindet auch nicht $g_n(s)$.[4])

2. Konstantenbestimmung:

$$\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|} \leqq \frac{\|g_{n+2}\|}{\|g_{n+1}\|} \to G_1 > 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

$$\frac{\|g_{n+1}\|}{G_1^{n+1}} \leqq \frac{\|g_n\|}{G_1^n} \to V^{(1)} \geqq 0;$$

in der Theorie der Integralgleichungen mit im wesentlichen stetigem Kern hat schon Herr Erhard Schmidt[5]) die analoge Konstante $U^* \geqq 1$ gefunden, und diese Sachlage gilt auch in diesem Gebiete, wenn der Kern eine konvergente Doppelsumme $\|K\|^2 = \sum_{s,t} K(s,t)^2$ hat[6]); wenn aber der Kern nur als beschränkt vorausgesetzt werden darf, müssen wir uns mit der Relation $V^{(1)} \geqq 0$ begnügen. Wir beschränken uns aber hier prinzipiell auf den Fall $V^{(1)} > 0$.

---

[2]) Johannes Mollerup, Uendelig mange Ligninger med uendelig mange Ubekendte, Matematisk Tidsskrift B (1927), S. 1–16.

[3]) E. Hellinger und O. Toeplitz, Math. Annalen 69 (1910), S. 321.

[4]) loc. cit. S. 4.

[5]) Erhard Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Annalen 63 (1907), S. 456–457.

[6]) Johannes Mollerup, Contribution à la théorie d'une fonction de deux variables entières et positives, $K(s,t)$, $\sum_{s,t} K(s,t)^2$ étant convergente, Rend. di Palermo 51 (1927), p. 456.

3. Starker Grenzübergang[7]):

$$\frac{g_{2n}(s)}{G_1^{2n}} \twoheadrightarrow G^{(1)}(s); \quad \frac{g_{2n+1}(s)}{G_1^{2n}} \twoheadrightarrow G_1^{(1)}(s) = (K(s.); G^{(1)}); \quad \|G^{(1)}\| = V^{(1)}.$$

Gleichzeitig haben wir mindestens einen *Eigenwert* mit zugehöriger *Eigenfunktion* gefunden, nämlich

$$\left(\pm\frac{1}{G_1}; \pm G_1 \cdot G^{(1)}(s) + G_1^{(1)}(s)\right).$$

4. Abspaltung:

$$g(s) = G^{(1)}(s) + g^{(2)}(s).$$

Von der Möglichkeit $g^{(2)}(s) = 0$ können wir absehen, weil in diesem Falle schon $\pm G_1 \cdot g(s) + g_1(s)$ Eigenfunktion ist. Es ist jetzt $g(s)$ in zwei *orthogonale* Funktionen zerlegt: $(G^{(1)}; g^{(2)}) = 0$.

Entweder sind nun sämtliche Konstanten $\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|}$ einander gleich, in welchem Falle $g(s) - G^{(1)}(s) = g^{(2)}(s)$ eine *Nullösung* ist, d. h.

$$g_1^{(2)}(s) = (K(s.); g^{(2)}) = 0,$$

und gleichzeitig ist dann

$$g_1(s) = G_1^{(1)}(s);$$

oder aber die Konstanten $\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|}$ sind alle verschieden; in diesem Falle wird dann die Iteration fortgesetzt, indem man von $g^{(2)}(s)$ ausgeht. Wir erhalten dann eine neue Konstante G_2 und es gilt, wie früher, $\frac{\|g_n^{(2)}\|}{G_2^n} \to V^{(2)} \geqq 0$. Ist $V^{(2)} > 0$, so ist

$$G_2 < G_1,$$

und wir haben die neue Lösung der homogenen Gleichung:

$$\left(\pm\frac{1}{G_2}, \pm G_2 G^{(2)}(s) + G_1^{(2)}(s)\right),$$

sowie auch die neue orthogonale Abspaltung:

$$g^{(2)}(s) = G^{(2)}(s) + g^{(3)}(s), \qquad g(s) = G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) + g^{(3)}(s),$$

wo dann wieder die Alternative gilt: *entweder* ist $g(s) - G^{(1)}(s) - G^{(2)}(s)$ eine Nullösung und infolgedessen $g_1(s) = G_1^{(1)}(s) + G_1^{(2)}(s)$, *oder aber:* $g^{(3)}(s)$ ist keine Nullösung, und die Iteration läßt sich dann fortsetzen.

Finden wir in dieser Weise das folgende System von Konstanten und charakteristischen Funktionen:

---

[7]) loc. cit. § 2 (zur Bezeichnung dieses Grenzüberganges verwenden wir den doppelten Pfeil: $\twoheadrightarrow$).

$$G_1 > G_2 > G_3 > \ldots,$$
$$G^{(1)}(s), G^{(2)}(s), G^{(3)}(s), \ldots,$$
$$G_1^{(1)}(s), G_1^{(2)}(s), G_1^{(3)}(s), \ldots,$$

so gilt noch in diesen Orthogonalsystemen der *pythagoreische Lehrsatz* [8] [9]

$$\|G^{(1)}\|^2 + \|G^{(2)}\|^2 + \ldots = \sum_\nu V^{(\nu)2} \leqq \|g\|^2,$$
$$\|G_1^{(1)}\|^2 + \|G_1^{(2)}\|^2 + \ldots = \sum_\nu G_\nu^2 V^{(\nu)2} \leqq \|g_1\|^2;$$

es konvergieren dann auch die folgenden Reihen stark:

$$\sum_\nu G^{(\nu)}(s) = g^*(s), \qquad \sum_\nu G_1^{(\nu)}(s) = g_1^*(s).$$

Wir haben auch wieder die Alternative: *entweder* ist $g(s) - g^*(s) = g(s) - \sum_\nu G^{(\nu)}(s)$ eine Nullösung und infolgedessen $g_1(s) = \sum_\nu G_1^{(\nu)}(s) = g_1^*(s)$, *oder* aber: $g(s) - g^*(s)$ ist keine Nullösung, und die Iteration läßt sich fortsetzen. Endlich haben wir für jeden Wert von ν als Lösungen der homogenen Gleichung:

$$g(s) - \lambda g_1(s) = 0, \quad \text{d. h. } x_s - \lambda \sum_t a_{st} x_t = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$
$$(\lambda; g(s)) = \left(\pm \frac{1}{G_\nu}; \pm G_\nu G^{(\nu)}(s) + G_1^{(\nu)}(s)\right).$$

3. Wenn $G_n \to 0$ gilt, so ersieht man leicht, daß die erste Hälfte der Alternative eintritt [10], und wir haben dann den folgenden *Entwicklungssatz*, der sich inhaltlich mit dem Hilbert-Schmidtschen im Falle eines stetigen Kernes völlig deckt:

Erster Entwicklungssatz. *Es sei $K(s,t)$ ein beschränkter Kern und $g(s)$ eine Funktion der Klasse (S) mit den Konstanten*

$$G_1 > G_2 > G_3 > \ldots, G_n \to 0$$

und den Orthogonalsystemen

$$G^{(1)}(s), G^{(2)}(s), G^{(3)}(s), \ldots,$$
$$G_1^{(1)}(s), G_1^{(2)}(s), G_1^{(3)}(s), \ldots.$$

Es läßt sich dann die Funktion

$$g_1(s) = (K(s.); g) = \sum_t K(s,t)\, g(t)$$

---

[8]) loc. cit. S. 57.
[9]) loc. cit. S. 14.
[10]) loc. cit. S. 13.

urch die stark konvergierende Entwicklung

$$g_1(s) = \sum_\nu G_1^{(\nu)}(s)$$

rstellen; die stark konvergierende Reihe $\sum_\nu G^{(\nu)}(s)$ *stellt eine Funktion* $g^*(s)$ *dar, und die Differenz* $g(s) - g^*(s)$ *ist eine Nullösung des Kerns:*

$$(K(s.); g - g^*) = 0,$$

lls dieselbe nicht identisch verschwindet.

§ 2.

Der zweite Entwicklungssatz.

4. Wir nehmen nun den zweiten Teil der Alternative vor: $(s) - g^*(s) = \dot{g}(s)$ ist keine Nullösung; alsdann hat $\dot{g}(s)$ eine erste onstante: G_ω. Man beweist leicht, daß $G_\omega < G_\mu$ gilt für jedes μ. Wir nden dann, indem wir immer voraussetzen, daß das Iterationsverfahren cht dadurch abbricht, daß eine charakteristische Funktion verschwindet, ne neue abnehmende Konstantenfolge und zwei neue Folgen charakteistischer Funktionen. Bei der Fortsetzung handelt es sich jedenfalls um nen abzählbaren Prozeß; betrachten wir z. B. die pythagoreischen leichungen:

$$\sum_\nu \|G^{(\nu)}\|^2 = \|g^*\|^2 \leqq \|g\|^2 \quad \text{u. d. a.},$$

e sich dann wieder sammeln:

$$\|g^*\|^2 + \|g^{**}\|^2 + \cdots \leqq \|g\|^2 \quad \text{usw.},$$

ann weiß man ja aus der Mengenlehre, daß eine stets wachsende geordete Menge nach abzählbar vielen Schritten abbricht. In diesem Moment at man eine gewisse Reduktion, $\mathring{g}(s)$, der Funktion $g(s)$ erreicht, welche nter der gewöhnlichen Voraussetzung eine Nullösung sein muß. Gleichitig ist die Funktion $g_1(s)$ durch die zweite Menge charakteristischer unktionen ausgeschöpft:

$$g_1(s) = \sum G_1^{(\nu)}(s) + \cdots.$$

Schließen wir in dieser Weise prinzipiell die Möglichkeit einer verhwindenden charakteristischen Funktion aus, so erhalten wir eine Kateorie von Funktionen $g(s)$, die wir *„Funktionen mit durchlaufender eration"* nennen werden.

Wenn wir nun der obenstehenden Menge

$$\sum_\nu \|G^\nu\|^2 + \cdots$$

den Typus ω geben, indem wir die abzählbar unendlich vielen Glieder zweckmäßig permutieren, so erhält gleichzeitig die Entwicklung von $g_1(s)$ denselben Typus. Wir haben dann den Satz bewiesen:

Zweiter Entwicklungssatz. *Ist $K(s,t)$ ein beschränkter Kern und $g(s)$ eine Funktion der Klasse (S) mit durchlaufender Iteration, so läßt sich die Funktion*

$$g_1(s) = (K(s.); g) = \sum_t K(s,t)\, g(t)$$

in die stark konvergierende Reihe

$$\sum_\nu G_1^{(\nu)}(s) = g_1(s)$$

von Orthogonalfunktionen entwickeln.

Die Menge der Konstanten der Funktion $g(s)$ soll das *Punktspektrum der Funktion $g(s)$* (in bezug auf den Kern $K(s,t)$) heißen. Wir haben dann den Satz bewiesen:

Das Punktspektrum einer gegebenen Funktion $g(s)$ der Klasse (S) mit durchlaufender Iteration ist eine abzählbare Punktmenge, die aus stets abnehmenden Folgen besteht, und die also entweder mit einer solchen Folge oder mit einer einzelnen Konstante endet.

Als triviales Beispiel erwähnen wir, daß das Spektrum der Eigenfunktion $\varphi(s)$: $\varphi(s) = \lambda \varphi_1(s)$ aus der einzigen Konstante $\frac{1}{\lambda}$ besteht; die charakteristische Funktion ist $\varphi(s)$, $\varphi^{(2)}(s) = 0$.

§ 3.

Die Iteration der Grundfunktionen.

5. Um die linearen homogenen Gleichungen zu lösen, verwendet Herr E. Schmidt[11]) die Funktionen $E_u(s) = \begin{cases} 0 & s \neq u \\ 1 & s = u \end{cases}$ (*Grundfunktionen*); die erste Iteration von $E_u(s)$ gibt den Kern $K(s,u)$ und die folgenden seine Iterationen $K_2(s,u)$, $K_3(s,u)$ usw., wo u als Parameter aufzufassen ist. Wir nehmen im folgenden stets an, daß *der Kern $K(s,t)$ die Eigenschaft hat, daß sämtliche Grundfunktionen durchlaufende Iteration besitzen.*

Wir bestimmen nun für jede Grundfunktion $E_u(s)$ das Punktspektrum und erhalten dann als

Konstanten:

$$\Omega_{u,\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

charakteristische Funktionen:

$$H_u^{(\nu)}(s) \quad \text{und} \quad H_{u,1}^{(\nu)}(s), \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

---

[11]) loc. cit. S. 66.

Lösungen der homogenen Gleichung:

$$\left(\pm\frac{1}{\Omega_{u,\nu}};\ \pm\Omega_{u,\nu}H_u^{(\nu)}(s)+H_{u,1}^{(\nu)}(s)\right),$$

Entwicklung:

$$K(s,u)=\sum_{\nu}H_{u,1}^{(\nu)}(s).$$

Wir betrachten auch die Funktion $H_u^{(1)}(s)$ als Funktion der beiden Variablen s und u; dieselbe wird dann als *charakteristische Funktion des Kerns* bezeichnet. — Die Richtigkeit des folgenden Satzes leuchtet unmittelbar ein:

Existenzsatz. *Es sei $K(s,t)$ ein beliebiger beschränkter Kern mit der charakteristischen Funktion $H_u^{(1)}(s)$; wenn dieselbe nicht identisch in s und u verschwindet, so gibt es mindestens einen Eigenwert.*

Die Konstanten $\Omega_{u,1}$ $(u=1,2,\ldots)$ fallen gewöhnlich sehr stark zusammen; ist nämlich $H_u^{(1)}(v)\neq 0$ und $H_v^{(1)}(u)\neq 0$, so gilt

$$\Omega_{u,1}=\Omega_{v,1}\quad\text{und}\quad H_u^{(1)}(v)=H_v^{(1)}(u);$$

ist dagegen $H_u^{(1)}(v)\neq 0$, $H_v^{(1)}(u)=0$, so gilt $\Omega_{u,1}<\Omega_{v,1}$.

Wir verwenden im folgenden *eine Erweiterung des gewöhnlichen Begriffes der linearen Abhängigkeit*, nämlich die folgende: Gehören die abzählbar unendlich vielen Eigenfunktionen $\varphi(s)$, $\nu=1,2,\ldots$, zum Eigenwert λ, und denken wir uns dieselbe orthogonalisiert und normiert, so ist, wenn $\sum_{\nu}c_\nu^2$ konvergiert, auch $\varphi(s)=\sum_{\nu}c_\nu\varphi_\nu(s)$ eine Eigenfunktion desselben Eigenwertes. $\varphi(s)$ wird linear abhängig von den Funktionen $\varphi_\nu(s)$ genannt.

Außer den geläufigen Sätzen von Eigenwerten und Eigenfunktionen verwenden wir hier und im folgenden die folgenden einfachen Hilfssätze:

a) *Ist $\varphi(s)$ eine Eigenfunktion*: $\varphi(s)=\lambda\cdot\varphi_1(s)$, *so gilt für eine beliebige Funktion $g(s)$ von (S) die Beziehung* $(\varphi;g)=\lambda(\varphi;g_1)$.

b) *Ist die Eigenfunktion $\varphi(s)$ zu sämtlichen Funktionen $G^{(\nu)}(s)$ orthogonal, so ist auch $\varphi(s)$ zu $g(s)$ orthogonal, wenn $g(s)$ eine Funktion mit durchlaufendem Iterationsverfahren bedeutet.*

6. Erster Hauptsatz. *Das Doppelschema $\pm\frac{1}{\Omega_{u,\nu}}$ enthält sämtliche Eigenwerte, und die zugehörige Formel $\pm\Omega_{u,\nu}H_u^{(\nu)}(s)+H_{u,1}^{(\nu)}(s)$ enthält sämtliche linear unabhängige Eigenfunktionen.*

Wäre nämlich λ ein *neuer* Eigenwert mit der Eigenfunktion $\varphi(s)$, so wäre $\varphi(s)$ zu sämtlichen Eigenfunktionen $\pm\Omega_{u,\nu}H_u^{(\nu)}(s)+H_{u,1}^{(\nu)}(s)$ orthogonal, d. h. $\varphi(s)$ wäre zu sämtlichen Funktionen $H_u^{(\nu)}(s)$ orthogonal, also

(nach b)) orthogonal zu sämtlichen Grundfunktionen $E_u(s)$. Dann müßte $\varphi(s)$ identisch verschwinden.

Ist dagegen $\lambda = \frac{1}{\Omega_{u,\nu}}$, dann suchen wir im Doppelschema $\Omega_{u,\nu}$ sämtliche Zahlen eben dieser Größe aus; die Eigenfunktionen $\frac{1}{\lambda} H_u^{(\nu)}(s) + H_{u,1}^{(\nu)}(s)$ werden orthogonalisiert und normiert, wodurch die linear äquivalente Menge von Eigenfunktionen desselben Eigenwertes λ entsteht:

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \ldots .$$

Es sei nun $\varphi(s)$ eine *beliebige* Eigenfunktion desselben Eigenwertes λ mit der entsprechenden stark konvergierenden Fourierentwicklung

$$\varphi^*(s) = \sum_{\nu} \varphi_\nu(s)(\varphi; \varphi_\nu).$$

$\varphi^*(s)$ ist dann wieder eine Eigenfunktion des Eigenwertes λ (5), also ist es auch die Perpendikelfunktion $\varphi(s) - \varphi^*(s)$. Letztere Funktion ist aber zu jeder Funktion $\varphi_\nu(s)$ orthogonal, d. h. orthogonal zu jeder Funktion $H_u^{(\nu)}(s)$, die diesem Eigenwert entspricht; außerdem ist natürlicherweise die Eigenfunktion $\varphi(s) - \varphi^*(s)$ zu allen anderen Funktionen $H_v^{(\nu)}(s)$, d. h. zu sämtlichen Grundfunktionen orthogonal, sie verschwindet daher identisch. $\varphi(s)$ ist aber linear durch die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ ausgedrückt.

Es ist jetzt unmittelbar ersichtlich, wie man — im Falle durchlaufender Iteration der Grundfunktionen — *das vollständige Orthogonalsystem des Kerns* bilden kann.

7. Wir wollen wieder die Frage nach Zusammenfällen innerhalb des Konstantensystems und des Systems der Eigenfunktionen aufnehmen. Anstatt von vornherein anzunehmen, daß sämtliche Grundfunktionen durchlaufende Iteration besitzen, führen wir sukzessiv diese Annahme ein.

Hat erstens $E_{u_1}(s)$ durchlaufende Iteration, so finden wir das Punktspektrum dieser Funktion und die zugehörigen Eigenfunktionen; hat nun auch $E_{u_2}(s)$ durchlaufende Iteration, so erzeugt dieselbe *entweder* genau dasselbe Punktspektrum *oder aber*: ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Punkt des einen Spektrums (u_1), der nicht dem anderen Spektrum (u_2) angehört, so verschwindet die entsprechende Eigenfunktion für $s = u_2$ und umgekehrt. Auf diese Weise kann man weitergehen. Haben also alle Grundfunktionen durchlaufende Iteration, so muß eine Eigenfunktion ohne Nullstelle einer Konstante entsprechen, die sämtlichen Konstantenfolgen gemeinsam ist.

8. Dritter Entwicklungssatz. *Es bezeichne $g(s)$ eine beliebige Funktion der Klasse (S) und es sei $g_1(s) = (K(s.); g)$; es läßt sich dann*

$g_1(s)$ *in dem vollständigen Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu\}$ *entwickeln*:

$$g_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s)(g_1; \varphi_\nu).$$

Zum Beweise setzen wir

$$g(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s)(g; \varphi_\nu) = h(s),$$

wo dann $(h; \varphi_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gilt; da aber das System φ durch lineare Umschreibung des Systems $\pm \Omega_{u,\nu} H_u^{(\nu)}(s) + H_{u,1}^{(\nu)}(s)$ entstanden ist, so muß die Funktion $h(s)$ zu sämtlichen Funktionen $H_{u,1}^{(\nu)}(s)$ orthogonal sein, also mit Rücksicht auf die Entwicklung

$$K(s, u) = \sum_\nu H_{u,1}^{(\nu)}(s) \qquad \text{(zweiter Entwicklungssatz)}$$

orthogonal sein zu $K(s, u)$, $u = 1, 2, \ldots$,

$$(K(.\,u); h) = (E_u; h_1) = 0.$$

Also verschwindet $h_1(s)$ identisch. Mithin ist

$$g_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s)(g_1; \varphi_\nu).$$

Diese Entwicklung setzt nicht wie der zweite Entwicklungssatz, $g_1(s) = \sum_\nu G_1^{(\nu)}(s)$, die durchlaufende Iteration von $g(s)$ voraus; in diesem letzten Fall sind aber die beiden Entwicklungen von $g_1(s)$ im wesentlichen identisch; z. B. entsteht die Reihe $\sum_\nu G_1^{(\nu)}(s)$ aus der Reihe $\sum_\nu \varphi_\nu(s)(g_1; \varphi_\nu)$, wenn alle Glieder 0 weggelassen und alle dem Eigenwerte $\pm \frac{1}{G_\nu}$ entsprechenden Glieder zusammengefaßt werden. Die gefundene Entwicklung: $g_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s)(g_1; \varphi_\nu)$, oder vielmehr die hieraus abgeleitete:

$$g_n(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \frac{(g_1; \varphi_\nu)}{\lambda_\nu^{n-1}}, \qquad \|g_n\|^2 = \sum_\nu \frac{(g_1; \varphi_\nu)^2}{\lambda_\nu^{2n-2}},$$

läßt unschwer erkennen, daß die erste Konstante G_1 die obere Grenze sämtlicher Konstanten $\frac{1}{\lambda_\nu}$ sein muß. *Entweder* ist dann $G_1 > \frac{1}{\lambda_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, und in diesem Falle ist $V^{(1)} = \|G^{(1)}\| = 0$, d. h. $G^{(1)}(s)$ verschwindet identisch, *oder* es ist $G_1 = \frac{1}{\lambda_\nu}$ für einen Wert von ν und sonst $G_1 > \frac{1}{\lambda_\nu}$. In letzterem Falle ist $V^{(1)^2} = \lambda_\nu^2 \sum_\nu (g_1; \varphi_\nu)^2 + 0$, wo sich die Summation nur auf die λ_ν entsprechenden Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ bezieht.

§ 4.

Zweiter Hauptsatz.

9. Wir betrachten jetzt die inhomogenen Gleichungen

$$x_s - \lambda \sum_t a_{st} x_t = b_s \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

die wir in die einzige Gleichung

$$g(s) - \lambda g_1(s) = u(s), \quad u(s) = b_s, \tag{1}$$

zusammenfassen. Indem wir, wie auch bisher, annehmen, daß *sämtliche Grundfunktionen durchlaufende Iteration besitzen*, wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Die inhomogene Gleichung (1) *ist immer lösbar, wenn* λ *kein Eigenwert und auch keine Häufungsstelle von Eigenwerten ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, benutzen wir das vollständige Orthogonalsystem des Kerns:

$$(\lambda_1; \varphi_1(s)), (\lambda_2; \varphi_2(s)), \ldots .$$

Wir bilden die stark konvergierende Reihe

$$h(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \frac{(\varphi_\nu; u)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}}; \tag{2}$$

da nämlich die Reihe

$$\sum_\nu (\varphi_\nu; u)^2 \leqq \| u \|^2$$

konvergiert, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_\nu \frac{(\varphi_\nu; u)^2}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)^2}$$

unter der im Satz gemachten Voraussetzung. Nach (2) finden wir durch Iteration die gleichfalls starke Entwicklung

$$h_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \frac{(\varphi_\nu; u)}{\lambda_\nu \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)}, \tag{3}$$

und endlich

$$h(s) - \lambda h_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) (\varphi_\nu; u). \tag{4}$$

Setzen wir nun

$$g(s) - h(s) = i(s),$$

und subtrahieren wir die Identität (4) von der gegebenen Gleichung (1), so erhalten wir

$$i(s) - \lambda i_1(s) = u(s) - \sum_\nu \varphi_\nu(s) (\varphi; u). \tag{5}$$

Nach dem dritten Entwicklungssatz ist die rechte Seite,

$$u(s) - \sum_{\nu} \varphi_\nu(s)\,(\varphi_\nu; u),$$

eine Nullösung, eventuell 0. Wir genügen dann (5), indem wir

$$i(s) = u(s) - \sum_{\nu} \varphi_\nu(s)\,(\varphi_\nu; u)$$

setzen, d. h.

$$g(s) = \sum_{\nu} \varphi_\nu(s) \cdot \frac{(\varphi_\nu; u)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}} + u(s) - \sum_{\nu} \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu; u)$$

oder

$$g(s) = u(s) + \sum_{\nu} \varphi_\nu(s)\,(\varphi_\nu; u) \cdot \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}. \tag{6}$$

Nach einem fundamentalen Satz von Herrn Hellinger[12]) läßt sich der gefundene Satz so ausdrücken:

Zweiter Hauptsatz. *Wenn sämtliche Grundfunktionen von durchlaufender Iteration sind, dann gibt es kein Streckenspektrum.*

---

[12]) Ernst Hellinger, Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variablen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1907, S. 20.

(Eingegangen am 18. April 1928.)

Neue Grundlagen der Logik und Mathematik.

Von

Leon Chwistek in Kraków.

I. Einleitung.

Die Grundlagen der Logik und Mathematik, die ich in der Abhandlung „Theory of constructive Types“ [1]) gegeben habe, können als ein System von bloßen Regeln über die Zusammenstellung von Zeichen und Buchstaben betrachtet werden. Durch diese Regeln wurde alles Metaphysische aus den Grundlagen der Logik und Mathematik weggeschafft, indem die Intuition des Lesers darauf beschränkt wurde, die Buchstaben und Zeichen von einander zu unterscheiden und die Angaben über die Zusammenstellung von Zeichen zu verstehen. Nichtsdestoweniger sind folgende Probleme übrig geblieben.

1. *Das Fundamentalschema der Logik und Mathematik.* Das Problem der Reduktion der Fundamentalbegriffe, das auf dem Gebiete des logischen Kalküls in einfacher Weise von Sheffer [2]) gelöst worden ist, wurde auf das Gebiet der Grundlagen der Logik und Mathematik zuerst von Herrn Dr. Greniewski übertragen. Es ist auch Herrn Greniewski gelungen, positive Resultate in dieser Richtung zu erzielen, indem er die Anzahl der Fundamentalbegriffe der Logik und der Mathematik auf vier reduziert hat.

Nun habe ich daran gedacht, ein Fundamentalschema anzugeben, aus welchem alle Fundamentalbegriffe der Logik und Mathematik durch bloße Substitution von Buchstaben und von mittels eben dieses Schemas konstruierten Ausdrücken bekommen werden können. Das Resultat dieser Arbeit ist das folgende: Es hat sich gezeigt, daß als solches Schema eine

[1]) Annales de la société polonaise de mathématique, Kraków 1925

[2]) Trans. Amer. math. soc. 14 (1914).

infache Folge von fünf Buchstaben und irgendeinem Spezialzeichen gelten ann. Ich kann also behaupten, daß aus dem Schema:

$$* EFGHJ$$

n der oben angegebenen Weise alle Ausdrücke der Logik und Mathematik ekommen werden können[3]).

Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, daß die Urteilsfunktionen weier Veränderlichen mittels bekannter Methoden auf die Urteilsfunktionen iner einzigen Veränderlichen zurückgeführt werden und daß folgende Äquivalenzen gelten:

1) $.p|q \equiv *cpccq$,[4])

2) $.f_a\{x\}|q \equiv *cfaxq$,

3) $(\bar{x}).f_a\{\bar{x}\}.q \equiv *x*cfaxqxx*cfaxq$,

4) $.\hat{x}[.f_a\{\hat{x}\}.q]\{y\}|q \equiv *c*x*cfaxqax*cfaxqayq$,

vobei c als ein Platzzeichen benutzt wird. — Daß das Fundamentalschema uch als Fundamentalbegriff der Logik und Mathematik aufgefaßt werden ann, werden wir unten sehen.

2. *Der Fundamentalsatz der Logik und Mathematik.* Ersetzen wir ie fünf von mir benutzten Whitehead-Russellschen Axiome durch den hnen äquivalenten Satz von Nicod, so bleiben als Fundamentalsätze der ogik und Mathematik drei Axiome übrig, und zwar:

1. $..p|.q|r|..t \succ t|..s|q \succ .p|s$ (Satz von Nicod);

2. $.(\bar{x})f_a\{\bar{x}\} \succ f_a\{y\}$ (Axiom der Deduktion);

3. $.(\bar{x}).p \vee f_a\{\bar{x}\} \succ .p \vee (\bar{x})f_a\{\bar{x}\}$ (Axiom der Disjunktion).

Nun kann man auf Grund dieser Axiome folgenden Satz beweisen:

$$.(\bar{x})\ldots p \succ f_a\{\bar{x}\}|.g_a\{\bar{x}\}|f_a\{\bar{x}\}|.g_a\{\bar{x}\}|f_a\{\bar{x}\} \succ$$
$$\ldots p \succ (\bar{x})f_a\{\bar{x}\}|.g_a\{z\}|(\bar{x})f_a\{\bar{x}\}|.g_a\{z\}|f_a\{z\}.$$

Das nähere Studium dieses Satzes hat mich zu der folgenden Bemerkung geführt: Statt der Verallgemeinerungsdirektive, welche bekanntermaßen aussagt, daß wenn der Satz $\vdash f_a\{x\}$ gilt, dasselbe für den Satz $\vdash (\bar{x})f_a\{\bar{x}\}$ der Fall sein muß, nehme ich die folgende Direktive an:

---

[3]) Zur endgültigen Formulierung dieses Schemas hat Herr Greniewski manches Wesentliche beigetragen. Auch während der weiteren Arbeit hat er mir mit wertvollem Rat beigestanden, wodurch manche wichtige Vereinfachung erzielt worden ist. Auch Herrn stud. phil. J. Skarżeński bin ich für die ständige Teilnahme an meiner Arbeit und für manche scharfsinnige Bemerkung verpflichtet. Insbesondere verdanke ich ihm die endgültige Formulierung des Modus ponens.

[4]) Herr Skarżeński hat bemerkt, daß statt $.p|q.$ einfach $.p|q$ benützt werden darf.

Gilt der Satz:

$$\vdash \ldots p \supset f_a\{x\} \mid . g_a\{x\} \mid f_a\{x\} \mid . g_a\{x\} \mid f_a\{x\},$$

so gilt auch der Satz:

$$\vdash \ldots p \supset (\bar{x}) f_a\{\bar{x}\} \mid . g_a\{y\} \mid (\bar{x}) f_a\{\bar{x}\} \mid . g_a\{y\} \mid f_a\{y\}.$$

Nun ist es leicht, zu zeigen, daß diese Direktive nicht nur die Ver allgemeinerungsdirektive völlig ersetzt, sondern auch die Axiome der Deduk tion und Disjunktion aus dem Satze von Nicod entfließen läßt. Auf dies Weise bleibt der Satz von Nicod als das einzige Axiom der Logik und Mathematik übrig, wobei unsere Direktive in die allgemeine Substitutions regel einverleibt wird, wie wir es unten sehen werden.

Es ist nun klar, daß wir hier nichts inhaltlich Neues eingeführt, woh aber die alte Form durch eine viel einfachere ersetzt haben.

3. *Anwendung des Fundamentalschemas der Logik und Mathematik an die Semantik.* Ich gehe nun zum folgenden Problem über, das woh als das wichtigste von den hier behandelten betrachtet werden dürfte. Seit Richard seine bekannte Antinomie aufgestellt hat, haben die Logiker die Semantik als ein gefährliches Gebiet vermieden und haben sogar gezweifelt ob es überhaupt eine widerspruchslose Semantik der apriorischen Wissen schaften geben kann. Mir aber scheint die Semantik ein ganz klares und widerspruchsloses Gebiet zu sein; die Richardsche Antinomie betrachte ich aber als ein fundamentales Problem der Mengenlehre, so wie es für die Russellsche Antinomie der Fall ist. Deswegen habe ich zunächst daran gedacht, das Whitehead-Russelsche System von dem Standpunkte der Richardschen Antinomie zu analysieren[5]). Von der Rekonstruktion dieser Antinomie innerhalb eines rein logischen Systems kann wohl nicht die Rede sein, da dazu allerdings semantische Begriffe nötig sind; es handelt sich aber immer darum, zu sehen, ob das gegebene System dermaßen konstruiert ist, daß die Hinzufügung der Semantik die Richardsche Antinomie nach sich ziehen muß oder nicht. In der von mir gegebenen Rekonstruktion der Richardschen Antinomie wurde auf dem Whitehead-Russellschen Mengen begriff basiert, der sich nachher als zweideutig erwiesen hat. Da dieser Begriff auf Grund der Annahme des Axioms der Extensionalität aus dem Whitehead-Russellschen System eliminiert werden kann, ohne dieses System in seinem Wesen zu ändern, so habe ich daraus geschlossen, daß das Whitehead-Russellsche System in seinem Wesen von der Richardschen Antinomie frei ist. Wie ist es aber mit der vereinfachten Typenlehre, welche Mengen, deren Elemente denselben Typus haben, einen einzigen

[5]) Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik, Math. Zeitschr. 14 (1922), S. 241.

Typus bilden läßt? — Ich behaupte, daß diese Theorie die Richardsche Antinomie nach sich ziehen muß, wenn man sie in Einklang mit der theoretischen Semantik bringen will. Deswegen betrachte ich die vereinfachte Typenlehre vielmehr als eine Arbeitshypothese, würde aber nie zugeben, daß sie die wahre Grundlage des rationalen Denkens sei. — Um diese Probleme gründlich zu erörtern, muß man offenbar über ein fertiges System der theoretischen Semantik verfügen. Das aber ist die Sache der Zukunft. Hier handelt es sich bloß um die *elementare Semantik*, welche so weit entwickelt wurde, als es zur mechanischen Konstruktion der im System der Logik und Mathematik vorkommenden Ausdrücke nötig ist.

Was nun die Methode der Konstruktion einer elementaren Semantik anbelangt, so hat es sich zunächst darum gehandelt, die Reduktion der Fundamentalbegriffe dieser Disziplin zu vollziehen. Als Resultat dieser Untersuchung haben sich insgesamt sechs Fundamentalbegriffe herausgestellt.

Zunächst habe ich die Symbole $.E$ (1°) und $,E$ (2°) eingeführt, die dazu geeignet sind, die im System vorkommenden Buchstaben auf einen einzigen mittels Abkürzungen zurückzuführen und andererseits so viel neue Buchstabenzeichen, wie wir wollen, einzuführen. Es ist klar, daß dazu eines von ihnen, z. B. $.E$, genügend wäre; es ist aber bequemer, auch das Symbol $,E$ zu benützen.

Weiter wird bemerkt, daß neben dem Begriff eines eigentlichen Satzes $-E$ (3°) auch der Begriff eines semantischen Satzes $\models E$ (4°) notwendig ist.

Um die Verschiedenheit nicht identischer Ausdrücke festzustellen, ist auch der Begriff der Ordnung notwendig, den ich mittels des Urteils:

„G folgt auf E“ (5°)

eingeführt habe. Als wichtigstes Element der Semantik ist das Fundamentalurteil

„H ist das Resultat der Substitution von G für F in E“ (6°)

zu betrachten, das sich als recht fruchtbar erwiesen hat.

Alle diese Begriffe sind nun aus dem Fundamentalschema der Logik und Mathematik mittels folgender Tafel zu entnehmen:

$$1° * cccc E$$
$$2° * E cccc$$
$$3° * c E ccc$$
$$4° * ccc E c$$
$$5° * c E c G c$$
$$6° * E F G H c,$$

wo c als das Platzzeichen vorkommt. Wir stellen also fest, daß das Fundamentalschema der Logik und Mathematik ebenso als das Fundamentalschema der symbolischen Semantik gelten kann.

4. *Der Fundamentalbegriff der Semantik und der Logik und Mathematik.* Zunächst ist darauf hinzuweisen, daß in der hier angenommenen Symbolik kein Unterschied zwischen einem Ausdruck und dem von ihm bezeichneten Urteil gemacht wird. Schreibe ich z. B. $*cpccp$, so benütze ich p als Urteil, und erhalte das Urteil $\sim p$. Schreibe ich aber $*cpcpc$, so sage ich aus, daß der Buchstabe p nach p kommt, ich habe also mit dem Buchstaben p, nicht aber mit dem durch diesen Buchstaben bezeichneten Urteil zu tun. — Nun ist zu bemerken, daß daraus keine Zweideutigkeit entspringen kann, und zwar aus denselben Gründen, durch welche sie in der gewöhnlichen Rede- und Schreibweise ausgeschlossen ist. Schreibe ich z. B. $2 \times 2 = 4$, so kann ich sagen, daß ich hier einen Ausdruck habe, welcher fünf Zeichen enthält, aber auch, daß mir ein wahres Urteil vorliegt. — Es soll noch hervorgehoben werden, daß wir es hier nicht mit Mengen von Ausdrücken und auch nicht mit Urteilsfunktionen einer semantischen Veränderlichen zu tun haben, daß die Semantik es also mit einem einzigen Typus von Gegenständen, d. h. mit bloßen Ausdrücken zu tun hat. Andererseits sind aus dem eigentlichen System der Logik und Mathematik alle semantischen Ausdrücke, wie z. B. $*cpcpc$, streng ausgeschlossen.

Fragt man nun, welchen Sinn der Ausdruck $*EFGHJ$ besitzt, so ist folgendes zu antworten: Dieser Ausdruck kann unter Umständen keinen Sinn haben, hat er aber einen, so ist er durch den folgenden 8-gliedrigen Satz gegeben:

1. Ist E von c verschieden und ist das für F, G, H, J nicht der Fall, oder ist J von c verschieden und ist es für F, G, H, E nicht der Fall, so gilt $*EFGHJ$, wobei $*EFGHJ$ ein beliebiges Urteil bezeichnet.

2. Sind E, G, H, J nicht von c verschieden, ist das aber für F der Fall, so ist F ein eigentlicher Satz.

3. Sind E, F, G, J nicht von c verschieden, ist das aber für H der Fall, so ist H ein semantischer Satz.

4. Sind E, G, J nicht von c verschieden, ist das aber für F, H der Fall, so kommt H nach F.

5. Sind E, F, G, H von c verschieden und ist das für J nicht der Fall, so ist H das Resultat der Substitution von G für F in F

6. Sind E, G, H nicht von c verschieden, ist es aber für F, J der Fall, so ist es nicht der Fall, daß F gilt, oder es ist nicht der Fall, daß J gilt.

7. Sind F, G, H, J von c verschieden, und ist dies für E nicht der Fall, so ist H kein G-Typus-Element von F oder es ist nicht der Fall, daß J gilt.

8. Sind E, F, G, H, J von c verschieden, so ist es der Fall, daß F gilt, und zwar für alle G-Typus-Elemente E. —

Hier ist zu bemerken, daß der Fall 8, ebenso der Form

$$*x*cfaxqxx*cfaxq,$$

welche als Urteilsausdruck benutzt wird, wie der Form

$$*x*cfaxqax*cfaxq,$$

welche als Mengenausdruck gilt, entspricht.

Wir sehen also, daß wir mit bloßen Ausdrücken zu tun haben, welche entweder sinnlos sind oder Urteile bezeichnen. Unter den letzteren sind gewisse Ausdrücke als Mengenausdrücke benützt.

Bei dieser Interpretation ist ein Buchstabe entweder als Urteil oder einfach als Buchstabe zu betrachten, wie es z. B. in den Sätzen:

1. ist es der Fall, daß p gilt, so ist es der Fall, daß p gilt,

2. p ist das Resultat der Substitution von p für p in p,

der Fall ist. Die Unterscheidung eines Buchstaben p von dem durch diesen Buchstaben gegebenen Urteile ist ohne Bedeutung, weil dabei keine Zweideutigkeit herauskommen kann, und zwar deswegen, weil die Urteile in keinem Falle unmittelbar gegeben werden können, wohl aber als dazu gedachte Objekte, deren Existenz ein Problem der Metaphysik ist, betrachtet werden müssen.

Was nun die Axiomatik der allgemeinen Semantik anbelangt, so ist zu bemerken, daß sie ohne irgendeine intuitive Semantik nicht möglich wäre, da wir ja zu irgendeiner Axiomatik gewisse Regeln über die Buchstaben, Zeichen und ihre Zusammensetzung benutzen müssen. Es hat sich nun darum gehandelt, die intuitive Semantik so weit wie möglich zu beschränken und insbesondere sie von der Typenlehre unabhängig zu machen. Wir werden sehen, daß die hier benützte intuitive Semantik diesen Bedingungen Genüge leistet. — Neben den semantischen Fundamentalbegriffen sind hier zwei konstruierte Begriffe benutzt worden, und zwar die Urteile

1. $*E*ccccc*ccccc Fc.$

2. $*c*EFEEccc*c*E*ccccc*ccccc Fccc*E*ccccc*ccccc Fc,$

wobei der Ausdruck 2 mit $.*EFEEc\supset *E*ccccc*ccccc Fc$ abgekürzt werden kann.

Der Ausdruck 1 ist zu lesen: F ist das Resultat der Substitution von $*ccccc$ für $*ccccc$ in E. Es ist klar, daß dieser Satz dann und nur dann wahr ist, wenn E mit F semantisch identisch ist, da ja durch die Substitution von $*ccccc$ für $*ccccc$ in E gar nichts geändert werden kann. Wir können also den Ausdruck 1 zur Bezeichnung der semantischen Identität benützen. Es ist leicht zu sehen, daß der Ausdruck 2 einfach besagt, daß F in E enthalten ist. Dazu genügt es, die evidente Äquivalenz

$$\sim(.*EFEEc\supset *E*ccccc*ccccc Fc)$$
$$\equiv .*EFEEc.\sim *E*ccccc*ccccc Fc$$

ins Auge zu fassen. Hier besagt das rechte Glied: „E ist das Resultat der Substitution von E für F in E, und E ist verschieden von F.“ Dieses Urteil kann offenbar dann und nur dann wahr sein, wenn F in E nicht enthalten ist, da ja sonst die Substitution von F in E eine Veränderung von E nach sich ziehen dürfte. Die Negation dieses Urteils besagt also, daß F in E enthalten ist. Das ist eben der Sinn des Ausdrucks 2.

Die semantischen Axiome sind nichts anderes als eine einfache Beschreibung fundamentaler Eigenschaften der Ausdrücke mittels der Fundamentalbegriffe der Semantik und der hier besprochenen konstruierten Begriffe.

Es handelt sich hier um Sätze, welche in jeder theoretischen Wissenschaft stillschweigend angenommen werden müssen. Deswegen ist es klar, daß es sich hier im strengen Sinne um keinen Beweis der Widerspruchslosigkeit handeln kann. Nichtsdestoweniger könnte man daran denken, einen solchen Beweis mittels einer Interpretation oder mittels der Hilbertschen Methode zu geben. Von diesem Problem sehe ich hier gänzlich ab.

5. *Verfahrungsregeln.* Die in meiner „Theory of constructive Types“ umfangreichen semantischen Regeln sind hier auf bloße Bezeichnungsregeln von Buchstaben und Ausdrücken zurückgeführt worden. Die Verfahrungsregeln bestehen aus dem Modus ponens und der Direktive der Substitution. Dabei wurde insbesondere die Direktive der Transformation, sowie jene der Verallgemeinerung auf Substitution zurückgeführt. Die Direktive der Transformation habe ich in der „Theory of constructive Types“ als eine semantische Regel bezeichnet, indem ich den Ausdrücken $\hat{z}[f_a\{\hat{z}\}]\{x\}$ und $f_a\{x\}$ denselben Sinn zugesprochen habe. Dieser Standpunkt hat sich

ber als unhaltbar erwiesen, da ja beide Ausdrücke durch bloße Substitution onstruierbar sind, also ein jeder von ihnen einen Sinn besitzen muß. agen wir also, daß sie denselben Sinn haben, so ist es keineswegs eine emantische, vielmehr eine Verfahrungsdirektive. Nun kann aber in einem ollkommenen System der Logik für den Sinnbegriff kein Platz sein, da sich ja im Grunde um bloße Vorschriften für mechanisches Operieren andeln muß. Deswegen habe ich einfach zwei Verfahrungsregeln ange-ommen, welche besagen, daß, wenn es der Fall ist, daß $\vdash \hat{z}[f_a\{\hat{z}\}]\{x\}$ ilt, es auch der Fall sein muß, daß $\vdash f_a\{x\}$ gilt, und umgekehrt. Diese egeln ließen sich aber in das verallgemeinerte Schema der Substitution nfügen. — Dasselbe ist auch für alle übrigen in der „Theory of con-ructive Types" vorkommenden Operationen der Fall.

Würden wir von den Abkürzungen absehen, so dürfte unsere Regel er Substitution recht umfangreich ausfallen. Ich behaupte aber, daß das-lbe in einem beliebigen, sogar viel weniger allgemeinen System der Fall ein muß, wenn man nichts Ungesagtes übrig lassen will.

6. *Das Problem der Extensionalität.* Das Problem der Extensionalität leibt im Bereich des eigentlichen Systems der Logik und Mathematik nentschieden. — Es ist aber zu bemerken, daß die Semantik ein nicht-xtensionales System darbietet. Um es zu sehen, genügt es zu bemerken, aß z. B. $*cpccp \equiv *c*c*cpccpcc*cpccpcc*c*cpccpcc*cpccp$, bwohl beide Ausdrücke keineswegs identisch sind, was aus den Axiomen er Semantik geschlossen werden kann. Es ist also festzustellen, daß, wenn an das sog. Axiom der Extensionalität annimmt, dadurch eine schwer-iegende Beschränkung des Forschungsbereichs entfließt, und zwar wird ben die Semantik, welche als ein außerordentlich interessantes Problem etrachtet werden dürfte, außer acht gelassen.

7. *Abkürzungen.* Es ist das Verdienst von Herrn Wilkosz[6]), darauf uerst hingewiesen zu haben, daß ein mathematischer Beweis dann und ur dann als streng durchgeführt betrachtet werden darf, wenn man dabei lle definierten Begriffe durch die entsprechenden direkt konstruierten egriffe ersetzt hat. Ich möchte sagen, es gibt eigentlich in einem voll-ommenen System keinen Platz für Definitionen. Mit Definitionen kann an wohl zu tun haben, wenn es sich um eine Interpretation des Systems andelt, welche die Resultate des Systems mit den intuitiv erworbenen ätzen in Einklang zu bringen trachtete, zuerst aber muß die *theoretische Möglichkeit* vorhanden sein, das ganze System mittels des bloßen Funda-entalschemas zu konstruieren.

[6]) Podstawy ogólnej teorji mnogości, Warszawa 1925.

In meiner „Theory of constructive Types“ habe ich positive Regeln des Definierens gegeben[7]), welche, meines Wissens, als die erste Probe in dieser Richtung betrachtet werden dürfen. Diese Regeln sind vielleicht von dem eigentlichen System nicht scharf genug separiert worden, wodurch das Mißverständnis entstehen konnte, daß sie als ein wesentlicher Bestandteil des Systems zu betrachten sind. Davon kann aber keinesfalls die Rede sein. Abgesehen davon, daß es sich ja im logischen System zunächst darum handelt, die Fundamentalbegriffe und Direktiven auf ein Minimum zurückzuführen, ist es leicht zu sehen, daß die Regeln des Definierens mit der absoluten Strenge der logischen Regeln nichts zu tun haben, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Zunächst wäre, nach Bemerkung von Skarżeński, eine Direktive nötig, welche uns die Benützung zweier verschiedener Ausdrücke zur Definition eines einzigen Symbols untersagen dürfte. — Das aber kann in strenger Weise dann und nur dann getan werden, wenn wir über eine abgeschlossene Tafel von Definitionen verfügen. Ist aber das letztere der Fall, so sind eigentlich keine Regeln des Definierens nötig.

2. Möchten wir von einer abgeschlossenen Tafel von Abkürzungen absehen, so wäre folgende Schwierigkeit zu überwinden. In einem vollkommenen System der Logik und Semantik kann ja nicht davon die Rede sein, beliebige neue Zeichen einzuführen, da wir ja über solche Zeichen überhaupt nichts beweisen können, insbesondere nicht, daß sie wirklich neu sind. Möchten wir aber eine beschränkte Anzahl von Zeichen benützen, so hätten wir mit recht weitschweifigen Definitionen zu tun, welche als keine echte Abkürzung zu betrachten wären.

Dieser letzte Punkt ist sozusagen der Kern des Problems. Angenommen, es ist irgendein System von Regeln des Definierens gegeben, so ist die strenge Anwendung dieser Regeln in Einzelfällen eine wirkliche Komplikation der Schreibweise, während uns im allgemeinen andere Abkürzungen zur Verfügung stehen, welche aus den angenommenen Regeln nicht entfließen, trotzdem aber zu keiner Zweideutigkeit führen und als recht praktisch erscheinen. Dann ist es offenbar ratsam, auch solche Abkürzungen zu benutzen, was ich auch in der „Theory of constructive Types“ in einzelnen Fällen getan habe. Dadurch wird aber die Zwecklosigkeit der positiven Regeln des Definierens in auffallender Weise klargemacht.

Was die Benützung von Abkürzungen anbelangt, so ist festzustellen, daß die Verfahrungsregeln nur für wirkliche, nicht abgekürzte Ausdrücke

[7]) Allerdings sind auf der S. 28 Z. 27 loc. cit. bevor „then“ die Worte „and if *E* does not contain a part of a defined symbol“ hinzuzufügen.

gelten, daß sie also dann und nur dann benützt werden können, wenn es sich um solche Ausdrücke handelt. Möchte man daran denken, Verfahrungsregeln für abgekürzte Ausdrücke aufzustellen, so hätte man mit folgender Schwierigkeit zu tun. Es ist ausgeschlossen, alle Buchstaben, welche in einem gegebenen Ausdrucke vorkommen, auch in seiner Abkürzung zu behalten, da in diesem Falle unsere Abkürzungen recht bald eine unerträgliche Weitschweifigkeit aufweisen dürften. Tut man es aber nicht, so ist man nicht imstande, irgendeine Verfahrungsregel auf den abgekürzten Ausdruck unmittelbar anzuwenden, da man ja dabei mit jedem Buchstaben rechnen muß. Arbeitet man also mit Abkürzungen, so muß man damit rechnen, daß es eine abgekürzte Arbeit ist, welche mit dem vollkommenen System der Logik nichts zu tun hat. — Es ist vielmehr folgender Grundsatz geltend: Gebe ich ein System der Logik mittels Abkürzungen an, so behaupte ich, daß ich ein vollkommenes System der Logik dadurch bekommen kann, daß ich die Abkürzungen eliminiere. Das ist offenbar nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch möglich, obwohl dazu eine Art Rechenmaschine nötig wäre. — Was das hier angegebene System anbelangt, so ist zu bemerken, daß die Verfahrungsregeln so einfach sind, daß sie die Konstruktion einer solchen Maschine keineswegs als unmöglich erscheinen lassen.

Aus dem hier Gesagten ist keineswegs zu schließen, daß eine eingehende Theorie der Abkürzungen ohne Bedeutung sei. Im Gegenteil wäre eine solche Theorie nicht nur an sich interessant, sondern auch für die Logiker und Mathematiker von großer Bedeutung. Ich möchte sagen, daß eine solche Theorie auch für das philosophische und praktische Denken nützlich wäre. Als Beispiel einer erfolgreichen Arbeit in dieser Richtung möchte ich die Methode von Lukasiewicz angeben, welche jede Art von Punkten und Klammern überflüssig macht, indem sie das charakteristische Zeichen der Abkürzung stets am Anfang erscheinen läßt, z. B. $\vee pq$ statt $.p \vee q.$ bzw. $.p \vee q$. Diese Methode habe ich hier in den meisten Fällen angewandt.

II. Das System der Logik und Mathematik.

A. Semantische Regeln.

0·01. Buchstaben.

0·011. $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}\;\mathfrak{c}\;\xi\,\eta\,\zeta\,\theta\,\iota\,\lambda\,\mu\,\nu\,\varrho\,\omega\;\mathfrak{d}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ sind *Buchstaben.*

0·012. $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}$ sind *elementare Buchstaben.*

0·013. $\xi\,\eta\,\zeta\,\theta\,\iota\,\varrho\,\lambda\,\mu\,\nu\,\omega\;\mathfrak{d}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ sind *semantische Buchstaben.*

0·014. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ sind *scheinbare Veränderliche.*

0·02. Ausdrücke.

0·021. Ist E ein Buchstabe, so ist E ein *Ausdruck*.

0·022. $p\ q\ r\ s\ t\ u\ v\ w\ x\ y\ z\ \theta\ \iota\ \lambda\ \mu\ \nu\ \varrho\ \omega\ l\ m\ n\ d\ h$ sind *eigentliche Ausdrücke*.

0·023. Sind $E\,F\,G\,H\,J$ Ausdrücke, so ist $*E\,F\,G\,H\,J$ ein Ausdruck.

0·024. Sind $E\,F\,G\,H\,J$ Ausdrücke, so ist $*E\,F\,G\,H\,J$ ein eigentlicher Ausdruck.

0·03. Abkürzungen.

Sind $E\,F\,G\,H\,J\,K\,L\,M\,N$ eigentliche Ausdrücke, so gelten folgende Abkürzungen:

Nr.	Abkürzung	Ausdruck
	Zeichenausdrücke	
0·0301	$.E$	$*Ecccc$
0·0302	$,E$	$*ccccE$
	Eigentliche Buchstaben	
	a) Typikalische Zeichen	
0·0303	a	$*ccccc$
0·0304	b	$.a$
0·0305	e	$.b$
	b) Funktionalzeichen	
0·0306	f	$.e$
0·0307	g	$.f$
0·0308	φ	$.g$
0·0309	ψ	$.\varphi$
0·031	χ	$.\psi$
0·0311	Φ	$.\chi$
0·0312	Ψ	$.\Phi$
	c) Urteilszeichen	
0·0313	p	$.\Psi$
0·0314	q	$.p$
0·0315	r	$.q$
0·0316	s	$.r$
0·0317	t	$.s$
	d) Argumente	
0·0318	x	$.t$
0·0319	y	$.x$
0·032	z	$.y$
	e) Bezeichnete Veränderliche	
0·0321	u	$.z$
0·0322	v	$.u$
0·0323	w	$.v$
	f) Mengenzeichen	
0·0324	α	$.w$
0·0325	β	$.\alpha$
0·0326	γ	$.\beta$
0·0327	δ	$.\gamma$
0·0328	$\varkappa$	$.\delta$
0·0329	σ	$.\varkappa$
0·033	τ	$.\sigma$
0·0331	$\tilde{\omega}$	$.\tau$
	g) Beziehungszeichen	
0·0332	P	$.\tilde{\omega}$
0·0333	Q	$.P$
0·0334	R	$.Q$
0·0335	S	$.R$
0·0336	T	$.S$
0·0337	X	$.T$
0·0338	Y	$.X$
0·0339	Z	$.Y$

Nr.	Abkürzung	Ausdruck
	Semantische Sätze	
0·034	$\models E$	$*cccEc$
	Eigentliche Sätze	
0·0341	$\vdash E$	$*cEccc$
	Logische Rechnung	
0·0342	$\mid EF$	$*cEccF$
0·0343	$\sim E$	$\mid EE$
0·0344	$\supset EF$	$\mid E \sim F$
0·0345	$\vee EF$	$\mid \sim E \sim F$
0·0346	$\wedge EF$	$\sim \mid EF$
0·0347	$\equiv EF$	$\wedge \supset EF \supset FE$
	Mengenausdrücke und Quantifikatorausdrücke	
0·0348	$\Pi EF[M]$	$*E \sim FME \sim F$
0·0349	ΠEF	$*E \sim FEE \sim F$
	Existentialurteilsausdrücke	
0·035	$\exists EF$	$\sim \Pi E \sim F$

Nr.	Abkürzung	Ausdruck	Sprachliche Übersetzung
		Semantik	
0·0351	$\prec EF$	$*cEcFc$	F kommt nach E
0·0352	$(EFGH)$	$*EFGHc$	H ist das Resultat der Substitution von G für F in E
0·0353	$\overset{=}{c}EF$	$(E*ccccc*ccccc F)$	E ist semantisch identisch mit F
0·0354	$\{EF\}$	$\succ(EFEE)\overset{=}{c}EF$	F ist enthalten in E
0·0355	sem H	$\prec H*ccccc$	H ist ein elementarer Urteilsausdruck
		Anwendung der Semantik auf die Logik	
0·0356	Lit E	$\prec *ccccc E$	E ist ein eigentlicher Buchstabe
0·0357	Expr E	$\vee\overset{=}{c}*cfaxpE\vee\prec E*cfaxp$ $\vee\overset{=}{c}*cpccqE\quad\prec E*cpccq$	E ist ein logischer Ausdruck
0·0358	Funct E	$\wedge$ Expr $E\,\exists\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{c}\,\exists\mathfrak{b}$ $\wedge\overset{=}{c}E*\mathfrak{a}c\mathfrak{b}\mathfrak{a}c\sim\{\mathfrak{b}\mathfrak{a}\}$	E ist ein Funktionalausdruck
0·0359	Prop E	$\wedge$ Expr $E\sim$ Funct E	E ist ein Urteilsausdruck
0·036	Typ HE	$\wedge$ Funct $H\,\exists\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{c}\overset{=}{c}H*\mathfrak{a}cE\mathfrak{a}c$	E ist das Typuszeichen von H
0·0361	typ HE	$\wedge$ Expr $H\,\exists\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{c}\,\exists\mathfrak{b}\{H*\mathfrak{c}\mathfrak{a}E\mathfrak{c}\mathfrak{b}\}$	E kommt in H als ein Typuszeichen vor
0·0362	ap HE	$\wedge$ Expr $H\,\exists\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{c}\{H*E\mathfrak{a}cE\mathfrak{a}\}$	E ist in H eine bezeichnete Veränderliche
0·0363	var HE	$\wedge$ Expr $H\wedge$ Lit $E\wedge\{HE\}\wedge\sim$ ap HE $\Pi\mathfrak{e}\succ\{\mathfrak{e}E\}\sim$ typ $H\mathfrak{e}$	E ist in H eine wirkliche Veränderliche
0·0364	arg HEF	$\wedge$ var $HE\,\exists\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{c}\{H*\mathfrak{c}\mathfrak{a}FE\mathfrak{c}\}$	E ist in H ein F-Typus-Argument
0·0365	indet HEF	$\wedge$ var $HE\wedge\sim\exists\mathfrak{g}$ arg $HE\mathfrak{g}$ $\exists\mathfrak{a}\,\exists\mathfrak{c}\{H*cEF\mathfrak{a}c\}$	E ist in H ein zum Typuszeichen F gehörendes unbestimmtes Funktionszeichen
0·0366	prop HE	$\wedge$ var $HE\,\Pi\mathfrak{h}\wedge\sim$ indet $HE\mathfrak{h}$ $\sim$ arg $HE\mathfrak{h}$	E ist in H ein Urteilszeichen
0·0367	prop exp HE	$\exists\mathfrak{i}\,\exists!\wedge$ prop $!\mathfrak{i}\wedge\sim\{!E\}\wedge(!\mathfrak{i}EH)$ Expr E	E ist in H ein Urteilsausdruck
0·0368	Det $EFLMN$	$\wedge$ indet $FLN\wedge$ arg ELM Typ MN	Das in F zum Typuszeichen N gehörende Funktionszeichen L ist mittels M in E bestimmt

Nr.	Abkürzung	Ausdruck	Sprachliche Übersetzung
		Anwendung der Semantik auf die Logik (Fortsetzung)	
0·0369	Cl $EJFM$	$\wedge$ Prop $E \wedge$ arg $EJM\ \exists a \wedge \sim \{Ea\}$ $\wedge$ Lit $a\ \exists b \wedge \overset{\cdot}{=} F \Pi a b [M] (EJab)$	F ist ein zu E gehörender Mengenausdruck in bezug auf das Typuszeichen M und das Argument J
0·037	Gen EJF	$\wedge$ Prop $E \wedge \exists g$ arg $EJg\ \exists a \wedge \sim \{Ea\}$ $\wedge$ Lit $a\ \exists b \wedge \overset{\cdot}{=} F \Pi a b (EJab)$	F ist ein zu E gehörender Quantifikatorausdruck in bezug auf das Argument J
0·0371	compat EF	$\wedge$ Expr $E \wedge$ Expr $F \Pi \iota \supset \wedge$ Lit ι $\wedge \{E\iota\}\{F\iota\} \exists m \exists n \vee \wedge$ typ Em $\wedge$ typ $Fm \{m\iota\} \vee \wedge$ arg $E\iota m$ arg $F\iota m$ $\vee \wedge$ indet $E\iota m$ indet $F\iota m$ $\vee$ Det $EF\iota mn \vee$ Det $FE\iota mn$ $\vee \wedge$ ap $E\iota$ ap $F\iota \wedge$ prop $E\iota$ prop $F\iota$	E ist im Einklang mit F
0·0372	$\mathcal{C}_* EF$	$\wedge$ compat $EF \wedge$ Funct $E \wedge$ Funct F $\Pi e \equiv$ Typ Ee Typ Fe	E hat denselben Typus wie F
0·0373	$\mathcal{C}_c EF$	$\wedge \mathcal{C}_* EF \Pi \xi \wedge \equiv$ prop $E\xi$ prop $F\xi$ $\equiv$ typ $E\xi$ typ $F\xi$	E hat denselben Typus und dieselben Urteils- und Typuszeichen wie F
0·0374	$\mathcal{C} EF$	$\wedge \mathcal{C}_c EF \Pi \xi \Pi \eta \equiv$ indet $E\xi\eta$ indet $F\xi\eta$	E hat denselben Grad wie F
0·0375	T GEF	$\vee \mathcal{C} EF \wedge \mathcal{C}_c EF \wedge \Pi \xi \Pi \eta \supset$ indet $F\xi\eta$ $\vee$ indet $E\xi\eta \exists \zeta \wedge$ Det $GF\xi\zeta\eta$ $\vee \overset{\cdot}{=}_\zeta E$ typ $E\zeta \vee \exists \zeta \exists \eta$ Det $GF\zeta E\eta$ $\Pi \xi \Pi \eta \supset$ indet $E\xi\eta$ indet $F\xi\eta$	E hat in bezug auf G denselben Grad wie F
0·0376	conform EF	$\wedge$ Expr $E \wedge$ Expr $F \Pi \eta \equiv \exists \mathfrak{h}$ indet $E\eta\mathfrak{h}$ $\exists \mathfrak{h}$ indet $F\eta\mathfrak{h}$	E, F sind in demselben Sinne unbestimmt
0·0377	D (indet) GH	$\wedge$ Prop $G \exists \xi \exists \eta \exists \zeta \wedge$ compat $G\eta$ $\wedge$ indet $G\xi\zeta \wedge$ Typ $\eta\zeta (G\xi\eta H)$	H ist die Ableitung von G in bezug auf ein unbestimmtes Funktionszeichen
0·0378	D $(\text{arg})_* GH$	$\wedge$ Prop $G \exists \xi \exists \eta \wedge$ compat $G\eta$ $\wedge \exists \zeta \wedge$ arg $G\xi\zeta\ \mathcal{C}_* \eta\zeta (G\xi\eta H)$	H ist die Ableitung von G in bezug auf ein Argument im Sinne der vereinfachten Typuslehre
0·0379	D (arg) GH	$\wedge$ Prop $G \exists \xi \exists \eta \wedge$ compat $G\eta$ $\wedge \exists \zeta \wedge$ arg $G\xi\zeta$ T $G\zeta\eta (G\xi\eta H)$	H ist die Ableitung von G in bezug auf ein Argument im Sinne der reinen Typenlehre
0·038	D (prop) GH	$\wedge$ Prop $G \exists \xi \exists \eta \wedge$ compat $G\eta$ $\wedge$ Prop $\eta \wedge$ prop $G\xi (G\xi\eta H)$	H ist die Ableitung von G in bezug auf ein Urteilszeichen

Nr.	Abkürzung	Ausdruck	Sprachliche Übersetzung
		Anwendung der Semantik auf die Logik (Fortsetzung)	
0381	D (lit) GH	$\wedge$ Prop $G\,\exists\mathfrak{x}\,\exists\mathfrak{y}\,\exists\mathfrak{z}\wedge(G\mathfrak{x}\mathfrak{y}H)$ $\vee\wedge$ indet $G\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ indet $G\mathfrak{y}\mathfrak{z}\vee\wedge$ arg $G\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ arg $G\mathfrak{y}\mathfrak{z}\vee$ arg $G\mathfrak{x}\mathfrak{y}\vee\wedge$ prop $G\mathfrak{x}$ prop $G\mathfrak{y}$ $\wedge$ Lit $\mathfrak{y}\wedge$ Lit $\mathfrak{x}\sim\{G\mathfrak{y}\}$	H ist die Ableitung von G in bezug auf die Substitution eines eigentlichen Buchstaben
0382	D (typ) GH	$\wedge$ Prop $G\,\exists\mathfrak{x}\,\exists\mathfrak{y}\wedge$ typ $G\mathfrak{x}\wedge$ Lit $\mathfrak{x}$ $\wedge\sqcap\mathfrak{z}\,|\,\{\mathfrak{y}\mathfrak{z}\}\,\{G\mathfrak{z}\}\wedge$ Funct $\mathfrak{y}\,(G\mathfrak{x}\mathfrak{y}H)$	H ist die Ableitung von G in bezug auf ein Typuszeichen
0383	D (transf) GH	$\wedge$ Prop $H\,\exists\mathfrak{m}\,\exists\mathfrak{n}\,\exists\mathfrak{x}\,\exists\mathfrak{y}\,\exists\mathfrak{z}\wedge$ Cl $\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{n}\mathfrak{m}\wedge$ prop exp $G{*}c\mathfrak{y}cc\mathfrak{z}\,(G{*}c\mathfrak{y}cc\mathfrak{z}{*}cn\mathfrak{m}\mathfrak{x}\mathfrak{z}H)$	H ist die Ableitung von G in bezug auf die Transformation eines Mengenausdrucks
0384	D (gen) GH	$\exists\mathfrak{i}\,\exists\mathfrak{k}\,\exists\mathfrak{l}\,\exists\mathfrak{m}\,\exists\mathfrak{n}\wedge$ Gen $\mathfrak{l}\mathfrak{i}\mathfrak{k}$ $\wedge\sim\{\mathfrak{m}\mathfrak{i}\}\wedge$ Expr $|\,\mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{m}\,|\,\mathfrak{l}\mathfrak{n}\wedge$ $\overset{=}{c}G\,\|\supset\mathfrak{m}\mathfrak{l}\,|\,\mathfrak{n}\mathfrak{l}\,|\,\mathfrak{n}\mathfrak{l}\overset{=}{c}H\,\|\supset\mathfrak{m}\mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{n}\mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{n}\mathfrak{l}$	H ist die Ableitung von G in bezug auf die Verallgemeinerung
		Reine Typenlehre	
0385	D GH	$\vee$ D (indet) $GH\vee$ D (arg) GH $\vee$ D (prop) $GH\vee$ D (typ) GH $\vee$ D (lit) $GH\vee$ D (transf) GH $\vee$ D (transf) HG D (gen) GH	H ist die Ableitung von G
		Vereinfachte Typenlehre	
03851	D GH	$\vee$ D (indet) $GH\vee$ D $(\text{arg})_*$ GH $\vee$ D (prop) $GH\vee$ D (typ) GH $\vee$ D (lit) $GH\vee$ D (transf) GH $\vee$ D (transf) HG D (gen) GH	H ist die Ableitung von G

B. Elementare Verfahrungsregeln.

Modus ponens.

0·11. Ist es der Fall, daß $\models E$ und $\models|E|GH$, so ist es der Fall, daß $\models H$.

Substitution.

0·121. *Substitution für einen semantischen Buchstaben.*

Ist es der Fall, daß $\models G$ und ist E ein semantischer Buchstabe, ist weiter F ein eigentlicher Ausdruck und ist H das Resultat der Substitution von F für E in G, so ist es der Fall, daß $\models H$.

0·122. *Substitution für einen elementaren Buchstaben.*

0·1221. Ist es der Fall, daß $\models G$ und sind E, F elementare Buchstaben, ist weiter H das Resultat der Substitution von F für E in G, so ist es der Fall, daß $\models H$.

0·1222. Ist es der Fall, daß $\models G$ und $\models \operatorname{sem} F$ und ist E ein elementarer Buchstabe, ist weiter H das Resultat der Substitution von F für E in G, so ist es der Fall, daß $\models H$.

0·1223. Ist es der Fall, daß $\models G$ und $\models \operatorname{sem} M$, ist E ein elementarer Buchstabe, K ein semantischer Buchstabe, J eine scheinbare Veränderliche, welche in M nicht enthalten ist, ist weiter N das Resultat der Substitution von J für K in M, und ist H das Resultat der Substitution von $\Pi F N$ für E in G, so ist es der Fall, daß $\models H$.

0·123. Verallgemeinerung.

Ist es der Fall, daß $\models \| > MG | NG | NG$ und $\models \operatorname{sem} \Pi F H$, wobei H das Resultat der Substitution von F für E in G ist, E aber ein semantischer Buchstabe ist, welcher in M nicht enthalten ist, so ist es der Fall, daß $\models \| > M \Pi J H | N \Pi F H | NG$.

C. Logische Verfahrungsregeln.

0·21. Modus ponens.

Ist es der Fall, daß $\vdash E$, $\vdash | E | GH$ und $\models \operatorname{conform} | EGH$, so ist es der Fall, daß $\vdash H$.

0·22. Substitution.

Ist es der Fall, daß $\vdash E$ und $\models \mathrm{D} EF$, so ist es der Fall, daß $\vdash F$.

D. Semantische Axiome.

0·3. Das Axiom von Nicod.

$$\models \| \mathfrak{p} | \mathfrak{q}\mathfrak{r} | > \mathfrak{t}\mathfrak{t} > | \mathfrak{r}\mathfrak{q} | \mathfrak{p}\mathfrak{r}$$

0·4. Ordnungsaxiome.

0·41. $\models \prec \lambda , \lambda$

0·42. $\models \prec \lambda . \lambda$

0·43. $\models > \prec \lambda \mu \prec , \lambda , \mu$

0·44. $\models > \prec \lambda \mu \prec . \lambda . \mu$

0·45. $\models > \wedge \prec \lambda \mu \prec \mu \nu \prec \lambda \nu$

0·46. $\models > \operatorname{Lit} \lambda > \prec \lambda \mu \sim \prec \mu \lambda$

0·47. $\models > \prec \lambda . \mu \prec , \lambda . \mu$

0·5. Semantische Urteilsausdrücke.

·51. $\models \mathrm{sem}\ \mathfrak{p}$

·52. $\models \mathrm{sem} * c\mathfrak{p}\,c\,c\,\mathfrak{q}$

·53. $\models \mathrm{sem} * \lambda\xi\eta\mu c$

·54. $\models \mathrm{sem} * c\lambda c\mu c$

0·6. Logische Ausdrücke.

·61. $\models \supset \wedge \mathrm{Expr}\ \lambda D\lambda\mu\ \mathrm{Expr}\ \mu$

·62. $\models \supset \vee \mathrm{Cl}\ \lambda\mu\nu\varrho\ \mathrm{Gen}\ \lambda\mu\nu\ \mathrm{Expr}\ \nu$

·63. $\models \supset \wedge \mathrm{Lit}\lambda\ \mathrm{Expr}\ \mu \sim \overline{=}_c \lambda\mu$

0·7. Semantische Identität.

·71. $\models \supset \wedge \overline{=}_c \lambda\mu \prec \lambda\nu \prec \mu\nu$

·711. $\models \supset \wedge \overline{=}_c \lambda\mu \prec \nu\lambda \prec \nu\mu$

·712. $\models \supset \wedge \overline{=}_c \lambda\mu(\lambda\xi\eta\nu)(\mu\xi\eta\nu)$

·713. $\models \supset \wedge \overline{=}_c \lambda\mu(\zeta\lambda\eta\nu)(\zeta\mu\eta\nu)$

·714. $\models \supset \wedge \overline{=}_c \lambda\mu(\zeta\xi\eta\lambda)(\zeta\xi\eta\mu)$

·715. $\models \supset \wedge \overline{=}_c \lambda\mu(\zeta\xi\lambda\nu)(\zeta\xi\mu\nu)$

·72. $\models \sim \overline{=}_c * c\lambda cc\mu * c\xi\eta\zeta\nu$

·721. $\models \sim \overline{=}_c * c\xi\eta\zeta\nu * \lambda\mu\theta\lambda\mu$

·722. $\models \sim \overline{=}_c * \lambda\mu\theta\lambda\mu * c\xi cc\eta$

·73. $\models \supset \wedge (\lambda\xi\eta\mu)(\lambda\xi\eta\nu) \overline{=}_c \mu\nu$

·731. $\models \supset \wedge \{\lambda\xi\} \wedge (\lambda\xi\eta\mu)(\lambda\xi\zeta\mu) \overline{=}_c \eta\zeta$

·732. $\models \supset \wedge (\lambda\xi\eta\mu)(\lambda\zeta\eta\mu) \vee \overline{=}_c \xi\zeta \overline{=}_c \lambda\mu$

0·8. Substitution.

·81. $\models (\lambda\xi\xi\lambda)$

·82. $\models (\lambda\lambda\eta\eta)$

·83. $\models \equiv (* c\lambda cc\mu\xi\eta * clccm) \wedge (\lambda\xi\eta l)(\mu\xi\eta m)$

·84. $\models \equiv (* c\lambda\theta\zeta\mu\xi\eta * cldhm) \wedge (\lambda\xi\eta l) \wedge (\theta\xi\eta d) \wedge (\zeta\xi\eta h)(\mu\xi\eta m)$

·85. $\models \equiv (*\zeta\lambda\theta\zeta\lambda\xi\eta * hldhl) \wedge (\zeta\xi\eta h) \wedge (\lambda\xi\eta l)(\theta\xi\eta d)$

0·9. Subsumption.

·91. $\models \supset (\lambda\nu\lambda\lambda) \vee (\mu\nu\mu\mu)(\lambda\mu\lambda\lambda)$

·92. $\models \supset \sim \overline{=}_c \xi\nu \equiv \{\lambda\nu\} \sim (\lambda\nu\xi\lambda)$

·93. $\models \supset \wedge \mathrm{Lit}\ \lambda \sim \overline{=}_c \xi\lambda(\lambda\xi\eta\lambda)$

E. Das eigentliche Axiom.

1. $\vdash \| p | qr | \supset tt \supset | sq | ps$

III. Schlußbemerkungen.

1. Vereinfachte und reine Typenlehre.

Das gemeinsame Verhältnis der beiden Typenlehren wurde hier durch die Einführung des Ausdrucks $\mathcal{C}_* EF$ klargestellt. Benutzen wir diesen Ausdruck in $\mathrm{D}(\mathrm{arg})GH$ statt $\mathcal{C}EF$, so haben wir eben mit der vereinfachten Typenlehre zu tun. Es ist daraus leicht zu ersehen, daß dadurch kaum eine nennenswerte Vereinfachung der Ausdrücke erreicht werden kann. Infolgedessen wäre es eine zwecklose Arbeit, etwa ein auf der vereinfachten Typenlehre basiertes System der Logik und Mathematik zu konstruieren. Will man aber die Typenlehre in einer intuitiv gefaßten Arbeit anwenden, so ist es ratsam, die vereinfachte Typenlehre zu benutzen. Nebenbei sei bemerkt, daß die intuitive Mathematik auch ohne irgendeine Berücksichtigung der Typenidee getrieben werden kann, wobei aber gewisse wichtige Probleme wegfallen müssen.

2. Das logische Alphabet.

Möchten wir von allen Abkürzungen absehen, so wäre es leicht zu sehen, daß die eigentlichen Ausdrücke der Logik und Mathematik mittels des fundamentalen Buchstabens c und des Zeichens $*$ konstruiert sind. Wir haben es hier also mit einem Analogon des Morse-Alphabets zu tun. — Was die Länge dieser Ausdrücke anbelangt, so ist zu bemerken, daß die Einführung eines neuen Buchstabens mittels des Symbols $.E$ die Zeichenzahl von E um vier vermehrt, woraus zu ersehen ist, daß unsere Ausdrücke recht weitschweifig sein müssen, es ist aber nicht zu befürchten, daß man da etwa mit astronomischen Längen zu tun hätte. Was die verschiedenen Arten von eigentlichen Buchstaben anbelangt, so haben sie wohlverstanden mit dem System als solchem nichts zu tun. Ich habe sie nur deswegen eingeführt, um der Konstruktion so viel Klarheit wie möglich zu geben. — Ob die Zahl der angegebenen elementaren und semantischen Buchstaben genügend sei, könnte bezweifelt werden. Hier haben wir ja keine Mittel, neue Buchstaben automatisch einzuführen. — Die bisherige Praxis hat gezeigt, daß in diesem Falle eine beschränkte Anzahl von Zeichen genügend sei. Eventuell könnte man die von mir angegebenen Tafeln erheblich vermehren. Möchte man daran denken, so viele semantische bzw. elementare Buchstaben, wie man will, einführen zu können, so wären etwa folgende Regeln anzunehmen: Ist E ein semantischer Buchstabe, so ist es auch $!E$. Ist E ein elementarer Buchstabe, so ist es auch $!E$. Dabei wäre aber zu bedenken, daß $!E$ keineswegs als ein Ausdruck betrachtet werden dürfte, der E enthält, vielmehr als ein

loßer Buchstabe. Die Einführung solcher Regeln wäre eine wesentliche Komplikation des Systems und auch vom ästhetischen Standpunkte aus wenig erwünscht; so habe ich von ihr abgesehen.

3. Die semantischen Axiome.

Die Anzahl von semantischen Axiomen ist auffallend groß. Nichtsdestoweniger kann von einer weiteren Reduktion kaum gesprochen werden. Es ist z. B. zu bemerken, daß wegen Mangel an Urteilsfunktionen von Ausdrücken von der Benutzung des Leibnizschen Identitätsbegriffs keine Rede sein konnte, wodurch die Axiome der Identität bis zur Anzahl 12 angewachsen sind. Das Axiom von Nicod kommt einmal unter den semantischen Axiomen, das andere Mal aber als das eigentliche Axiom der Logik und Mathematik vor. Herr Greniewski hat daran gedacht, diese Dualität mittels einer Direktive wegzuschaffen; es hat sich aber gezeigt, daß eine solche Direktive von *allen* semantischen bzw. elementaren Buchstaben sprechen dürfte, welche in einem Ausdruck vorkommen, was in sonstigen Direktiven des Systems keineswegs der Fall ist. Deswegen schien es mir ratsam, von einer solchen Direktive abzusehen.

4. Das System der Logik und Mathematik.

Aus der Konstruktion unseres Systems ist zu ersehen, daß die einzige Schwierigkeit, mit welcher wir in Logik und Mathematik zu tun haben, das Problem der Semantik ist. Es handelt sich einfach darum, eine Menge von semantischen Sätzen von der Form $|= D\,EG$ bzw. $|=$ conform EF zu konstruieren. — Dazu brauchen wir aber weder die reine noch die vereinfachte Typenlehre zu kennen. Alles, was wir brauchen, ist

1. die intuitive Beherrschung des Modus ponens,

2. die Kunst, zwei Ausdrücke voneinander zu unterscheiden, die An- bzw. Abwesenheit eines Buchstabens in einem Ausdrucke zu konstatieren, endlich einen in dem gegebenen Ausdruck vorkommenden Buchstaben durch einen beliebigen Ausdruck zu ersetzen.

Wir können also wohl von einer logischen Maschine sprechen. Ob sie schon wirklich vollkommen fertig dasteht, habe ich keinen Mut zu behaupten. Die langjährige Praxis hat mich genügend belehrt, daß in diesen Sachen immer etwas zu verbessern sei, abgesehen davon, daß ein geringes Versehen ungeheuere Konsequenzen nach sich zieht. — Das eine ist sicher, *daß man hier nicht mehr von einer wesentlichen Schwierigkeit sprechen darf, daß also das Problem der Mechanisierung der apriorischen Wissenschaften im wesentlichen gelöst ist.*

(Eingegangen am 25. April 1928.)

Nachträge.

Bemerkungen und Zusätze zur Einleitung.

Zu Nr. 1, 3. Absatz: In dem System ist nicht der Ausdruck $f_a\{x\}$ unmittelbar eingeführt worden, sondern der Ausdruck $*cfaxq$ wegen der formalen Analogie mit $*cpccq$. Wenn man auf solche Analogien verzichtet, kann man auch mit vier Buchstaben ohne eine Komplikation des Systems auskommen. Die Verwendung von weniger als vier Buchstaben würde eine wesentliche Komplizierung bedingen.

Die hier angegebenen Äquivalenzen sind als Interpretation der Ausdrücke des neuen Systems im alten anzusehen. Die in 3) und 4) auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke sind aus $*xExxE$ bzw. aus $*cFayq$ durch Substitution von $*xEaxE$ für F und von $*cfaxq$ für E entstanden.

Die Elimination der Funktionen von zwei Veränderlichen geht auf Kuratowski zurück[8]). Die hierbei auftretenden Schwierigkeiten können leicht vermieden werden, indem man x durch die Menge ersetzt, deren einziges Element x ist.

Zu Nr. 3, 1. Absatz: Im Text ist nicht an die herkömmliche, sondern an eine auf die Semantik gegründete Mengenlehre gedacht. Eine solche Mengenlehre erweist sich als fruchtbar; sie gestattet z. B. die Gewinnung einer neuen allgemeinen Integrationsmethode. Eine diesbezügliche Arbeit dürfte bald erscheinen. Die neue Mengenlehre muß selbstverständlich mit der Richardschen Antinomie rechnen, von welcher die herkömmliche Mengenlehre, als Teil der Mathematik, absehen kann.

Zu Nr. 4, 1. Absatz: Im Bereiche des Systems haben wir es bloß mit Ausdrücken zu tun. Das schließt aber nicht die Möglichkeit aus, gewisse Beziehungen zwischen Ausdrücken als Beziehungen zwischen den von den Ausdrücken bezeichneten Urteilen zu interpretieren. Wenn also unser Verfahren streng nominalistisch ist, so schließt es keineswegs eine realistische Interpretation aus. Wir können sogar von den „nicht konstruierbaren" Gegenständen sprechen, indem wir Ausdrücke einführen, welche mittels der gegebenen Semantik nicht konstruierbar sind. —

Entsprechend hat in Absatz 5 (Interpretation) in Satz 1: „Gilt p, so gilt p" bei streng nominalistischer Deutung das Wort „gelten" den vondem üblichen abweichenden Sinn, daß p ein wahres Urteil bedeutet (und nicht etwa ist).

Zu Nr. 4, letzter Absatz: Dem logischen Problem der Widerspruchsfreiheit entspricht das semantische Problem der Eindeutigkeit, dessen Behandlung demnach vorausgehen muß. Dieses Problem ist in bezug auf den Aussagenkalkül von Herrn Skarżeński gestellt und gelöst worden.

---

[8]) Sur la notion de l'ordre, Fundamenta Math. 2 (1921).

Bemerkungen zum System.

Zu 0·0303 und ff.: Die „eigentlichen Buchstaben" sind Ausdrücke nd keine Buchstaben im Sinne von 0·01. — Es ist zu bemerken, daß der tuitive Begriff des Enthaltenseins, nach dem z. B. der Ausdruck a in em Ausdruck b enthalten ist, durch 0·93 derart beschränkt ist, daß von wei verschiedenen eigentlichen Buchstaben nicht der eine in dem anderen nthalten sein kann.

Zu 0·123: Die Regel der Verallgemeinerung kann intuitiver gefaßt erden, indem man statt $\| \supset MG | NG | NG$ bzw. $\| \supset M\Pi FH | N\Pi FH | NG$ ie Ausdrücke: $\wedge \supset MG \supset GN$ bzw. $\wedge \supset M\Pi FH \supset \Pi FHN$ benützt. Anages gilt für die Abkürzung 0·0384.

Zusätze zu den Schlußbemerkungen.

Das hier angegebene System der Semantik ist keineswegs vollständig. s erlaubt mit gegebenen Ausdrücken von der Form $*cEccF$, $*cEFGH$, $EFGEF$ zu arbeiten, wo E, F, G, H von c verschieden sind, keineswegs ber über beliebige eigentliche Ausdrücke zu sprechen. Um ein vollständiges ystem der Semantik zu erhalten, ist der Begriff der Menge von Ausdrücken ötig; wir müssen sie also als Individuen eines gegebenen Typus, etwa it dem Typuszeichen $*ccccc$, behandeln und noch hinzufügen, daß die emantischen Ausdrücke $\prec EF$, $(EFGH)$ Werte von Funktionen solcher ndividuen sind. Dann erweist sich die reine Typenlehre als durchaus notendig, da sonst die Richardsche Antinomie sofort auftritt. Ein vollständiges System der Semantik erlaubt uns offenbar *rationale Metamathematik u treiben.* Da nun die intuitive Metamathematik heutzutage mit großem rfolge, insbesondere von der Hilbertschen Schule, getrieben wird und bald u einer selbständigen Wissenschaft werden dürfte, so ist für die reine ypenlehre eine wichtige methodologische Rolle in der Zukunft zu erwarten. s sei noch bemerkt, daß die *Grade* von Eigenschaften an und für sich nteressant sind, da man es bei Eigenschaften eines Systems sicher mit igenschaften höheren *Grades* zu tun hat als jene, welche in dem System orkommen.

Mit der Einführung der Urteilsfunktionen von Ausdrücken wird die us 0·4 folgende Tatsache beweisbar, daß es unendlich viele Ausdrücke bt. Ferner tritt hiermit in der Semantik das außerordentlich interessante roblem auf, *ob vollständige Induktion mit nicht-archimedischer Ordnung rträglich ist oder nicht.*

Die vereinfachte (bzw. einfache) Typenlehre ist von mir schon im ahre 1921 angegeben[9]) und dann in der Arbeit „Über die Antinomien

[9]) Przeglad filozoficzny **24** (1921), S. 168.

der Prinzipien der Mathematik“[10]) im Jahre 1922 eingeführt worden. In meiner Arbeit „Über die Hypothesen der Mengenlehre“[11]) tritt sie als Arbeitshypothese auf. Inzwischen ist sie von manchen Autoren behandelt, so z. B. von F. P. Ramsey[12]), der auch die Arbeit „Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik“ zitiert, aber aus einem anderen Grunde.

Ich möchte zum Schluß noch Herrn Dr. Härlen für seine wertvolle Mitwirkung bei der Durchsicht des Manuskripts danken. —

---

[10]) loc. cit.

[11]) Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 439, eingegangen am 5. Mai 1925.

[12]) The foundations of Mathematics [Proceedings of the London Mathem. Soc. Ser. 2, 25 (1925)], eingegangen am 23. August 1925.

(Eingegangen am 4. März 1929.)

e Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Inhalt.

		Seite
Einleitung		725
I. Teil.	Die allgemeine E-Transformation	729
§ 1.	Die allgemeine E-Transformation erster Art	729
§ 2.	Die allgemeine E-Transformation zweiter Art	732
§ 3.	Anwendung auf die Taylor-Transformation	734
II. Teil.	Funktionentheoretische Anwendungen	735
§ 4.	Vorbemerkungen	735
§ 5.	Die Transformation $E(z,y)=[z_0+(z-z_0)y]y^k$	736
§ 6.	Der Hadamardsche Lückensatz und der Satz von Vivanti-Borel-Dienes	740
III. Teil.	Bemerkungen zum Fabryschen Lückensatz	742
§ 7.	Eine Bemerkung zum Beweis des Fabryschen Lückensatzes	742
§ 8.	Eine Verschärfung des Fabryschen Lückensatzes und des Satzes von Vivanti-Borel-Dienes	750
§ 9.	Eine Verallgemeinerung der Singularitätensätze	751

Einleitung.

Die klassische Eulersche Reihentransformation[1]) wurde schon 1898 on Herrn E. Lindelöf[2]) und neuerdings von den Herren O. Perron[3]) und

[1]) Vgl. über ihre Eigenschaften etwa: A. Pringsheim, Über einige funktionen-heoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation, Sitzungsber. der ayr. Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse 1912, S. 11—92. — K. Knopp, ber das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Zeitschrift **15** (1922), S. 226—253 nd **18** (1923), S. 125—156.

[2]) E. Lindelöf, Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions nalytiques, Acta societatis scientiarum Fennicae **24** (1898), Nr. 7, S. 1—37.

[3]) O. Perron, Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation, ath. Zeitschrift **18** (1923), S. 155—172.

K. Knopp[4]) zum Zwecke der Behandlung von Fragen der analytischen Fortsetzung eines Funktionselements

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

verallgemeinert. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß man statt der speziellen Funktion $\frac{y}{2-y}$ eine allgemeine Funktion

$$x = E(y) = \gamma_0 + \gamma_1 y + \ldots + \gamma_n y^n + \ldots$$

nimmt, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ regulär ist und sein Inneres auf einen Stern[5]) um $x = 0$, der die positiv reelle Strecke $0 < x < 1$ in seinem Innern enthält, während der Punkt $+1$ auf seinem Rand liegt, eineindeutig und so abbildet, daß dabei $y = +1$ in $x = +1$ übergeht. Mit dieser Funktion bildet man die Reihe

$$f[z \cdot E(y)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [z \cdot E(y)]^n,$$

ordnet sie nach Potenzen von y und setzt dann $y = 1$. Die so entstehende nach analytischen Funktionen von z fortschreitende Reihe

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)$$

stellt in einem leicht angebbaren Bereich die analytische Fortsetzung von $f(z)$ dar.

Durch Verwendung geeigneter Funktionen $E(y)$ gewinnt man auf diesem Weg sehr einfach die bekannten Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern[6]). Dagegen kann man nicht die analytische Fortsetzung von $f(z)$ durch unmittelbare Aneinanderreihung von Funktionselementen — sie soll künftig kurz „*Taylor-Transformation*“ genannt werden — erhalten. Will man auch sie erfassen, so muß man die Euler-Transformation noch weiter verallgemeinern[7]). Das geschieht in der Weise, daß man in $f(z)$

---

[4]) K. Knopp, Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation, Acta mathematica **47** (1926), S. 313—335.

[5]) Zur Definition des „*Sterns*“ vgl. etwa: L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **2** (1927), S. 292.

[6]) Vgl. K. Knopp, loc. cit. [4]) und O. Perron, Über elementare Methoden der analytischen Fortsetzung, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **36** (1927), S. 121—126.

[7]) Herr Perron geht in seiner unter [6]) zitierten Arbeit von der Taylor-Transformation aus und kommt durch ihre Verallgemeinerung zu denselben Entwicklungen wie wir, doch wird der Konvergenzbereich im allgemeinen Fall nicht angegeben.

für z eine allgemeine Funktion

$$x = E(z, y) = \gamma_0(z) + \gamma_1(z)\, y + \ldots + \gamma_n(z)\, y^n + \ldots$$

der beiden Variablen z und y einführt, die nur gewissen später zu nennenden Voraussetzungen genügt. Die so entstehende Reihe

$$f[E(z, y)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [E(z, y)]^n$$

ordnet man nach Potenzen von y und erhält, nachdem man wie früher wieder $y = 1$ gesetzt hat, eine nach Funktionen von z fortschreitende Reihe:

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z),$$

die unter Umständen auf einer gewissen Punktmenge die analytische Fortsetzung von $f(z)$ liefert. Die Reihe (II) soll im Gegensatz zu der *„speziellen E-Transformation"* (I) eine *„allgemeine E-Transformation"* von $f(z)$ heißen.

Die eben angegebene allgemeine E-Transformation wird im 1. Teil dieser Arbeit untersucht. In § 1 werden zunächst für $E(z, y)$ Bedingungen angegeben, die die genaue Feststellung des Konvergenzgebiets von $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$ gestatten; sodann wird der Hauptsatz über das Konvergenzgebiet bewiesen. Für die Anwendungen genügt es meistens, eine Punktmenge zu kennen, auf der die transformierte Reihe gewiß konvergiert, während das genaue Konvergenzgebiet nicht bekannt sein muß. Wie in § 2 gezeigt wird, braucht man dazu über $E(z, y)$ viel weniger vorauszusetzen, als in § 1 geschehen ist. Zum Abschluß des 1. Teils wird in § 3 gezeigt, wie sich die Taylor-Transformation der allgemeinen E-Transformation unterordnet.

Die beiden folgenden Teile befassen sich mit den funktionentheoretischen Anwendungen der E-Transformation[8]). Nach einigen methodischen Vorbemerkungen in § 4 wird in § 5 diejenige allgemeine E-Transformation untersucht, die zu der Funktion

$$\text{(1)} \qquad E(z, y) = [z_0 + (z - z_0)\, y]\, y^k$$

(k, z_0 fest, $0 < |z_0| < 1$, k ganz u. positiv)

gehört. Die Ergebnisse des § 5 werden in § 6 dazu verwendet, den Hadamardschen Lückensatz und den Satz von Vivanti-Borel-Dienes wohl in der schärfsten Fassung[9]), die sich in der Literatur, nämlich bei Herrn

[8]) Vgl. dazu auch: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. II 3, Heft 4 (1921), S. 462—463.

[9]) Siehe unten § 6, S. 740.

Kößler[10]) findet, zu beweisen. Die unten angegebenen Beweise unterscheiden sich von denen des Herrn Kößler darin, daß Herr Kößler nicht die zu der Funktion (1), sondern in unserer Bezeichnungsweise, die zu der Funktion

$$E(z, y) = [z_0 + (z - z_0)\, y]\, y \qquad (z_0 \text{ fest}, \ 0 < |z_0| < 1) \tag{2}$$

gehörige E-Transformation des Elements $f(z)$ benützt. Der Vorteil, den man bei Verwendung der Funktion (1) gegenüber (2) hat, besteht darin, daß man die beiden genannten Sätze aus der durch (1) vermittelten E-Transformation (II) unmittelbar ablesen kann, während man bei Benützung der Funktion (2) erst noch mit Hilfe eines Satzes von Pringsheim[11]) von (II) zu einer neuen Reihe übergehen muß[12]). Das hat seinen Grund darin, daß die Glieder $F_n(z)$ von (II) bei Verwendung der Funktion (2) Linearformen von $\left[\frac{n}{2}\right]$ aufeinanderfolgenden Koeffizienten a_ν des Elements $f(z)$ werden, während man bei Verwendung von (1) durch hinreichend große Wahl von k erreichen kann, daß $F_n(z)$ eine Linearform von nur ϑn aufeinanderfolgenden Koeffizienten a_ν wird, wie klein man auch $\vartheta > 0$ vorgibt.

Die Ergebnisse des 3. Teils sind vorwiegend negativer Art. Herr Perron bemerkt in seiner unter [6]) zitierten Arbeit, daß er die Resultate des Herrn Kößler noch mit einigen anderen Ansätzen, z. B. (in unserer Bezeichnungsweise)

$$E(z, y) = z\, y\, e^{y-1}$$

gewinnen konnte und schließt dann[13]): „Jedoch konnte ich noch keinen Ansatz finden, der ohne Hinzunahme wesentlich anderer Überlegungen auch den tiefer liegenden Fabryschen Lückensatz liefern würde." In § 7 soll nun gezeigt werden, daß und warum man keinen solchen Ansatz finden kann. Ließe sich nämlich der Fabrysche Lückensatz allein durch eine E-Transformation beweisen, so erhielte man zwangläufig eine Verschärfung desselben und diese Verschärfung ist falsch, wie man an einem Beispiel zeigen kann. Das Beispiel zeigt sogar genauer, daß der Hadamardsche Lückensatz in gewisser Hinsicht das schärfste ist, was man in dieser Richtung allein durch eine E-Transformation bekommen kann. Die Hilfsmittel, die zur Konstruktion dieses Beispiels herangezogen werden, werden in § 8 dazu verwendet, Verschärfungen des Fabryschen Lückensatzes und des Satzes von Vivanti-Borel-Dienes zu beweisen. Endlich bringt § 9 anhangs-

[10]) M. Kößler, Sur les singularités des séries entières, Reale Accademia nazionale dei Lincei (5) **32**$_1$ (1923), S. 26, 83 und 528. — Sur les singularités des séries entières, situées sur le cercle de convergence, Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême 1923.

[11]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 80.

[12]) Vgl. dazu die ausführliche Darstellung in § 7.

[13]) Vgl. loc. cit. [6]), S. 126 Schluß.

weise noch eine Verallgemeinerung der Kriterien für singuläre Punkte an der Konvergenzgrenze von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf den Fall, daß die an die Koeffizienten a_n gestellten Forderungen nur für eine unendliche Teilfolge derselben erfüllt sind, deren Indizes eine arithmetische Progression bilden.

I. Teil.

Die allgemeine E-Transformation.

§ 1.

Die allgemeine E-Transformation erster Art.

Vorgelegt sei ein Funktionselement

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{1}$$

von endlichem Konvergenzradius r. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, daß $r = 1$, also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \tag{2}$$

sei. Dieses Element unterwerfen wir einer allgemeinen E-Transformation, d. h. wir führen in (1) für z eine Funktion $E(z, y)$ der beiden Variablen z und y ein, ordnen die entstehende Reihe nach Potenzen von y und setzen dann $y = 1$, so daß wir zum Schluß eine nach Funktionen von z fortschreitende Reihe erhalten. Die dabei zur Verwendung kommende Funktion

$$x = E(z, y) \tag{3}$$

soll folgenden Voraussetzungen genügen:

Voraussetzungen über $E(z, y)$. 1. *Bei beliebigem, aber festem z ist $x = E(z, y)$ als eine im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ analytische Funktion von y definiert, die das Innere desselben eineindeutig auf ein Gebiet $\mathfrak{G}(z)$* [14]) *abbildet. Man kann also für jedes z die Funktion $x = E(z, y)$ in eine im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ konvergente Potenzreihe*

$$x = E(z, y) = \gamma_0(z) + \gamma_1(z)\, y + \ldots + \gamma_n(z)\, y^n + \ldots \tag{4}$$

entwickeln.

2. *Es gibt einen Punkt z^* derart, daß das durch $x = E(z^*, y)$ vermittelte Bild $\mathfrak{G}(z^*)$ von $|y| < 1$ samt seinem Rand im Innern des Einheitskreises liegt* [15]).

---

[14]) Gebiete denken wir uns immer offen, wenn sie nicht ausdrücklich als abgeschlossen bezeichnet werden.

[15]) Insbesondere darf $\mathfrak{G}(z^*)$ in einen Punkt im Innern des Einheitskreises ausarten. Nach Voraussetzung 4 muß dieser Punkt dann z^* sein.

3. *Rückt z von z^* aus längs eines Halbstrahls* $\arc(z-z^*)=\varphi=$ konst *fort, so sind die zu diesen z gehörigen Gebiete $\mathfrak{G}(z)$ ineinandergeschachtelt und zwar so, daß das Gebiet $\mathfrak{G}(z')$ samt seinem Rand im Innern von $\mathfrak{G}(z'')$ liegt, falls $|z'-z^*|<|z''-z^*|$ ist.*

4. *Es ist identisch in z: $E(z,1)=z$.*

Wir bemerken zunächst, daß es nur *einen* Punkt z^* geben kann, der den Voraussetzungen 2. und 3. genügt. Gäbe es nämlich zwei solche Punkte z_1^* und z_2^*, so verbinde man dieselben geradlinig. Läßt man dann z auf dieser Verbindungslinie einmal von z_1^* nach z_2^*, dann von z_2^* nach z_1^* rücken, so erkennt man, daß nach Voraussetzung 3 sowohl $\mathfrak{G}(z_1^*)$ samt seinem Rand im Innern von $\mathfrak{G}(z_2^*)$ als auch $\mathfrak{G}(z_2^*)$ samt seinem Rand im Innern von $\mathfrak{G}(z_1^*)$ liegen müßte, was nicht zugleich sein kann.

Für die folgenden Untersuchungen über das Konvergenzgebiet der transformierten Reihe führt man zweckmäßig einen Stern ein. Wir definieren ihn in folgender Weise:

Definition des Sterns $\mathfrak{R}$. *Läßt man z von dem nach Voraussetzung* 2 *und* 3 *vorhandenen, eindeutig bestimmten Punkt z^* aus längs jedes Halbstrahls fortrücken und bezeichnet mit r_φ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ jeweils die obere Grenze der Abstände $|z-z^*|$ derjenigen Punkte z des Halbstrahls* $\arc(z-z^*)=\varphi=$ konst., *für die $f(z)$ in $\mathfrak{G}(z)$ regulär ist, so heißt die Vereinigungsmenge von z^* und allen inneren Punkten der Strecken*

$$z^*\ldots z^*+r_\varphi e^{i\varphi} \qquad (0\leqq\varphi<2\pi)$$

der „zu $E(z,y)$ gehörige Stern $\mathfrak{R}$ des Elements $f(z)$“.

Um eine kurze Sprechweise zu haben, empfiehlt es sich noch, die Vereinigungsmenge aller außerhalb der *abgeschlossenen* Strecken $z^*\ldots z^*+r_\varphi e^{i\varphi}$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ gelegenen Punkte als *„Äußeres von $\mathfrak{R}$“* zu bezeichnen. Den *„Rand von $\mathfrak{R}$“* sollen die von z^* verschiedenen Punkte $z^*+r_\varphi e^{i\varphi}$ bilden[16]). Man bemerkt dann, daß auf Grund der vorstehenden Definition und der Voraussetzung 3 die Funktion $f(z)$ im Innern und auf dem Rand von $\mathfrak{G}(z)$ regulär ist oder mindestens einen singulären Punkt im Innern von $\mathfrak{G}(z)$ hat, je nachdem z ein Punkt aus $\mathfrak{R}$ oder ein Punkt aus dem Äußern von $\mathfrak{R}$ ist.

Nun kann man den Hauptsatz über das Konvergenzgebiet der E-Transformation eines Funktionselements so aussprechen:

1. Hauptsatz. *Genügt die Funktion*

$$x=E(z,y)=\gamma_0(z)+\gamma_1(z)\,y+\ldots+\gamma_n(z)\,y^n+\ldots$$

[16]) Man beachte, daß gewisse oder alle r_φ gleich Null sein können, da über die Abhängigkeit der Funktion $E(z,y)$ von z keine Stetigkeitsvoraussetzung gemacht wurde, die dies verhindern würde.

den oben angegebenen Voraussetzungen und ist $\mathfrak{R}$ der zu $E(z, y)$ gehörige Stern des Elements $f(z)$, so konvergiert die E-Transformation

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \quad \text{von} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

in den Punkten von $\mathfrak{R}$, die der Bedingung

$$|\gamma_0(z)| < 1$$

genügen, und stellt dort die geradlinig von z^* aus genommene analytische Fortsetzung von $f(z)$ dar. Sie divergiert dagegen in allen äußeren Punkten von $\mathfrak{R}$ und ist sinnlos in allen Punkten von $\mathfrak{R}$, für die $|\gamma_0(z)| > 1$ ist.

Beweis. Zum Beweis ziehen wir die Funktion

$$f[E(z, y)]$$

der beiden Variablen z und y heran, die jedenfalls auf einer gewissen Punktmenge definiert ist, da nach Voraussetzung 4

$$f[E(z, 1)] \equiv f(z)$$

ist. Ist weiter z ein Punkt, für den $|\gamma_0(z)| < 1$ ist, so ist $f[E(z, y)]$ bei festgehaltenem z eine in der Umgebung von $y = 0$ analytische Funktion von y. Da nämlich $E(z, 0) = \gamma_0(z)$ im Innern des Einheitskreises liegt, so liegen auch die durch die in y analytische Funktion $E(z, y)$ vermittelten Bilder der in einer hinreichend kleinen Umgebung von $y = 0$ liegenden Punkte noch im Einheitskreis. Da andrerseits $f(z)$ im Innern des Einheitskreises analytisch ist, so ist $f[E(z, y)]$ als mittelbare Funktion in einer genügend kleinen Umgebung von $y = 0$ analytisch. Über die Größe dieser Umgebung kann man genauer sagen:

1. Ist z ein Punkt von $\mathfrak{R}$ und ist außerdem $|\gamma_0(z)| < 1$, so ist $f[E(z, y)]$ im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ regulär. $E(z, y)$ bildet nämlich den Einheitskreis $|y| \leqq 1$ auf das abgeschlossene Gebiet $\mathfrak{G}(z)$ ab, in dem $f(z)$ auf Grund der Konstruktion von $\mathfrak{R}$ regulär ist. Daher ist auch die mittelbare Funktion $f[E(z, y)]$ in $|y| \leqq 1$ regulär.

2. Ist z ein Punkt aus dem Äußern von $\mathfrak{R}$ und ist außerdem $|\gamma_0(z)| < 1$, so hat $f[E(z, y)]$ schon im offenen Einheitskreis $|y| < 1$ eine singuläre Stelle. Nach der Konstruktion des Sterns $\mathfrak{R}$ und wegen Voraussetzung 3 liegt nämlich im offenen Gebiet $\mathfrak{G}(z)$ mindestens eine singuläre Stelle von $f(z)$. Diese Stelle ist vermöge der durch die in $|y| \leqq 1$ reguläre Funktion $E(z, y)$ vermittelten Abbildung das Bild eines Punktes y_0 aus $|y| < 1$, und dieser Punkt y_0 ist auch eine singuläre Stelle der mittelbaren Funktion $f[E(z, y)]$.

Nach diesen Bemerkungen über $f[E(z, y)]$ knüpfen wir wieder an die Reihe (1) an. Wir bilden aus

(1) $$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

formal die Reihe

(5) $$f[E(z,y)] = a_0 + a_1 E(z,y) + \ldots + a_n E^n(z,y) + \ldots$$

und unterscheiden nun zwei Fälle:

1. z ist ein Punkt, für den $|\gamma_0(z)| > 1$ ist: Dann divergiert (5) sicher in einer gewissen Umgebung von $y = 0$, und die Reihe, die aus (5) durch Umordnung nach Potenzen von y hervorgeht, hat, wie behauptet, keinen Sinn, da schon die Reihe für das Absolutglied

$$a_0 + a_1 \gamma_0(z) + a_2 \gamma_0^2(z) + \ldots + a_n \gamma_0^n(z) + \ldots$$

divergiert.

2. z ist ein Punkt, für den $|\gamma_0(z)| < 1$ ist: Dann läßt sich um $y = 0$ ein Kreis K angeben, in dem wegen $|E(z,0)| = |\gamma_0(z)| < 1$ noch $|E(z,y)| < k < 1$ ist. In diesem Kreis K konvergiert die Reihe (5) absolut und gleichmäßig. Sie darf daher nach Potenzen von y umgeordnet werden, und die durch die Umordnung entstehende neue Reihe

(6) $$f[E(z,y)] = F_0(z) + F_1(z)\, y + \ldots + F_n(z)\, y^n + \ldots$$

stellt die Potenzreihenentwicklung der bei unserem festen z mindestens im Kreis K analytischen Funktion $f[E(z,y)]$ von y dar. Als Potenzreihe konvergiert oder divergiert (6) gewiß in $y = 1$, je nachdem $f[E(z,y)]$ im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ regulär ist oder schon im offenen Einheitskreis $|y| < 1$ eine singuläre Stelle hat. Wie oben gezeigt wurde, ist das erstere oder das letztere der Fall, je nachdem z ein Punkt aus $\mathfrak{K}$ oder ein Punkt aus dem Äußern von $\mathfrak{K}$ ist.

Endlich ist noch zu zeigen, daß im Falle der Konvergenz die Reihe (6) für $y = 1$, also

(7) $$F_0(z) + F_1(z) + \ldots + F_n(z) + \ldots$$

die von z^* aus geradlinig genommene analytische Fortsetzung von (1) liefert. Das folgt aber daraus, daß $\mathfrak{G}(z)$ die Strecke $z^* \ldots z$ enthält und daß die in $|y| \leqq 1$ analytische Funktion $f[E(z,y)]$ dort dieselben Werte annimmt wie $f(z)$ in $\mathfrak{G}(z)$ und endlich noch $f[E(z,1)] = f(z)$ ist. Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

§ 2.

Die allgemeine E-Transformation zweiter Art.

Erfüllt die Funktion $E(z,y)$ die in § 1 angegebenen Voraussetzungen, so sagen wir kurz, sie liefere eine *„allgemeine E-Transformation erster Art"*. Im Gegensatz dazu sprechen wir von einer *„allgemeinen E-Transformation zweiter Art"*, wenn $E(z,y)$ nur die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

Voraussetzungen über $E(z, y)$. 1. *Bei beliebigem, aber festem z aus einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ ist $x = E(z, y)$ als eine im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ analytische Funktion von y definiert, die das Innere desselben eindeutig (nicht notwendig eineindeutig, wie es in § 1 vorausgesetzt war) auf ein Gebiet $\mathfrak{G}(z)$ abbildet. Man kann also für jedes z aus $\mathfrak{B}$ die Funktion $E(z, y)$ in $|y| \leqq 1$ nach Potenzen von y entwickeln:*

$$x = E(z, y) = \gamma_0(z) + \gamma_1(z)\, y + \ldots + \gamma_n(z)\, y^n + \ldots .$$

2. *Es ist identisch in z: $E(z, 1) = z$.*

Unter diesen schwächeren Voraussetzungen über $E(z, y)$ — gegenüber § 1 fehlen im wesentlichen die dortigen Voraussetzungen 2 und 3 — kann man noch folgenden Satz beweisen:

2. Hauptsatz. *Genügt die Funktion*

$$x = E(z, y) = \gamma_0(z) + \gamma_1(z)\, y + \ldots + \gamma_n(z)\, y^n + \ldots$$

den beiden oben genannten Voraussetzungen, so konvergiert die

$$E\text{-}Transformation \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \quad von \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

in allen Punkten z aus $\mathfrak{B}$, für die

1. $|\gamma_0(z)| < 1$ *ist,*

2. $f(z)$ *im Innern und auf dem Rand des durch $E(z, y)$ vermittelten Bildes $\mathfrak{G}(z)$ des Einheitskreises $|y| \leqq 1$ regulär ist.*

Sie liefert in diesen Punkten die analytische Fortsetzung von $f(z)$, und zwar im Falle der Vieldeutigkeit von $f(z)$ denjenigen Wert, den man erhält, wenn man $f(z)$ vom Punkte $\gamma_0(z)$ aus längs des durch $E(z, y)$ vermittelten Bildes der Strecke $0 \leqq y \leqq 1$ fortsetzt.

Beweis. Der Beweis ist fast genau derselbe wie der des 1. Hauptsatzes. z sei ein Punkt, der den im Satz genannten Bedingungen genügt. Da dann $|E(z, 0)| = |\gamma_0(z)| < 1$ und $E(z, y)$ eine analytische Funktion von y ist, so ist auch noch in einem hinreichend kleinen Kreis K um $y = 0$:

$$|E(z, y)| \leqq k < 1 .$$

In diesem Kreis konvergiert die Reihe

$$f[E(z, y)] = a_0 + a_1 E(z, y) + \ldots + a_n E^n(z, y) + \ldots$$

absolut und gleichmäßig; sie stellt somit in K eine analytische Funktion von y dar, deren Potenzreihenentwicklung man durch Umordnung der vorstehenden Reihe nach Potenzen von y erhält. Die neue Reihe

$$f[E(z, y)] = F_0(z) + F_1(z)\, y + \ldots + F_n(z)\, y^n + \ldots$$

wird im Punkte $y = 1$ noch konvergieren, wenn $f[E(z, y)]$ im abgeschlossenen Einheitskreis $|y| \leqq 1$ regulär ist. Das trifft zu, denn $E(z, y)$

ist in $|y| \leqq 1$ regulär und nimmt Werte aus dem abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{G}(z)$ an, in dem wiederum $f(z)$ regulär ist; daher ist auch die mittelbare Funktion $f[E(z, y)]$ in $|y| \leqq 1$ regulär und die Konvergenz der E-Transformation

$$F_0(z) + F_1(z) + \ldots + F_n(z) + \ldots$$

in den genannten Punkten z erwiesen.

Den letzten Teil des Satzes sieht man so ein: Die E-Transformation von $f(z)$ gibt den Wert der nach dem Monodromiesatz in $|y| \leqq 1$ eindeutigen analytischen Funktion $f[E(z, y)]$ von y. Dieser Wert wird erhalten, wenn man $f[E(z, y)]$ längs irgendeines im Innern des Einheitskreises verlaufenden Weges von 0 bis 1 hin fortsetzt; insbesondere kann man als Weg die positiv reelle Strecke $0 \leqq y \leqq 1$ wählen. Dem entspricht aber vermöge der durch $E(z, y)$ vermittelten Abbildung die Fortsetzung von $f(z)$ längs des im Satz genannten Weges.

Will man sich wieder wie in § 1 einen Stern konstruieren, in dem die E-Transformation von $f(z)$ konvergiert — von dem man aber jetzt nicht mehr behaupten kann, daß er ihr genauer Konvergenzbereich sei —, so kann man irgendeinen Punkt z^* herausgreifen, in dem sie konvergiert, und auf jedem von z^* ausgehenden Halbstrahl Strecken abgrenzen, deren einer Endpunkt z^* ist und deren Länge r_φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ gleich der oberen Grenze der Abstände $|z - z^*|$ derjenigen Punkte z des Halbstrahls $\arc(z - z^*) = \varphi = \text{konst.}$ vom Punkt z^* ist, für die die E-Transformation von $f(z)$ in z sowie in allen Punkten zwischen z^* und z konvergiert. Die Vereinigungsmenge von z^* und allen inneren Punkten der Strecken $z^* \ldots z^* + r_\varphi e^{i\varphi}$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ bildet einen Stern $\mathfrak{R}$, in dessen Punkten die E-Transformation von $f(z)$ gewiß konvergiert. Man muß nur beachten, daß man damit nicht notwendig einen Teil eines bestimmten Zweiges von $f(z)$ bekommt. Da nämlich über die Funktion $E(z, y)$, was ihre Abhängigkeit von z betrifft, nur vorausgesetzt wurde, daß $E(z, 1) \equiv z$ ist, so muß sich $\mathfrak{G}(z)$ mit z nicht stetig ändern, und daher braucht die E-Transformation von $f(z)$ nicht im ganzen Stern denselben Zweig von $f(z)$ zu liefern.

§ 3.

Anwendung auf die Taylor-Transformation.

Die bisherigen Ergebnisse sollen nun angewandt werden auf die allgemeine E-Transformation erster Art, die zu der Funktion

$$x = E(z, y) = z_0 + (z - z_0)\, y \qquad (z_0 \text{ fest}, \ |z_0| < 1) \tag{1}$$

gehört. Es wird sich zeigen, daß sie mit der Taylor-Entwicklung im Punkt z_0 übereinstimmt.

Zunächst ist nachzuweisen, daß die Funktion (1) den Voraussetzungen des § 1 genügt. Offensichtlich sind die Voraussetzungen 1 und 4 erfüllt. Als das durch $E(z, y)$ bei festem z vermittelte Bild $\mathfrak{G}(z)$ des Einheitskreises $|y| < 1$ findet man:

$$|x - z_0| < |z - z_0|, \tag{2}$$

also den Kreis um z_0 mit Radius $|z - z_0|$. Dieser Kreis zieht sich für $z \neq z_0$ auf den Punkt z_0 selbst zusammen. Rückt z längs eines von z_0 ausgehenden Halbstrahls von z_0 aus fort, so sind die zugehörigen Kreise ineinandergeschachtelt. Man erkennt somit, daß auch die Voraussetzungen 2 und 3 erfüllt sind, falls man nur den dort z^* genannten Punkt mit z_0 identifiziert.

Zur Herstellung der E-Transformation des Funktionselements

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \tag{3}$$

bildet man:

$$f[E(z, y)] = a_0 + a_1[z_0 + (z - z_0)\, y] + \ldots + a_n[z_0 + (z - z_0)\, y]^n + \ldots$$

und ordnet nach Potenzen von y:

$$f[E(z, y)] = f(z_0) + \frac{1}{1!} f'(z_0)(z - z_0)\, y + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n y^n + \ldots.$$

Setzt man noch $y = 1$, so erhält man genau die Taylor-Entwicklung im Punkt z_0:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{1!} f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n + \ldots. \tag{4}$$

Um den zu (1) gehörigen Stern $\mathfrak{R}$ des Elements $f(z)$ zu bestimmen, läßt man z von z_0 aus längs eines Halbstrahls $\arc(z - z_0) = \varphi = \text{konst.}$ fortschreiten und bekommt nach (2) für jeden Halbstrahl als r_φ den Radius des größten Kreises um z_0, in dessen Innerem $f(z)$ noch regulär ist. Daher ist der Stern $\mathfrak{R}$ mit diesem Kreis identisch. Das Konvergenzgebiet der Reihe (4) endlich fällt mit $\mathfrak{R}$ zusammen, da ja $\gamma_0(z) = z_0$ von z unabhängig ist und $|z_0| < 1$ vorausgesetzt wurde.

II. Teil.

Funktionentheoretische Anwendungen.

§ 4.

Vorbemerkungen.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit der analytischen Fortsetzung eines Funktionselements

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

dessen Konvergenzradius endlich sein soll und daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden kann; wir setzen also voraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1. \tag{2}$$

Genauer handelt es sich in den nächsten Paragraphen um den Beweis von Sätzen, die aus gewissen Eigenschaften der Folge der Koeffizienten a_n auf die Lage der singulären Stellen von $f(z)$ auf dem Einheitskreis (als dem Konvergenzkreis von (1)) schließen lassen. Bei diesen Beweisen kommt es im wesentlichen darauf an, zu zeigen, daß ein bestimmter Punkt des Einheitskreises, etwa der Punkt $+1$, eine singuläre Stelle von $f(z)$ ist. Der Weg, auf dem dieser Nachweis geführt wird, ist der folgende:

Wir wenden auf $f(z)$ eine allgemeine E-Transformation zweiter Art an, die so beschaffen ist, daß das durch $x = E(z, y)$ vermittelte Bild $\mathfrak{G}(z)$ des Kreises $|y| < 1$ den Punkt $+1$ im Innern hat, falls nur z reell ist und dem Intervall $1 < z < 1 + \varepsilon$ angehört, wobei ε eine durch $E(z, y)$ bestimmte Zahl ist, die positiv sein soll, aber beliebig klein sein kann. Andrerseits soll sich zu jeder noch so kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ des Punkts $+1$ eine positive Zahl δ angeben lassen derart, daß das Gebiet $\mathfrak{G}(z)$ samt seinem Rand im Innern der Vereinigungsmenge aus dem Einheitskreis und der Umgebung $\mathfrak{U}$ liegt, wenn nur z dem Intervall $1 < z < 1 + \delta$ angehört. Genügt $E(z, y)$ diesen beiden Forderungen, so sagen wir künftig kurz, sie liefere eine *„brauchbare E-Transformation"*.

Ist $f(z)$ in $+1$ regulär, so läßt sich eine Umgebung $\mathfrak{U}$ des Punkts $+1$ angeben, so daß $f(z)$ im Innern der Vereinigungsmenge aus $\mathfrak{U}$ und dem Einheitskreis regulär ist. Daher muß in diesem Fall jede brauchbare E-Transformation von $f(z)$ nach dem 2. Hauptsatz in allen Punkten des Intervalls $1 < z < 1 + \eta$ konvergieren, falls $\eta > 0$ der einzelnen E-Transformation entsprechend hinreichend klein gewählt ist. Umgekehrt ergibt sich der wichtige

Satz 1. *Divergiert eine brauchbare E-Transformation von $f(z)$ wenigstens in einem Punkt jedes Intervalls $1 < z < 1 + \eta$, wie klein auch $\eta > 0$ gewählt wird, so ist $z = +1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$.*

§ 5.

Die Transformation $E(z, y) = [z_0 + (z - z_0)\, y]\, y^k$.

Wenn man daran geht, eine möglichst einfache brauchbare E-Transformation zu konstruieren, so wird man auf Grund geometrischer Überlegungen wohl zuerst zu den Funktionen $E(z, y)$ gelangen, die bei festem z den Kreis $|y| \leqq 1$ wieder auf einen Kreis abbilden. Am einfachsten leistet

dies die Funktion

$$(I) \qquad E(z, y) = z_0 + (z - z_0)\, y \qquad (z_0 \text{ positiv reell, } 0 < z_0 < 1).$$

Man sieht sofort, daß sie eine brauchbare E-Transformation liefert, und aus § 3 ist bekannt, daß sie auf die Taylor-Transformation führt. Bei den folgenden Untersuchungen ist die Verwendung dieser Transformation nicht vorteilhaft, weil bei der aus $f(z)$ hervorgehenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$$

in jedem Glied $F_n(z)$ sämtliche Koeffizienten a_n auftreten.

Das vermeidet man sehr einfach, indem man zu der Funktion

$$(II) \qquad E(z, y) = [z_0 + (z - z_0)\, y]\, y \qquad (z_0 \text{ positiv reell, } 0 < z_0 < 1)$$

übergeht. Man überzeugt sich leicht, daß sie wieder eine brauchbare E-Transformation liefert und daß nun wirklich jedes $F_n(z)$ nur mehr endlich viele a_n enthält. Diese Funktion findet in den Arbeiten von Herrn Kößler Verwendung[17]).

Es liegt nun aber nahe, zu der allgemeineren Funktion

$$(III) \quad E(z, y) = [z_0 + (z - z_0)\, y]\, y^k \quad (z_0 \text{ reell, } 0 < z_0 < 1,\ k > 0 \text{ und ganz})$$

weiterzugehen. Es wird sich zeigen, daß sie für das Folgende noch geeigneter ist als die Funktion (II). Wir beschäftigen uns daher jetzt ausführlich mit der zu (III) gehörigen E-Transformation.

Zunächst erkennt man, daß (III) den Voraussetzungen des § 2 genügt. Führt man die durch $E(z, y)$ bei festem z vermittelte Abbildung in zwei Schritten

$$1. \quad E_1(z, y) = z_0 + (z - z_0)\, y, \qquad 2. \quad E(z, y) = E_1(z, y)\, y^k$$

aus, so sieht man auch unmittelbar, daß (III) eine brauchbare E-Transformation liefert.

Um die transformierte Reihe selbst herzustellen, bilden wir aus

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

formal die Reihe

$$(2) \qquad f[E(z, y)] = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, y^{\nu k} [z_0 + (z - z_0)\, y]^\nu$$

und ordnen nach Potenzen von y. Setzen wir noch $y = 1$, so erhalten wir die Entwicklung

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z),$$

[17]) Vgl. loc. cit. [10]).

die gewiß in den den Bedingungen des 2. Hauptsatzes genügenden Punkten gültig ist. Die $F_n(z)$ sind leicht angebbare Funktionen von z. Insbesondere ist:

$$F_0(z) = a_0$$

$$F_{mk}(z) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m}{k+1}\right]} a_{m-\nu} \binom{m-\nu}{\nu k} z_0^{m-\nu(k+1)} (z-z_0)^{\nu k}. \tag{4}$$

Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, z_0 in der Form

$$z_0 = \frac{p}{q} \qquad (0 < p < q)$$

zu schreiben. Dann bekommt $F_{mk}(z)$ die Form:

$$F_{mk}(z) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m}{k+1}\right]} a_{m-\nu} \binom{m-\nu}{\nu k} \frac{p^{m-\nu(k+1)}}{q^{m-\nu}} (qz-p)^{\nu k}. \tag{5}$$

Weiter empfiehlt es sich, die folgenden Bezeichnungen einzuführen:

1. Das zu dem Summationsindex

$$\nu = \left[\frac{m}{2k+2}\right] = \frac{m}{2k+2} - \lambda \qquad (0 \leqq \lambda < 1)$$

gehörige Glied von $F_{mk}(z)$ soll das *„Hauptglied"* von $F_{mk}(z)$ heißen und mit $f_{mk}(z)$ bezeichnet werden.

2. Ist a_N ein Koeffizient von $f(z)$, so soll die Gesamtheit aller Koeffizienten a_n, deren Indizes den Ungleichungen

$$N(1-\vartheta) < n < N(1+\vartheta) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

genügen, eine *„ϑ-Umgebung"* von a_N heißen.

Nun können wir aus (5) die folgenden drei Hilfssätze ablesen:

Hilfssatz 1. *Jeder Koeffizient a_n von $f(z)$ steht bei mindestens einem $F_{mk}(z)$ im Hauptglied.*

Mit m durchläuft nämlich auch $m - \left[\frac{m}{2k+2}\right]$ alle ganzen Zahlen, die Zahlen $1\cdot(2k+2)-1$, $2\cdot(2k+2)-2$, $3\cdot(2k+2)-3$, ... sogar zweimal.

Hilfssatz 2. *Wählt man k hinreichend groß, so treten in $F_{mk}(z)$ nur Koeffizienten a_ν auf, die der ϑ-Umgebung des im Hauptglied stehenden Koeffizienten a_n angehören, wie klein auch $\vartheta > 0$ vorgegeben ist.*

Die Zahl der in $F_{mk}(z)$ außer dem Hauptglied auftretenden Glieder ist $\left[\frac{m}{k+1}\right]$. Und nun ergibt sich die Behauptung aus der Abschätzung

$$\left[\frac{m}{k+1}\right] \leqq \frac{m}{k+1} = \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} m < \frac{1}{k}\left(m - \frac{m}{2k+2}\right) \leqq \frac{1}{k}\left\{m - \left[\frac{m}{2k+2}\right]\right\},$$

wenn man beachtet, daß $m - \left[\frac{m}{2k+2}\right]$ der Index des in $f_{mk}(z)$ stehenden Koeffizienten a ist.

Hilfssatz 3. *Wählt man*

$$p = \frac{k+1}{k}, \quad q = \frac{2k+1}{k}, \quad \textit{also} \quad z_0 = \frac{k+1}{2k+1}, \tag{6}$$

so wird für alle $\sigma > 0$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[mk]{|f_{mk}(1+\sigma)|} > 1.$$

Zum Beweis bilden wir unter Verwendung der Stirlingschen Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

den Ausdruck:

$$\sqrt[m]{|f_{mk}(z)|} = \sqrt[m]{\left|a_{m-\left[\frac{m}{2k+2}\right]}\right|} \cdot C_m \left\{\frac{\frac{2k+1}{2k+2}m+\lambda}{2\pi\left(\frac{k}{2k+2}m-k\lambda\right)\left(\frac{1}{2}m+(k+1)\lambda\right)}\right\}^{\frac{1}{2m}} e^{o\left(\frac{1}{m^2}\right)} \times \frac{p^{\frac{1}{2}+\frac{(k+1)\lambda}{m}}}{q^{\frac{2k+1}{2k+2}+\frac{\lambda}{m}}} |qz-p|^{\frac{k}{2k+2}-\frac{k\lambda}{m}}, \tag{7}$$

wobei

$$C_m = \frac{\left(\frac{2k+1}{2k+2}+\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{2k+1}{2k+2}+\frac{\lambda}{m}}}{\left(\frac{k}{2k+2}-\frac{k\lambda}{m}\right)^{\frac{k}{2k+2}-\frac{k\lambda}{m}}\left(\frac{1}{2}+\frac{(k+1)\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{(k+1)\lambda}{m}}}$$

ist. Läßt man m über alle Grenzen wachsen, so wird

$$\lim_{m\to\infty} C_m \frac{p^{\frac{1}{2}+\frac{(k+1)\lambda}{m}}}{q^{\frac{2k+1}{2k+2}+\frac{\lambda}{m}}} = \frac{\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{\frac{2k+1}{2k+2}}\left(\frac{k}{2k+2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{k}{2k+2}\right)^{\frac{2k+1}{2k+2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{2k+1}{2k+2}}}$$

und das wird offensichtlich gleich Eins, wenn man p und q gemäß (6) wählt. Beachtet man jetzt noch, daß gemäß Hilfssatz 1

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\left|a_{m-\left[\frac{m}{2k+2}\right]}\right|} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m-\left[\frac{m}{2k+2}\right]]{\left|a_{m-\left[\frac{m}{2k+2}\right]}\right|} = 1$$

ist, so folgt wie behauptet:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[mk]{|f_{mk}(1+\sigma)|} = \left(\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|f_{mk}(1+\sigma)|}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{2k+1}{k}\sigma\right)^{\frac{1}{2k+2}} > 1,$$

wie auch $\sigma > 0$ gewählt wird.

§ 6.

Der Hadamardsche Lückensatz und der Satz von Vivanti-Borel-Dienes

Nach den Vorbereitungen des letzten Paragraphen beweist man ohne jede Mühe den Hadamardschen Lückensatz und den Satz von Vivanti-Borel-Dienes in folgender Fassung:

Hadamardscher Lückensatz. *Existiert in der Folge der Koeffizienten a_n eines Funktionselements*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

eine unendliche Teilfolge

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_\varrho}, \ldots \text{ mit } \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\nu_\varrho]{|a_{\nu_\varrho}|} = 1,$$

so daß für ein festes, positives ϑ die Koeffizienten a_n, die den ϑ-Umgebungen der a_{ν_ϱ} angehören, außer den a_{ν_ϱ} selbst verschwinden, dann ist $f(z)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar.

Entsprechend lautet der

Satz von Vivanti-Borel-Dienes. *Existiert in der Folge der Koeffizienten a_n eine unendliche Teilfolge*

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_\varrho}, \ldots \text{ mit } \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\nu_\varrho]{|a_{\nu_\varrho}|} = 1$$

und dazu eine Folge von Winkeln

$$\psi_{\nu_1}, \psi_{\nu_2}, \ldots, \psi_{\nu_\varrho}, \ldots,$$

so daß für ein festes, positives ϑ und alle ϱ die nicht verschwindenden Koeffizienten $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$ aus der ϑ-Umgebung von a_{ν_ϱ} der Bedingung

$$\cos(\varphi_n - \psi_{\nu_\varrho}) \geqq 0$$

und speziell

$$\cos(\varphi_{\nu_\varrho} - \psi_{\nu_\varrho}) \geqq \delta_{\nu_\varrho} > 0 \quad \text{mit} \quad \lim_{\varrho\to\infty} \sqrt[\nu_\varrho]{\delta_{\nu_\varrho}} = 1$$

genügen, dann hat $f(z)$ im Punkt $z = +1$ eine singuläre Stelle.

Beweis. Der Beweis der beiden Sätze ist in seinem ersten Teil genau derselbe. Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei und wenden auf $f(z)$ die zu der dortigen Funktion (III) gehörige E-Transformation an, wobei wir z_0 gemäß § 5, (6) annehmen und k so groß wählen, daß in den $F_{mk}(z)$ jeweils nur Koeffizienten a auftreten, die für das nach den Voraussetzungen des Satzes vorhandene ϑ, der ϑ-Umgebung des im Hauptglied stehenden Koeffizienten a angehören, was nach Hilfssatz 2 möglich ist. Sodann greifen wir aus der Folge der $F_{mk}(z)$ eine Teilfolge

$$F_{m_1 k}(z), F_{m_2 k}(z), \ldots, F_{m_\varrho k}(z), \ldots$$

heraus, die so beschaffen ist, daß a_{ν_ϱ} im Hauptglied von $F_{m_\varrho k}(z)$ steht. Das ist nach Hilfssatz 1 möglich.

1. Unter den Voraussetzungen des Hadamardschen Lückensatzes besteht $F_{m_\varrho k}(z)$ für jedes ϱ nur aus dem Hauptglied. Daher folgt nach Hilfssatz 3:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|F_n(1+\sigma)|} \geqq \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[m_\varrho k]{|F_{m_\varrho k}(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für alle } \sigma > 0.$$

Die E-Transformation von $f(z)$ divergiert mithin für alle reellen $z > 1$, und da sie nach § 5 brauchbar ist, besagt Satz 1, daß $+1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist.

Um nachzuweisen, daß auch $z = e^{i\varphi}$ ein singulärer Punkt ist, bildet man die Funktion

$$f_\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\varphi} z^n.$$

Sie hat dieselben Lücken wie $f(z)$, ist daher in $z = +1$ singulär; das heißt aber $f(z)$ ist auch in $z = e^{i\varphi}$ singulär, einerlei wie φ gewählt ist.

2. Um den Beweis des Satzes von Vivanti-Borel-Dienes vollends durchzuführen, schreiben wir nach § 5, (4):

$$F_{m_\varrho k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m_\varrho}{k+1}\right]} a_{m_\varrho-\nu}\binom{m_\varrho-\nu}{\nu k} z_0^{m_\varrho-\nu(k+1)}(z-z_0)^{\nu k}$$

$$= e^{i\psi_{\nu_\varrho}} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m_\varrho}{k+1}\right]} \frac{a_{m_\varrho-\nu}}{e^{i\psi_{\nu_\varrho}}}\binom{m_\varrho-\nu}{\nu k} z_0^{m_\varrho-\nu(k+1)}(z-z_0)^{\nu k}.$$

Nach der Voraussetzung des Satzes haben alle Quotienten

$$\frac{a_{m_\varrho-\nu}}{e^{i\psi_{\nu_\varrho}}}$$

in der letzten Summe nicht negativen Realteil und der des Hauptgliedes ist insbesondere $|a_{\nu_\varrho}|\,\delta_{\nu_\varrho}$. Somit ist für $z = 1+\sigma$ (σ reell und positiv) der Betrag von $F_{m_\varrho k}(z)$ jedenfalls nicht kleiner als der seines Hauptgliedes, woraus nach Hilfssatz 3 folgt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|F_n(1+\sigma)|} \geqq \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[m_\varrho k]{|F_{m_\varrho k}(1+\sigma)|} > 1$$

und damit, daß $+1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist.

III. Teil.

Bemerkungen zum Fabryschen Lückensatz.

§ 7.

Eine Bemerkung zum Beweis des Fabryschen Lückensatzes.

Während eine Reihe von E-Transformationen bekannt sind, die ohne Hinzunahme wesentlich anderer Hilfsmittel den Hadamardschen Lückensatz liefern[18]), kennt man keinen solchen Ansatz für den Fabryschen Lückensatz. Das Ziel dieses Paragraphen ist nun, zu zeigen, daß kein solcher Ansatz existieren kann.

Der Fabrysche Lückensatz kann in der Form ausgesprochen werden[19]):

Fabryscher Lückensatz. *Wenn in dem Funktionselement*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

die Lückenbedingung

$$\frac{\lambda_n}{n} \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt, so ist $f(z)$ nicht über seinen Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar.

Für unsere Zwecke empfiehlt es sich, eine etwas weniger allgemeine Fassung zugrunde zu legen. Die im Satz genannte Lückenbedingung ist nämlich gewiß erfüllt, wenn

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt. Ersetzen wir die im Satz genannte Forderung durch die vorstehende, so erhalten wir eine Fassung, die der des Hadamardschen Lückensatzes ähnlicher ist. Wir stellen diese Fassung noch hierher:

Fabryscher Lückensatz (engere Fassung). *Existiert zu dem Funktionselement*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Funktion $\varphi(n)$, so daß

1. *falls $a_N \neq 0$ ist, alle Koeffizienten a_ν, deren Indizes ν den Ungleichungen*

$$N - \varphi(N) < \nu < N + \varphi(N)$$

genügen, außer a_N selbst verschwinden;

---

[18]) Neben den in der Einleitung genannten Ansätzen leistet auch die klassische Euler-Transformation das Gewünschte; vgl. etwa A. Pringsheim, loc. cit. [1]), S. 83.

[19]) Zu den in diesem Paragraphen herangezogenen Sätzen vgl. etwa Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1927); im folgenden als B II zitiert. Speziell zum Fabryschen Lückensatz vgl. B II, S. 295–296.

2. $\varphi(n) \to \infty$ *für* $n \to \infty$ *gilt,*

so ist $f(z)$ *nicht über seinen Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar.*

Diese Formulierung legen wir künftig zugrunde und setzen dabei wieder wie früher voraus, daß der Einheitskreis der Konvergenzkreis von $f(z)$ ist.

Wir überlegen uns zunächst nochmals genauer, worauf der Beweis des Hadamardschen Lückensatzes mit Hilfe einer E-Transformation[20]) im wesentlichen beruht. Durch Anwendung einer brauchbaren E-Transformation auf das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \tag{1}$$

erhält man eine neue Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z), \tag{2}$$

in der die $F_n(z)$ lineare Kombinationen gewisser endlich oder unendlich vieler Koeffizienten a sind. Wir schreiben etwa:

$$F_n(z) = K_1^{(n)}(z)\, a_{n_1} + K_2^{(n)}(z)\, a_{n_2} + \ldots + K_\nu^{(n)}(z)\, a_{n_\nu} + \ldots \tag{3}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

und bemerken, daß in dieser Summe unter Umständen alle $K_\nu^{(n)}(z)$ von einem gewissen Index $\nu = \nu_0$ an identisch verschwinden können. Wesentlich ist, daß man brauchbare E-Transformationen konstruieren kann, die folgende zwei Eigenschaften aufweisen:

1. In der Folge der $F_n(z)$ existiert eine Teilfolge

$$F_{\lambda_1}(z), F_{\lambda_2}(z), \ldots, F_{\lambda_\varrho}(z), \ldots, \tag{4}$$

so daß $F_{\lambda_\varrho}(z)$ den Koeffizienten a_ϱ, versehen mit einem Faktor $K_\varrho(z)$, enthält, und daß

$$\overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|b_\varrho|} = 1, \text{ falls } b_\varrho \text{ irgendeine Folge mit } \overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\varrho]{|b_\varrho|} = 1 \text{ ist,} \tag{5a}$$

$$\overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|K_\varrho(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für kleine } \sigma > 0 \tag{5b}$$

gilt.

2. Bezeichnet man für ein vorgegebenes $\vartheta > 0$ mit $H_{\lambda_\varrho}(z)$ diejenige Teilsumme aus der $F_{\lambda_\varrho}(z)$ gemäß (3) darstellenden Summe, welche aus den Gliedern besteht, die der ϑ-Umgebung von a_ϱ angehörende Koeffizienten a enthalten, mit $R_{\lambda_\varrho}(z)$ dagegen die Teilsumme der übrigen Glieder, so ist entweder für jedes ϱ (dieser Fall tritt bei der in § 6 benützten

[20]) Vgl. die unter [18]) genannten Beweise.

E-Transformation ein):

$$R_{\lambda_\varrho}(z) \equiv 0,$$

oder aber es gilt für kleine $\sigma > 0$ (dieser Fall tritt bei den sonst in der Literatur benützten E-Transformationen ein; vgl. [18]):

$$\overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|R_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} \leqq 1. \tag{6}$$

In jedem Falle folgt aus

$$\overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|H_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für kleine } \sigma > 0 \tag{7}$$

nach dem in der Einleitung zitierten Satz von Pringsheim

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|F_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} &= \overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|H_{\lambda_\varrho}(1+\sigma) + R_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} \\ &= \lim_{\varrho \to \infty} \sqrt[\lambda_\varrho]{|H_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} > 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Damit vollzieht sich der Beweis so: Aus der Folge (4) kann man eine Teilfolge

$$F_{\lambda_{\nu_1}}, F_{\lambda_{\nu_2}}, \ldots, F_{\lambda_{\nu_\varrho}}, \ldots \tag{9}$$

herausgreifen, bei der auf Grund der Hadamardschen Lückenbedingung $H_{\lambda_{\nu_\varrho}}$ nur aus dem einzigen Glied

$$K_{\nu_\varrho}(z)\, a_{\nu_\varrho}$$

besteht. Damit folgt dann aus (5), daß (7) besteht und damit nach (8), daß

$$\overline{\lim_{\varrho \to \infty}} \sqrt[\lambda_{\nu_\varrho}]{|F_{\lambda_{\nu_\varrho}}(1+\sigma)|} > 1 \tag{10}$$

ist. Das zieht aber

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|F_n(1+\sigma)|} > 1 \tag{11}$$

nach sich, woraus man vermöge Satz 1 auf eine Singularität von $f(z)$ in $+1$ schließen kann.

Man beachte, daß wir es bei diesem Beweis immer mit Teilfolgen der Folge der $F_n(z)$ zu tun hatten. Die Möglichkeit der Beschränkung auf solche Teilfolgen liegt in der Natur dieser ganzen Beweisanordnung, bei der es eben nur darauf ankommt,

$$\text{limes } \underline{\text{superior}} \sqrt[n]{|F_n(1+\sigma)|} > 1$$

zu zeigen. Das hat zur Folge, daß wir den Hadamardschen Lückensatz (vgl. § 5) nicht in der ursprünglichen Form, nach der die Lückenbedingung für *jeden* von Null verschiedenen Koeffizienten erfüllt sein muß, bekommen,

sondern daß er sich bei dieser Beweisanordnung ohne jedes Zutun in der schärferen Fassung ergibt, nach der die Lückenbedingung nur für eine unendliche Teilfolge der nicht verschwindenden Koeffizienten erfüllt sein muß.

Wir kommen jetzt zum Fabryschen Lückensatz. Will man auch ihn in der eben geschilderten Art beweisen, so hat man $E(z, y)$ den folgenden Forderungen gemäß zu konstruieren:

1. In der Folge der $F_n(z)$ existiert eine Teilfolge

$$F_{\lambda_1}(z),\ F_{\lambda_2}(z),\ \ldots,\ F_{\lambda_\varrho}(z),\ \ldots, \tag{12}$$

so daß $F_{\lambda_\varrho}(z)$ den Koeffizienten a_ϱ, versehen mit einem Faktor $K_\varrho(z)$, enthält, und daß

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|b_\varrho|} = 1, \quad \text{falls } b_\varrho \text{ irgendeine Folge mit } \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\varrho]{|b_\varrho|} = 1 \text{ ist,} \tag{13a}$$

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|K_\varrho(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für kleine } \sigma > 0 \tag{13b}$$

gilt.

2. Ist $\varphi(n)$ die im Satz genannte Funktion und bezeichnet man mit $H_{\lambda_\varrho}(z)$ diejenige Teilsumme aus der $F_{\lambda_\varrho}(z)$ gemäß (3) darstellenden Summe, welche aus den Gliedern mit denjenigen Koeffizienten a_ν besteht, deren Indizes den Ungleichungen

$$\varrho - \varphi(\varrho) < \nu < \varrho + \varphi(\varrho)$$

genügen, mit $R_{\lambda_\varrho}(z)$ dagegen die Teilsumme der übrigen Glieder, so ist entweder für jedes ϱ:

$$R_{\lambda_\varrho}(z) \equiv 0,$$

oder aber es gilt für kleine $\sigma > 0$

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|R_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} \leqq 1. \tag{14}$$

In jedem Falle folgt aus

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|H_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für kleine } \sigma > 0 \tag{15}$$

wieder wie oben nach dem Satz von Pringsheim

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|F_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für kleine } \sigma > 0. \tag{16}$$

Damit würde der Beweis so verlaufen: Ist $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \ldots$ die Folge der von Null verschiedenen Koeffizienten, so bestehen

$$H_{\lambda_{\mu_1}}(z),\ H_{\lambda_{\mu_2}}(z),\ \ldots,\ H_{\lambda_{\mu_\varrho}}(z),\ \ldots \tag{17}$$

jeweils nur aus einem einzigen Glied

$$K_{\mu_\varrho}(z)\, a_{\mu_\varrho},$$

und aus (13) und (16) folgt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|F_n(1+\sigma)|} \geqq \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\lambda_\varrho]{|F_{\lambda_\varrho}(1+\sigma)|} > 1 \quad \text{für kleine } \sigma > 0.$$

Man beachte nun aber, daß der Beweis wie beim Hadamardschen Lückensatz wieder zwangläufig mehr gibt, nämlich einen Satz, den man etwa so aussprechen kann:

Existiert in der Folge der Koeffizienten a_n eines Funktionselements

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

eine unendliche Teilfolge

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_\varrho}, \ldots \quad \textit{mit} \quad \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\nu_\varrho]{|a_{\nu_\varrho}|} = 1,$$

und gibt es eine Funktion $\varphi(n)$, die mit n selbst gegen unendlich geht, so daß für jedes ϱ die Koeffizienten a_n, deren Indizes der Bedingung

$$\nu_\varrho - \varphi(\nu_\varrho) < n < \nu_\varrho + \varphi(\nu_\varrho)$$

genügen, außer a_{ν_ϱ} selbst verschwinden, so ist $f(z)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar.

Dieser Satz ergibt sich, wenn man statt der Folge (17) die Folge

$$H_{\lambda_{\nu_1}}(z), H_{\lambda_{\nu_2}}(z), \ldots, H_{\lambda_{\nu_\varrho}}(z), \ldots \tag{18}$$

betrachtet und genau wie dort weiterschließt.

Die Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes, die sich so zwangläufig ergeben würde, ist falsch, und das ist der Grund, weshalb es nicht gelingen kann, auch den Fabryschen Lückensatz allein durch eine E-Transformation zu beweisen. Man konstruiert nämlich leicht ein Funktionselement $f(z)$, das den Voraussetzungen des verallgemeinerten Satzes genügt und trotzdem im Punkt $+1$ regulär ist. Aus dem Beispiel ergibt sich sogar noch mehr. Es zeigt nämlich, daß die Verallgemeinerung schon falsch ist, wenn man $\varphi(n) = n^{1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ wählt. Daraus folgt insbesondere, daß man auch den Borelschen Lückensatz, der aus dem Fabryschen Satz für $\varphi(n) = \sqrt{n}$ hervorgeht, nicht allein durch eine Reihentransformation der in Frage stehenden Art beweisen kann.

Zur Konstruktion des Beispiels gehen wir aus von der in $+1$ gewiß regulären Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{19}$$

und greifen die folgenden Koeffizientengruppen heraus:

$$(20)\quad a_{2^{\nu}q-2^{\nu}p},\ a_{2^{\nu}q-2^{\nu}p+1},\ \ldots,\ a_{2^{\nu}q-1},\ a_{2^{\nu}q+1},\ \ldots,\ a_{2^{\nu}q+2^{\nu}p-1},\ a_{2^{\nu}q+2^{\nu}p}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots),$$

wobei $\frac{p}{q}$ irgendein echter Bruch ist. Wir ordnen diese Gruppen für $\nu = 1, 2, \ldots$ hintereinander an und bezeichnen die Koeffizienten, die ihnen angehören, in der so geschaffenen Reihenfolge mit

$$(21)\qquad a_{p_1},\ a_{p_2},\ \ldots,\ a_{p_n},\ \ldots,$$

und behaupten, es gilt

$$\frac{n}{p_n} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Denn ist etwa $p_n = 2^{\nu q} + \eta$, wobei $\left\{\begin{matrix} -2^{\nu p} \leqq \eta \leqq 2^{\nu p} \\ \eta \neq 0 \end{matrix}\right\}$ gilt, so ist das zugehörige n gleich der Anzahl der in (21) dem Koeffizienten a_{p_n} vorangehenden Koeffizienten a_{p_σ}, also:

$$n = 2\{2^p + 2^{2p} + \ldots + 2^{(\nu-1)p}\} + 2^{\nu p} + \eta \leqq 2^{p+1} \cdot \frac{2^{\nu p}-1}{2^p - 1},$$

und mithin hat man wegen $p < q$:

$$\frac{n}{p_n} < \frac{2^{p+1}}{2^p - 1} \cdot \frac{2^{\nu p}-1}{2^{\nu q} - 2^{\nu p}} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Daher ist[21]) die Funktion

$$(22)\qquad g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right)$$

eine ganze Funktion, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehört. Nach dem Satz von Wigert[22]) hat dann die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\, z^n$$

$+1$ als einzige singuläre Stelle, und demnach hat

$$(23)\qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(n) z^n,$$

wie aus dem Hadamardschen Multiplikationssatz[23]) folgt, auf dem Einheitskreis keine andern Singularitäten als $f(z) = \frac{1}{1+z}$, ist also insbesondere im Punkt $+1$ regulär.

---

[21]) Vgl. etwa B. II, S. 243.
[22]) Vgl. etwa B. II, S. 288.
[23]) Vgl. etwa B. II, S. 292.

Andrerseits kann man über $\frac{p}{q}$ so verfügen, daß $F(z)$ den Voraussetzungen des S. 746 formulierten Satzes für $\varphi(n) = n^{1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ genügt. Wir wählen dazu nur $\frac{p}{q}$ so, daß

$$0 < 1 - \alpha \leqq \frac{p}{q} < 1 \tag{24}$$

ist, und identifizieren zum Nachweis die im Satz mit $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_\varrho}, \ldots$ bezeichnete Koeffizientenfolge mit der Folge der Koeffizienten

$$b_{2q^\nu} = (-1)^{2q^\nu} g(2^{q^\nu}) = g(2^{q^\nu}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

von $F(z)$. Dann ist aus (22) und (24) ersichtlich, daß alle Koeffizienten b_n von $F(z)$, deren Index einer der Bedingungen

$$2^{q^\nu} - (2^{q^\nu})^{1-\alpha} \leqq n \leqq 2^{q^\nu} + (2^{q^\nu})^{1-\alpha} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

genügt, außer den b_{2q^ν} selbst, verschwinden. Die Lückenbedingung ist demnach erfüllt, und es muß nur noch gezeigt werden, daß

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[2q^\nu]{|b_{2q^\nu}|} = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[2q^\nu]{|g(2^{q^\nu})|} = 1 \tag{25}$$

ist. Das folgt aber aus einem von Herrn Pringsheim stammenden Ergebnis[24]), das man so formulieren kann:

Satz 2. *Aus der Folge natürlicher Zahlen* $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ *mit* $\frac{n}{m_n} \to 0$ *für* $n \to \infty$ *werde eine Teilfolge*

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_n} \geqq \alpha > 0$$

herausgehoben. Die übrigbleibende Folge der Zahlen m werde mit

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

bezeichnet. Weiter werde die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehörende ganze Funktion

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{s_n^2}\right)$$

gebildet. Dann gilt für alle hinreichend großen ν:

$$e^{-\varepsilon r_\nu} < |g(r_\nu)| < e^{+\varepsilon r_\nu} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig klein}),$$

also:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[r_\nu]{|g(r_\nu)|} = 1.$$

---

[24]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 85. Der Satz findet sich auch in B. II, S. 297–298, Anmerkung.

Um damit die Richtigkeit von (25) einzusehen, hat man nur die Indizes 2^{q_ν} mit der Folge der r_ν und die Indizes p_ν aus (21) mit der Folge der s_ν des Satzes 2 zu identifizieren.

Wir schließen den Paragraphen mit zwei Bemerkungen:

1. Bemerkung. Das eben behandelte Beispiel, das die Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes ins Unrecht setzt, kann natürlich nicht zu einem Gegenbeispiel gegen die in § 6 bewiesene entsprechende Verallgemeinerung des Hadamardschen Lückensatzes ausgebaut werden. Sowie man nämlich an die Stelle der Umgebungen (20) ϑ-Umgebungen der $a_{2^{q_\nu}}$ treten läßt, gilt für die Folge (21) nicht mehr $\frac{n}{p_n} \to 0$, und man kann nicht mehr behaupten, daß (22) eine ganze Funktion höchstens vom Minimaltypus der Ordnung Eins ist.

2. Bemerkung. Ganz ähnliche Überlegungen wie zum Lückensatz kann man zum Satz von Vivanti-Borel-Dienes anstellen. Auch hier ist schon die Verallgemeinerung falsch, die man etwa so formulieren könnte:

Existiert in der Folge der Koeffizienten a_n eines Funktionselements

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

eine unendliche Teilfolge

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_\varrho}, \ldots \quad \text{mit} \quad \overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \sqrt[\nu_\varrho]{|a_{\nu_\varrho}|} = 1,$$

und gibt es eine Funktion $\varphi(n)$, die mit n selbst gegen unendlich geht, so daß für jedes ϱ die Koeffizienten $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$, deren Indizes der Bedingung

$$\nu_\varrho - \varphi(\nu_\varrho) < n < \nu_\varrho + \varphi(\nu_\varrho)$$

genügen, auch die Forderung

$$\cos(\varphi_n - \varphi_{\nu_\varrho}) \geqq 0$$

erfüllen, soweit sie nicht verschwinden, so ist $z = +1$ eine singuläre Stelle von $f(z)$.

Um für diesen Satz ein Gegenbeispiel zu konstruieren, das ihn bereits für $\varphi(n) = n^{1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ widerlegt, kann man $\frac{p}{q}$ wieder gemäß den Ungleichungen

$$0 < 1 - \alpha \leqq \frac{p}{q} < 1$$

wählen und nun die folgenden Koeffizientengruppen von (19) betrachten:

$$a_{2^{\nu q - 2^{\nu p}+1}}, \ldots, a_{2^{\nu q - 3}}, a_{2^{\nu q - 1}}, a_{2^{\nu q + 1}}, a_{2^{\nu q + 3}}, \ldots, a_{2^{\nu q + 2^{\nu p} - 1}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Koeffizienten aller dieser Gruppen hintereinandergeordnet werden mi

$$a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_n}, \ldots$$

bezeichnet und die Funktion

$$g_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{p_n^2}\right)$$

gebildet, die aus demselben Grund wie $g(z)$ höchstens dem Minimaltypu der Ordnung Eins angehört. Dasselbe gilt dann von $g_1^3(z)$ und daher is nach dem Satz von Wigert und dem Hadamardschen Multiplikationssat

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_1^3(n) z^n$$

in $z = +1$ gewiß regulär, während man sich andrerseits leicht überzeugt daß $F_1(z)$ den Voraussetzungen des zu widerlegenden Satzes genügt.

§ 8.

Eine Verschärfung des Fabryschen Lückensatzes und des Satzes von Vivanti-Borel-Dienes.

Dasselbe Verfahren, das im vorigen Paragraphen zur Konstruktion der Beispiele angewandt wurde, gestattet es, folgende Verschärfungen des Fabryschen Lückensatzes und des Satzes von Vivanti-Borel-Dienes zu beweisen[25]):

Fabryscher Lückensatz. *Der in* § 6 *formulierte Lückensatz bleibt noch richtig, wenn in den ϑ-Umgebungen der a_{ν_ϱ} außer a_{ν_ϱ} gewisse von Null verschiedene Ausnahmekoeffizienten*

$$a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_n}, \ldots$$

auftreten, wenn nur

$$\frac{n}{\lambda_n} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt.

Beweis. Zum Nachweis bilden wir die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehörende Funktion:

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Dann hat nach dem Satz von Wigert und dem Hadamardschen Multiplikationssatz

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) a_n z^n$$

---

[25]) Für den Fabryschen Lückensatz findet sich diese Verschärfung ohne Beweis bei Herrn Kößler, loc. cit. [10]), S. 531.

auf dem Einheitskreis keine andern Singularitäten als $f(z)$. Da aber $F(z)$ den Voraussetzungen des Satzes von § 6 genügt — man überzeugt sich davon leicht, indem man Satz 2 heranzieht —, so ist es nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar, und daher gilt dasselbe für $f(z)$.

Satz von Vivanti-Borel-Dienes. *Der in § 6 formulierte Satz von Vivanti-Borel-Dienes bleibt noch richtig, wenn in den ϑ-Umgebungen der a_{ν_ϱ} gewisse nicht mit den a_{ν_ϱ} zusammenfallende Ausnahmekoeffizienten*

$$a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_n}, \ldots$$

auftreten, die der Bedingung $\cos(\varphi_n - \psi_{\nu_\varrho}) \geqq 0$ *nicht genügen, wenn nur*

$$\frac{n}{\lambda_n} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt.

Beweis. Wieder bildet man die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehörende Funktion

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Mit ihr ist auch $g^2(z)$ höchstens vom Minimaltypus der Ordnung Eins und daher hat

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g^2(n)\, a_n z^n$$

auf dem Einheitskreis keine andern Singularitäten als $f(z)$. Wie man sich wieder leicht überzeugt, genügt $F(z)$ den Voraussetzungen des Satzes von § 6 und damit ist der Beweis fertig.

§ 9.

Eine Verallgemeinerung der Singularitätensätze.

Die im vorigen Paragraphen bewiesenen Sätze lassen noch eine Verallgemeinerung zu auf den Fall, daß die in den Sätzen genannten Voraussetzungen über die Koeffizienten a_n nur für eine unendliche Teilfolge derselben:

$$a_\alpha, a_{\alpha+r}, a_{\alpha+2r}, \ldots, a_{\alpha+nr}, \ldots,$$

deren Indizes eine arithmetische Progression bilden, erfüllt sind. Man kann sogar allgemein zeigen:

Satz 3. *Sind gewisse Voraussetzungen über die Folge aller Koeffizienten eines Funktionselements $f(z)$ hinreichend dafür, daß $f(z)$ in $+1$ eine singuläre Stelle hat, so besitzt eine Funktion*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

in mindestens einer r-ten Einheitswurzel eine singuläre Stelle, falls dieselbe Voraussetzungen nur für eine Teilfolge

$$c_\alpha, c_{\alpha+r}, \ldots, c_{\alpha+nr}, \ldots \quad \textit{mit} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[\alpha+nr]{|c_{\alpha+nr}|} = 1$$

ihrer Koeffizienten erfüllt sind, deren Indizes eine arithmetische Progression von der Differenz r bilden.

Beweis: Will man die aus den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen auf Grund des Satzes 3 hervorgehenden Verallgemeinerungen beweisen, so kann man auf $h(z)$ statt der Transformation (III) des § 5 die allgemeinere Transformation, die zu

$$E(z, y) = [z_0 + (z - z_0)\, y^r]\, y^{r k+1}$$

gehört, anwenden, wobei r die Differenz der genannten arithmetischen Progression ist und die andern Größen dieselbe Bedeutung wie in § 5 haben. Man erhält dann die Sätze sofort in der verallgemeinerten Form.

Zweckmäßiger ist es aber, folgenden Kunstgriff anzuwenden: Ist $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ in allen r-ten Einheitswurzeln $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{r-1}$ regulär, so sind die sämtlichen Funktionen:

$$H(z) = \frac{1}{z^\alpha}\{h(z) - [c_0 + c_1 z + \ldots + c_{\alpha-1} z^{\alpha-1}]\} = c_\alpha + c_{\alpha+1} z + \ldots,$$

$$H(\omega z) = \frac{1}{\omega^\alpha z^\alpha}\{h(\omega z) - [c_0 + c_1 \omega z + \ldots + c_{\alpha-1} \omega^{\alpha-1} z^{\alpha-1}]\}$$
$$= c_\alpha + c_{\alpha+1} \omega z + \ldots,$$

$$H(\omega^{r-1} z) = \frac{1}{\omega^{(r-1)\alpha} z^\alpha}\{h(z) - [c_0 + c_1 \omega^{r-1} z + \ldots + c_{\alpha-1} \omega^{(\alpha-1)(r-1)} z^{\alpha-1}]\}$$
$$= c_\alpha + c_{\alpha+1} \omega^{r-1} z + \ldots$$

im Innern des Einheitskreises sowie in $z = +1$ regulär. Dasselbe gilt dann auch von der Funktion:

$$F(z) = \frac{1}{r}\{H(z) + H(\omega z) + \ldots + H(\omega^{r-1} z)\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\alpha+nr} z^{nr}.$$

Erfüllen nun die Koeffizienten von $F(z)$ Voraussetzungen der im Satz genannten Art, so ist $F(z)$ in $+1$ singulär und daher hat $h(z)$ in mindestens einer r-ten Einheitswurzel eine singuläre Stelle. Damit ist der Beweis schon fertig.

Von Interesse ist noch die Anwendung unseres Satzes auf den Lückensatz des vorigen Paragraphen. Ist die dort genannte Lückenbedingung nur für eine Teilfolge der Koeffizienten a_n von $f(z)$ erfüllt, deren Indizes eine arithmetische Progression von der Differenz r bilden, so folgert man aus Satz 3, daß von jedem dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären r-Eck

mindestens eine Ecke eine singuläre Stelle von $f(z)$ ist. Bedenkt man noch, daß die Menge der singulären Punkte von $f(z)$ auf dem Einheitskreis abgeschlossen ist, so erkennt man, daß diese Menge $\mathfrak{M}$ folgende merkwürdige Struktur hat:

$\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen und enthält von jedem, dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären r-Eck mindestens einen Eckpunkt.

Wir stellen noch fest, daß das Lebesguesche Maß $|\mathfrak{M}|$ von $\mathfrak{M}$ mindestens gleich $\frac{2\pi}{r}$ ist. Zunächst ist nämlich $\mathfrak{M}$ als Komplementärmenge der offenen Menge der regulären Punkte von $f(z)$ auf dem Einheitskreis jedenfalls im Lebesgueschen Sinn meßbar. Bezeichnet man weiter mit $\mathfrak{M}_\varphi$ die Menge, die aus $\mathfrak{M}$ durch Drehung um den Nullpunkt durch den Winkel φ entsteht, so ist

$$|\mathfrak{M}_\varphi| = |\mathfrak{M}|.$$

Bildet man die Vereinigungsmenge:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_{\frac{2\pi}{r}} + \cdots + \mathfrak{M}_{(r-1)\frac{2\pi}{r}},$$

so ist weiter

$$|\mathfrak{B}| = 2\pi,$$

da $\mathfrak{B}$ doch den ganzen Einheitskreis überdeckt. Andrerseits ist

$$|\mathfrak{B}| \leqq |\mathfrak{M}| + |\mathfrak{M}_{\frac{2\pi}{r}}| + \cdots + |\mathfrak{M}_{(r-1)\frac{2\pi}{r}}| = r\,|\mathfrak{M}|$$

und somit gilt, wie behauptet:

$$|\mathfrak{M}| \geqq \frac{2\pi}{r}.$$

(Eingegangen am 20. August 1928.)

Über ausgezeichnete Tangenten einer regulären Kurve.

Von

St. Gołąb in Kraków (Polen).

Einleitung.

Unter einer *regulären* Kurve verstehe ich in der vorliegenden Arbeit eine Kurve C in R_3 mit den Gleichungen:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \tag{1}$$

wobei die Funktionen $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ folgende Bedingungen erfüllen:

1. Sie besitzen in dem endlichen und abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung (rechtsseitige im Punkte a, linksseitige im Punkte b).

2. Die Matrix der ersten und zweiten Ableitungen:

$$\begin{Vmatrix} f'(t), & g'(t), & h'(t) \\ f''(t), & g''(t), & h''(t) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

ist in jedem Punkte des Intervalles $[a, b]$ von der zweiten Ordnung.

Es ist bekannt, daß die Kurve C bei diesen Voraussetzungen in jedem Punkte des Intervalles $[a, b]$ eine bestimmte Tangente, Hauptnormale, Binormale, und einen endlichen, von Null verschiedenen und stetigen Krümmungsradius besitzt.

Es bezeichne l eine gegebene Gerade; gibt es wenigstens zwei verschiedene Punkte t_1 und t_2 im Intervalle $[a, b]$ derart, daß die Tangenten der Kurve C in den Punkten t_i $(i = 1, 2)$ mit der Geraden l zusammenfallen, so nennen wir die Gerade l eine *ausgezeichnete Tangente* der Kurve C.

Es ist leicht zu beweisen, daß jede ausgezeichnete Tangente der Kurve C endlich viele Berührungspunkte besitzt, wenn C im Intervalle $[a, b]$ regulär ist.

Herr Hoborski hat folgende Frage aufgestellt: Kann die Menge (T_0) der ausgezeichneten Tangenten einer regulären Kurve unendlich sein?

In der vorliegenden Arbeit löse ich dieses Problem im bejahenden Sinne (§ 4), außerdem beweise ich einen Satz (§ 1), aus dem zu ersehen ist, daß die Menge (T_0) endlich ist, wenn die reguläre Kurve C eine weitere einfache Bedingung erfüllt.

Die Arbeit zerfällt in vier Paragraphen, und zwar:

In dem § 1 wird der oben erwähnte Hauptsatz ausgesprochen und einige einleitende Bemerkungen gegeben. Der § 2 enthält einen (im übrigen bekannten) Hilfssatz. Dieser Hilfssatz reduziert das behandelte Problem zu einer analogen Aufgabe für ebene Kurven (§ 3) und erlaubt deswegen zu hoffen, daß sich das Hauptproblem auf eine reguläre Kurve in R_n verallgemeinern läßt. In dem § 4 gebe ich zwei Beispiele von ebenen Kurven mit unendlich vielen ausgezeichneten Tangenten. Aus diesen Beispielen geht hervor, daß die Voraussetzungen des Hauptsatzes für das Problem wesentlich sind.

§ 1.

Hauptsatz.

Wenn die Kurve C in dem Intervalle $[a, b]$ in oben angegebenem Sinne regulär ist und wenn sie keine vielfachen Punkte mit gemeinsamer Tangente besitzt[1]*, so ist die Menge (T_0) ihrer ausgezeichneten Tangenten endlich*[2].

Vor allem wollen wir bemerken, daß sich dieser Satz „lokal" sehr leicht beweisen läßt. Wir können sogar einen weitergehenden Satz[3] aussprechen: „Wenn t_0 einen beliebigen Punkt der regulären Kurve C bezeichnet, so läßt sich ein Bogen $\overset{\frown}{AB}$ der Kurve C derart finden, daß der Punkt t_0 ein innerer Punkt dieses Bogens ist, und daß jede Tangente des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ mit dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ nur einen einzigen Berührungspunkt gemeinsam hat." Es genügt zu diesem Zwecke zu beweisen, daß der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ so bestimmt werden kann, daß zwei Tangenten davon nie parallel sind. Den Beweis kann man leicht durchführen. Unter Voraussetzung der Unrichtigkeit dieses Satzes gelangt man nämlich leicht zu der Folgerung, daß die Matrix (2) für $t = t_0$ von der ersten Ordnung ist, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

---

[1]) Es wird damit vorausgesetzt, daß die Matrix

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} f'(t_1), & g'(t_1), & h'(t_1) \\ f'(t_2), & g'(t_2), & h'(t_2) \end{matrix} \right\|$$

von der zweiten Ordnung ist, wenn $f(t_1) = f(t_2)$, $g(t_1) = g(t_2)$, $h(t_1) = h(t_2)$ ausfällt.

[2]) Im besonderen folgt daraus, daß die Menge (T_0) für jede reguläre Kurve C ohne vielfache Punkte stets endlich ist.

[3]) Ich zitiere an dieser Stelle einen bis jetzt noch nicht veröffentlichten Satz des Prof. Hoborski.

Zwecks Übergang von dem lokalen Problem zu einem integralen schicken wir zwei Hilfssätze voraus; der erste bezieht sich auf gewisse Eigenschaft ebener Kurven, die durch orthogonale Projektion räumlicher Kurven entstehen, der zweite betrifft ebene reguläre Kurven.

Hilfssatz I. Es sei C eine im Intervalle $[a, b]$ reguläre Kurve und (π) die Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \tag{4}$$

Es seien $\{F(t), G(t), H(t)\}$ die Koordinaten der orthogonalen Projektion des Punktes $\{f(t), g(t), h(t)\}$ auf die Ebene (π), und $\bar{C}$ sei die Kurve

$$x = F(t), \quad y = G(t), \quad z = H(t) \qquad (a \leqq t \leqq b). \tag{5}$$

Man erhält:

$$F(t) = f(t) - \alpha\sigma(t), \quad G(t) = g(t) - \beta\sigma(t), \quad H(t) = h(t) - \gamma\sigma(t), \tag{6}$$

wo

$$\sigma(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ersehen wir, daß die Funktionen F, G, H im ganzen Intervalle $[a, b]$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben. Betrachten wir die Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} F'(t), & G'(t), & H'(t) \\ F''(t), & G''(t), & H''(t) \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

und bezeichnen wir mit Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ die Determinanten zweiten Grades der Matrix (2), mit $\bar{\Delta}_i$ die entsprechenden Determinanten der Matrix (8). Ist t die Bogenlänge der Kurve C, so gilt

$$\bar{\Delta}_1 = \alpha W, \quad \bar{\Delta}_2 = \beta W, \quad \bar{\Delta}_3 = \gamma W, \tag{9}$$

wo

$$W = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2 + \gamma\Delta_3, \tag{10}$$

also

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{\Delta}_i^2 = W^2 \tag{11}$$

ist. Daraus ist ersichtlich, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Matrix (8) von der zweiten Ordnung ist (und mithin auch dafür, daß die Kurve $\bar{C}$ in dem Punkte t einen endlichen und stetigen Krümmungsradius besitzt), beruht darin, daß

$$W(t) \neq 0 \tag{12}$$

ausfällt.

§ 2.

Ein Hilfssatz aus der Theorie der Enveloppen.

Hilfssatz II. Es sei Γ eine ebene Kurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

wobei die Funktionen φ, ψ zweimal stetig differentiierbar sind; außerdem soll $\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'' \neq 0$ sein. Bezeichnet (R) die Tangentenschar der Kurve Γ, so ist Γ für (R) eine Resultante[4]), d. h. bedeutet t_0 irgendeinen Punkt des Intervalles $[a, b]$, so schneidet die Tangente im Punkte $t_0 + h$ (wobei $|h| \neq 0$ und genügend klein ist) die Tangente im Punkte t_0, und der Schnittpunkt konvergiert für $h \to 0$ gegen den zu t_0 gehörigen Punkt von Γ. Der Beweis mag dem Leser überlassen bleiben.

§ 3.

Wir wollen nun den Hauptsatz beweisen. Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir an, daß die Kurve C eine unendliche Menge (T_0) von ausgezeichneten Tangenten besitzt. Zu jeder Geraden der Menge (T_0) gehören mindestens zwei voneinander verschiedene Werte des Parameters t, die den Berührungspunkten der gewählten Geraden mit der Kurve C entsprechen. Wir wollen die Menge dieser t mit (B) bezeichnen. Die Menge (B) ist unendlich. Da sie auch beschränkt ist, so ist ihre abgeleitete Menge $D(B)$ nicht leer. Wir können zwei Fälle unterscheiden: Entweder enthält $D(B)$ ein einziges Element t_0, oder aber mehrere, voneinander verschiedene Zahlen. Im ersten Falle sind zwei Unterfälle denkbar: entweder gibt es in jeder Umgebung des Punktes t_0 zwei voneinander verschiedene Zahlen t_1 und t_2 derart, daß die Tangenten in diesen Punkten zusammenfallen, was aber dem Satze aus § 1 widerspricht, oder es existiert in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes t_0 nur *ein* Berührungspunkt der ausgezeichneten Tangente. Da außerhalb dieser Umgebung sich nur eine endliche Menge von Berührungspunkten aller ausgezeichneten Tangenten vorfindet, so muß es dann auf C einen Punkt $t = \tau_0$ geben, der außerhalb der erwähnten Umgebung des Punktes $t = t_0$ liegt und durch welchen unendlich viele voneinander verschiedene ausgezeichnete Tangenten hindurchgehen. Dies bedeutet aber, daß der Punkt $M(\tau_0)$ ein unendlich vielfacher Punkt der Kurve C ist, und dies widerspricht der Voraussetzung, daß die Matrix (2) von zweiter Ordnung ist, im besonderen der Ungleichung

$$f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t) \neq 0.$$

---

[4]) Der Name rührt vom Herrn Prof. Wilkosz her. Siehe W. Wilkosz, Aspetto integrale delle curve inviluppi, Annal. d. l. Soc. Pol. d. Math. 1 (1922).

Wir wollen jetzt den zweiten Fall betrachten, wo zu der Menge $D(B)$ mehr als eine Zahl gehört. Es gehöre t_1 zur Menge $D(B)$ und es bezeichne γ_n eine unendliche Zahlenfolge aus der Menge B, wobei $\gamma_n \neq t_1$, $\gamma_n \to t_1$, wenn $n \to \infty$. Der Folge $\{\gamma_n\}$ entspricht eine Folge (l_n) von ausgezeichneten Tangenten. Es sei $t = \delta_n$ ein zweiter Berührungspunkt der Tangente (l_n). Nach dem Obigen kann t_1 kein Häufungspunkt der Folge $\{\delta_n\}$ sein. Es sei also t_2 $(t_2 \neq t_1)$ ein Häufungspunkt dieser Zahlenfolge, aus welcher wir eine Folge $\{\delta_n'\}$ auswählen mit der Zahl t_2 als Grenze $(\delta_n' \to t_2$, $\delta_n' \neq t_2)$. Es sei $\{\gamma_n'\}$ die zugehörige Teilfolge der Folge $\{\gamma_n\}$. Nehmen wir zwecks Zurückführung ad absurdum nun an, daß die Punkte $M(t_1)$ und $M(t_2)$ $(t_1 \neq t_2)$ zusammenfallen. Dann ist die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f'(t_1), & g'(t_1), & h'(t_1) \\ f'(t_2), & g'(t_2), & h'(t_2) \end{matrix} \right\|$$

von der zweiten Ordnung[5]). Folglich ist dann die Ordnung der Matrix $\| f'(\sigma), f'(\varrho) \|$ in genügend kleiner Umgebung des Punktes $\varrho = t_1$, $\sigma = t_2$ gleich 2, was sich aus der Stetigkeit der Ableitungen f', g', h' ergibt. Es gibt folglich eine natürliche Zahl N derart, daß für $n \geqq N$ die Matrix $\| f'(\gamma_n'), f'(\delta_n') \|$ von der zweiten Ordnung ist, während diese Matrix bei jedem Werte des Index n von der ersten Ordnung ist, da γ_n', δ_n' Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente darstellen. In Betracht dessen muß $M(t_1)$ von $M(t_2)$ verschieden sein.

Wählen wir jetzt die Ebene (4) derart, daß $W(t_1) \neq 0$ und gleichzeitig $W(t_2) \neq 0$ ausfällt, was möglich ist, da sonst entweder $\Delta_i(t_1) = 0$ oder $\Delta_i(t_2) = 0$ gelten müßte für $i = 1, 2, 3$, was aber der Voraussetzung widerspricht, daß die Matrix (2) im Intervalle $[a, b]$ den Rang 2 hat.

Infolge der Stetigkeit der Funktion $W(t)$ [siehe (10)] kann man Umgebungen $[t_1 - \delta_0, t_1 + \delta_0]$, $[t_2 - \delta_0, t_2 + \delta_0]$ der Punkte t_1 und t_2 finden derart, daß dabei stets $W(t) \neq 0$ gilt. Auf Grund des Hilfssatzes im § 1 schließen wir daraus, daß die Kurve $\bar{C}$ in den Punkten $\bar{M}(t_1)$ und $\bar{M}(t_2)$ $\{\bar{M}(\tau)$ bezeichnet den Punkt $t = \tau$ der Kurve $\bar{C}\}$ und ihren Umgebungen einen stetigen und endlichen Krümmungsradius besitzt. Wir behaupten jetzt, daß die Punkte $\bar{M}(t_1)$ und $\bar{M}(t_2)$ nicht zusammenfallen. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, daß die Tangente der Kurve C in dem Punkte $M(t_1)$ nicht orthogonal zu (4) ist. Sonst wäre nämlich

$$f'(t_1) = \varepsilon\alpha, \quad g'(t_1) = \varepsilon\beta, \quad h'(t_1) = \varepsilon\gamma \qquad (\varepsilon^2 = 1),$$

was die Gleichung $W(t_1) = 0$ zur Folge hat, welche der oben festgesetzten Wahl der Ebene (4) widerspricht.

---

[5]) Siehe § 1.

Betrachten wir jetzt eine unendliche Folge von Tangenten mit den Berührungspunkten $t = \gamma_n'$. Wegen $M(\gamma_n') \to M(t_1)$, $M(\delta_n') \to M(t_2)$ und $M(t_1) \neq M(t_2)$ ist die Verbindungsgerade der Punkte $M(t_1)$, $M(t_2)$ eine Grenzlage der betrachteten Tangentenfolge. Diese Grenzgerade ist der Stetigkeit zufolge die Tangente von C im Punkte $M(t_1)$ und $M(t_2)$. Sie ist, wie wir oben nachgewiesen haben, *nicht* orthogonal zu der Ebene (4), folglich müssen die Projektionen $\overline{M}(t_1)$ und $\overline{M}(t_2)$ zwei verschiedene Punkte der Ebene (4) sein.

Nehmen wir N so groß an, daß γ_n' in die Umgebung $[t_1 - \delta_0, t_1 + \delta_0]$ und zugleich δ_n' in die Umgebung $[t_2 - \delta_0, t_2 + \delta_0]$ fällt, sobald $n \geqq N$ ist. Dann kann auch die Tangente der Kurve C im Punkte $M(\gamma_n')$ nicht zu der Ebene (4) orthogonal sein, ihre Projektion ist also wieder eine Gerade, die, wie man leicht beweisen kann, eine Tangente der Kurve $\bar{C}$ im Punkte $\overline{M}(\gamma_n')$ ist.

Den Teil der Menge (T_0), der der Folge $t = \gamma_n'$ für $n \geqq N$ entspricht, bezeichnen wir mit (T_1), und seine Projektion auf (4) mit $(\bar{T}_1)$. Unendlich viele von den Tangenten der Menge $(\bar{T}_1)$ müssen voneinander verschieden sein. Dies ergibt sich folgendermaßen: die Werte $t = \gamma_n'$ sind voneinander verschieden, sie liegen in der Umgebung des Punktes t_1, in welchem der Krümmungsradius der Kurve $\bar{C}$ endlich $(\neq 0)$ und stetig ist; endlich fällt die Tangente der Kurve $\bar{C}$ im Punkte $\overline{M}(\gamma_n')$ mit der Tangente im Punkte $\overline{M}(\delta_n')$ zusammen. — Bezeichnen wir die Tangente der Kurve $\bar{C}$ im Punkte $\overline{M}(\gamma_n')$ kurz mit $\bar{l}_n$, mit P_n aber den Schnittpunkt (wenn er existiert) der Tangente $\bar{l}_n$ und der Tangente $\bar{l}_0$ im Punkte $\overline{M}(t_1)$ oder — was auf dasselbe hinauskommt — im Punkte $\overline{M}(t_2)$. Nach dem Hilfssatz des § 2 gibt es daher einen Punkt P_n für $n \geqq N_1 \geqq N$, und es gilt dabei einerseits $P_n \to \overline{M}(t_1)$, anderseits aber $P_n \to \overline{M}(t_2)$, und dies ist wegen $\overline{M}(t_1) \neq \overline{M}(t_2)$ unmöglich. Damit haben wir den Hauptsatz bewiesen

Anmerkung. Auf Grund der Voraussetzungen, die wir oben gemacht haben, ist nicht nur die Menge (T_0), sondern auch diejenige ihrer Berührungspunkte endlich.

§ 4.

Wir wollen noch zwei Beispiele anführen, welche zeigen, daß die Voraussetzungen des Hauptsatzes zwar nicht notwendig, aber im gewissen Sinne wesentlich sind.

Beispiel I. Es sei $h(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv t$, und

$$g(-\beta) = g(\beta) = 0, \quad g(t) = (t+\beta)^6 \cos\frac{1}{t+\beta} \quad \text{für } 0 < |t+\beta| \leqq \lambda,$$

$$g(t) = (t-\beta)^6 \cos\frac{1}{t-\beta} \text{ für } 0 < |t-\beta| \leqq \lambda, \quad g(t) = at^2 + b \text{ für } |t| \leqq \beta - \lambda,$$

wobei der Kürze halber

$$\lambda = \frac{1}{4\pi}, \quad \beta = \lambda \frac{1-24\lambda^2}{1-30\lambda^2}, \quad a = -\frac{\lambda^2}{2}(1-30\lambda^2), \quad b = \lambda^6 \frac{1-12\lambda^2}{1-30\lambda^2}$$

gesetzt ist. Endlich sei C_1 die Kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Funktionen f, g, h im Intervalle $[-\beta-\lambda, \beta+\lambda]$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben, daß C_1 keine vielfachen Punkte besitzt und daß die Matrix (2) für $t = -\beta$ und $t = \beta$ von der *ersten* Ordnung ist. Die Kurve C_1 besitzt *unendlich* viele voneinander verschiedene ausgezeichnete Tangenten.

Beispiel II. Es sei in dem Intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{9}{2}]$ eine Kurve C_2 wie folgt definiert: es gilt durchweg $h(t) \equiv 0$. Ferner ist

$$f(t) = t, \qquad g(t) = t^2 - t^5 \cos\frac{1}{t} \quad \text{für } -\frac{1}{4} \leqq t < 0;$$

$$f(t) = t, \qquad g(t) = t^2 \quad \text{für } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2};$$

$$f(t) = \frac{3}{4} - (t-1)^2, \quad g(t) = t - \frac{1}{4} \quad \text{für } \frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{2};$$

$$f(t) = 2 - t, \qquad g(t) = \frac{3}{2} - (t-2)^2 \quad \text{für } \frac{3}{2} \leqq t \leqq \frac{5}{2};$$

$$f(t) = (t-3)^2 - \frac{3}{4}, \quad g(t) = \frac{15}{4} - t \quad \text{für } \frac{5}{2} \leqq t \leqq \frac{7}{2};$$

$$f(t) = t - 4, \qquad g(t) = (t-4)^2 \quad \text{für } \frac{7}{2} \leqq t \leqq \frac{9}{2}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß C_2 alle Voraussetzungen des Hauptsatzes mit Ausnahme einer einzigen erfüllt: die Kurve hat im zweifachen Punkte ($t = 0$ und $t = 4$) eine zusammenfallende Tangente. Die Kurve besitzt, wie man sich leicht überzeugt, unendlich viele ausgezeichnete Tangenten.

(Eingegangen am 25. November 1928.)

Uber total monotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion.

Von

Isac Schoenberg in Jassy (Rumänien).

Es sei

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots$$

eine total monotone Folge reeller Zahlen, also

$$\Delta^k \mu_n = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \mu_{n+\nu} \geqq 0; \quad n, k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (\Delta^0 \mu_n = \mu_n).$$

Nach Herrn Hausdorff[1]) erscheinen diese Zahlen als Momente einer nicht abnehmenden Belegungsfunktion $\psi(t)$ im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$, also

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\psi(t) \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und wenn wir $\psi(0) = 0$, für $0 < t < 1$ aber $\psi(t) = \frac{1}{2}(\psi(t+0) + \psi(t-0))$ voraussetzen, so ist $\psi(t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ eindeutig festgelegt.

Bei einer Untersuchung über asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1 wurde ich auf folgende Frage geführt[2]): *Wann ist die Belegungsfunktion $\psi(t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ stetig?* Ich hatte dafür a. a. O. hinreichende Bedingungen angegeben. Herr Kaluza[3]) hat daraufhin eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden, indem er direkt ein für unsere Aufgabe charakteristisches asymptotisches Verhalten der Differenzen $\Delta^k \mu_n$ angibt.

---

[1]) F. Hausdorff, Momentprobleme für ein endliches Intervall, Math. Zeitschr. 16, S. 220—248, insbesondere § 1.

[2]) I. Schoenberg, Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, Math. Zeitschr. 28, S. 171—199, insbesondere § 2.

[3]) Th. Kaluza, Über vollmonotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion, Math. Zeitschr. 28, S. 200—202.

Ich möchte hier auf diese Frage aus zwei Gründen noch einmal eingehen. Erstens scheint mir, daß der Satz von Herrn Kaluza sogar in den einfachsten konkreten Fällen nicht angewendet werden kann. Zweitens möchte ich die von mir aufgestellten Bedingungen ohne funktionentheoretische Hilfsmittel beweisen und auch zeigen, daß sie für die Stetigkeit von $\psi(t)$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig sind.

Es sei $\psi_1(t) = \psi(t)$ für $0 < t \leqq 1$, aber $\psi_1(0) = \psi(+0)$. Es ist also $\psi_1(t)$ im Nullpunkt stetig und deshalb ist die Momentfunktion

$$\Phi(s) = \int_0^1 t^s \, d\psi_1(t)$$

nicht nur für $\Re s > 0$ regulär, sondern auch für $\Re s \geqq 0$ stetig, was sehr leicht einzusehen ist[4]). Es bedeute $V^{(2)}(\psi)$ die Quadratsumme der Beträge der (höchstens abzählbar vielen) Sprünge von $\psi(t)$ in $0 \leqq t \leqq 1$, also das, was Herr N. Wiener als *quadratische Schwankung*[5]) von $\psi(t)$ bezeichnet. Es sei, wie üblich,

$$M\{|\Phi(i\lambda)|^2\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(i\lambda)|^2 \, d\lambda$$

gesetzt $(\lambda \geqq 0)$. Wir werden zeigen, daß dieser Mittelwert existiert und der Gleichung

$$|\mu_0 - \Phi(0)|^2 + M\{|\Phi(i\lambda)|^2\} = V^{(2)}(\psi) \tag{1}$$

genügt. Da $\psi(t)$ dann und nur dann stetig ist, wenn die quadratische Schwankung $V^{(2)}(\psi)$ verschwindet, so ist aus der Gleichung (1) folgendes Kriterium unmittelbar abzulesen:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stetigkeit von $\psi(t)$ sind

$$\Phi(0) = \mu_0 \quad \textit{und} \quad M\{|\Phi(i\lambda)|^2\} = 0\,.\ ^6) \tag{2}$$

Die hier auftretende Funktion $\Phi(s)$ kann man auch direkt mit Hilfe der Zahlen μ_n charakterisieren. Es ist nämlich $\Phi(s)$ die eindeutig bestimmte, für $\Re s > 0$ reguläre und beschränkte und für $\Re s \geqq 0$ stetige Lösung des

---

[4]) Vgl. I. Schoenberg a. a. O.[2]), S. 182 ff.

[5]) N. Wiener, The Quadratic Variation of a Function and its Fourier Coefficients, Journal of Math. and Phys. Massachusetts **3** (1924), S. 72—94, insbesondere §§ 1 und 2.

[6]) A. a. O.[2]) benutzte ich $M\{|\Phi(i\lambda)|\} = 0$ anstatt von $M\{|\Phi(i\lambda)|^2\} = 0$, aber die erste Gleichung folgt nach der Schwarzschen Ungleichung aus der zweiten und a. a. O. [2]), S. 199 ist gezeigt worden, daß auch die Umkehrung richtig ist.

Interpolationsproblems[6a])

$$\Phi(n) = \mu_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir werden hier die Gleichung (1) aus einem Satz gewinnen, den man mühelos aus den allgemeinen Ergebnissen von Herrn N. Wiener[7]) über die harmonische Analyse willkürlicher Funktionen ableiten könnte. Doch kommt hier nur ein so spezieller Fall derselben in Betracht, daß man es vorziehen muß, den Satz direkt herzuleiten.

§ 1.

Ein Satz über trigonometrische Integrale.

Es sei $z(\lambda)$ eine nicht notwendig reellwertige Funktion von beschränkter Schwankung für $-\infty < \lambda < \infty$. Dann hat

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda}\, dz(\lambda) \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

einen Sinn. Wir machen die Annahme $z(\lambda) = \frac{1}{2}(z(\lambda+0) + z(\lambda-0))$, was den Wert von $f(x)$ nicht ändert.

Es sei $V^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} |dz(\lambda)|$ die Totalschwankung von $z(\lambda)$ und $V^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} |dz(\lambda)|^2$ die quadratische Schwankung.

Hilfssatz. *Ist unser $z(\lambda)$ durchweg stetig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $T_0(\varepsilon) > 0$ derart, so daß $\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| < \varepsilon$ gilt für $T > T_0(\varepsilon)$ und $-\infty < \lambda < \infty$.*

Es ist also $M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = 0$, und zwar gilt die Grenzgleichung gleichmäßig in λ.

Beweis. Aus (3) folgt

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\mu}\, dz(\mu)\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{ix(\mu-\lambda)}\, dx\right) dz(\mu),$$

also

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iT(\mu-\lambda)} - 1}{iT(\mu-\lambda)}\, dz(\mu).$$

[6a]) Vgl. a. a. O.[2]), S. 185, und G. H. Hardy, On two theorems of F. Carlson and S. Wiegert, Acta Math. 42, S. 327–339.

[7]) N. Wiener, The Spectrum of an arbitrary Function, London Math. Society (2) 27 (1928), S. 483–496.

Setzt man zur Abkürzung

$$h(T,\mu,\lambda)=\frac{e^{iT(\mu-\lambda)}-1}{iT(\mu-\lambda)} \qquad (h=1 \quad \text{für} \quad \mu=\lambda),$$

so gilt $|h(T,\mu,\lambda)|\leqq 1$. Für $\delta>0$ ist

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(T,\mu,\lambda)\,dz(\mu)\right| \leqq \left|\int_{-\infty}^{\lambda-\delta} h\,dz\right| + \left|\int_{\lambda+\delta}^{\infty} h\,dz\right| + \left|\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} h\,dz\right|.$$

In den beiden ersten Integralen, also für $|\mu-\lambda|\geqq\delta$, ist

$$|h(T,\mu,\lambda)|=\left|\frac{e^{iT(\mu-\lambda)}-1}{iT(\mu-\lambda)}\right| \leqq \frac{2}{T\cdot\delta}<\varepsilon \quad \text{für} \quad T>\frac{2}{\delta\cdot\varepsilon},$$

also

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(T,\mu,\lambda)\,dz(\mu)\right| \leqq \varepsilon\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|dz(\mu)| + \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta}|dz(\mu)|$$

oder

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right| \leqq \varepsilon\cdot V^{(1)} + \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta}|dz(\mu)| \quad \text{für} \quad T>\frac{2}{\delta\cdot\varepsilon}.$$

Aus der Stetigkeit von $z(\mu)$ für $-\infty<\mu<\infty$ folgt[8]) die gleichmäßige Stetigkeit der Schwankung $\int_{-\infty}^{\mu}|dz(\mu)|$ für $-\infty<\mu<\infty$. Es gibt also ein passendes $\delta=\delta_0(\varepsilon)$, so daß $\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta}|dz(\mu)|<\varepsilon$ wird für alle λ. Aus der letzten Abschätzung folgt daher

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right| \leqq (V^{(1)}+1)\cdot\varepsilon \quad \text{für} \quad T>\frac{2}{\varepsilon\cdot\delta_0(\varepsilon)} \quad \text{und alle } \lambda.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Für den allgemeinen Fall eines unstetigen $z(\lambda)$ folgt aus unserem Beweis mühelos die Beziehung

$$M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\}=z(\lambda+0)-z(\lambda-0)$$

für jedes feste λ.

Satz. *Es ist*

$$M\{|f(x)|^2\}=V^{(2)}, \tag{4}$$

also gleich der quadratischen Schwankung von $z(\lambda)$ *in* $-\infty<\lambda<\infty$.

Den Beweis führen wir schrittweise.

a) *Es sei* $z(\lambda)$ *zunächst durchweg stetig.*

Dann ist $V^{(2)}=0$ und wir haben zu beweisen, daß $M\{|f(x)|^2\}=0$

[8]) Vgl. z. B. Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse 2 (1928), S. 48.

gilt. Nun ist aber

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda}\,d\overline{z(\lambda)}\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-ix\lambda}\,dx\right)d\overline{z(\lambda)},$$

also nach dem Hilfssatz

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx < \varepsilon\cdot\int_{-\infty}^{\infty} |\,d\overline{z(\lambda)}\,| = \varepsilon\cdot V^{(1)} \quad \text{für} \quad T > T_0(\varepsilon),$$

also in der Tat $M\{|f(x)|^2\} = 0$.

b) *Es sei unser $z(\lambda)$ eine „Treppenfunktion"*, die an den Sprungstellen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ die Sprünge $A_1, A_2, A_3, \ldots$ erleidet[9]). Aus (3) folgt dann die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,e^{ix\Lambda_n}; \qquad \sum_1^{\infty} |A_n| = V^{(1)} < +\infty.$$

Wir haben zu zeigen, daß $M\{|f(x)|^2\} = \sum_1^{\infty} |A_n|^2$ ist[10]). Absolut konvergierende Reihen darf man gliedweise multiplizieren. Mithin gilt

$$|f(x)|^2 = (\sum A_n\,e^{i\Lambda_n x})(\sum \bar{A}_n\,e^{-i\Lambda_n x}) = \sum_1^{\infty} |A_n|^2 + \sum_1^{\infty} B_n\,e^{iM_n x},$$

wobei alle $M_n \neq 0$ sind und $\sum_1^{\infty} |B_n|$ konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$. Man wähle m derart, daß

$$\sum_{m+1}^{\infty} |B_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Dann ist

$$\left||f(x)|^2 - \sum_1^{\infty} |A_n|^2 - \sum_1^{m} B_n\,e^{iM_n x}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

folglich

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx - \sum_1^{\infty} |A_n|^2 - \sum_1^{m} B_n\,\frac{e^{iM_n T}-1}{iM_n T}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[9]) Sollte unsere Funktion überhaupt keine oder nur endlich viele Sprünge haben, so denke man sich dieselben durch Hinzunahme beliebiger Stetigkeitsstellen zu einer abzählbaren Folge vervollständigt.

[10]) Es handelt sich um einen trivialen Spezialfall der Bohrschen Vollständigkeitsrelation.

Für $T > T_1(\varepsilon)$ ist aber

$$\left| \sum_1^m B_n \frac{e^{i M_n T} - 1}{i M_n T} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx - \sum_1^\infty |A_n|^2 \right| < \varepsilon,$$

w. z. b. w.

c) *Das allgemeinste* $z(\lambda)$ läßt sich so darstellen:

$$z(\lambda) = \zeta(\lambda) + z_0(\lambda),$$

wobei $\zeta(\lambda)$ eine Treppenfunktion und $z_0(\lambda)$ durchweg stetig ist. Für die Sprungstellen[9]) von $z(\lambda)$, also von $\zeta(\lambda)$, behalten wir die Bezeichnungen von Fall b) bei.

Setzen wir

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda} d\zeta(\lambda), \qquad f_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda} dz_0(\lambda),$$

so ist $f(x) = \varphi(x) + f_0(x)$, mithin

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{T} \int_0^T (\varphi + f_0)(\bar{\varphi} + \bar{f}_0) dx$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T |\varphi|^2 dx + \frac{1}{T} \int_0^T \varphi \bar{f}_0 dx + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\varphi} f_0 dx + \frac{1}{T} \int_0^T |f_0|^2 dx.$$

Nach a) gilt $\frac{1}{T} \int_0^T |f_0|^2 dx \to 0$ für $T \to \infty$. Dasselbe folgt für die beiden mittleren Integrale aus

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\varphi} f_0 dx \right| \leqq V^{(1)} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T |f_0| dx \leqq V^{(1)} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f_0|^2 dx}.$$

Nach b) ist $\frac{1}{T} \int_0^T |\varphi|^2 dx \to \sum_1^\infty |A_n|^2$, also

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx \to \sum_1^\infty |A_n|^2 = V^{(2)}.$$

Damit ist der Satz (4) bewiesen.

§ 2.

Anwendung auf die Stetigkeitsfrage bei dem Momentenproblem.

Um die Gleichung (1) zu beweisen, führen wir in $\Phi(i\lambda)=\int_0^1 t^{i\lambda}\,d\psi_1(t)$ mittels $t=e^{-x}$ die Variable x ein und erhalten

$$\Phi(i\lambda)=-\int_0^\infty e^{-i\lambda x}\,d\psi_1(e^{-x}).$$

Nach § 1 ist daher

$$M\{|\Phi(i\lambda)|^2\}=V^{(2)}(\psi_1(e^{-x}))=V^{(2)}(\psi_1(t))=V^{(2)}(\psi(t))-|\psi(+0)-\psi(0)|^2.$$

Da hierbei $\Phi(0)=\psi(1)-\psi(+0)$, $\mu_0=\psi(1)-\psi(0)$, also $\psi(+0)-\psi(0)=\mu_0-\Phi(0)$ gilt, so ist damit (1) bewiesen.

Göttingen, den 28. Januar 1929.

(Eingegangen am 29. Januar 1929.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Es sei dauernd $k \geqq 5$, $x > 0$; k, x ganz. $F_k(x)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte in der abgeschlossenen k-dimensionalen Kugel

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 \leqq x;$$

weiter sei

$$P_k(x) = F_k(x) - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}.$$

Dann ist bekanntlich [1])

$$P_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),$$

aber für kein von x unabhängiges a [2])

$$P_k(x) = a x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Mit anderen Worten: Wird

$$\varrho_k(x) = \frac{P_k(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}}$$

---

[1]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 300—307; E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126—132; H. Petersson, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Abhandl. a. d. math. Seminar Hamburg 5 (1926), S. 116—150; A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 469—480.

[2]) E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden II, Math. Zeitschrift 24 (1924) S. 298—310, § 4. Folgt auch sofort aus den Resultaten von H. Petersson, loc. cit. [1]) und V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 154—160.

gesetzt, so ist die Folge

$$\varrho_k(1),\ \varrho_k(2),\ \ldots,\ \varrho_k(n),\ \ldots \tag{1}$$

beschränkt, aber nicht konvergent.

Es drängen sich nun naturgemäß folgende Fragen auf:

1. Wie sieht die Ableitung[3]) der Folge (1) aus?

2. Wie sind die konvergenten Teilfolgen von (1) beschaffen?

Der Behandlung dieser beiden Fragen sind die folgenden Zeilen gewidmet.

Wir wollen von nun an stets k gerade und $k \geqq 8$ voraussetzen. Die Ableitung der Folge (1) bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_k$. Allgemeiner, wenn

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{$\mathfrak{D}$}$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist, so werde die Ableitung der Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3), \ldots$$

mit $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$ bezeichnet.

Mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen wir positive absolute Konstanten, mit $c_1(k), c_2(k), \ldots$ positive Zahlen, die nur von k abhängen usw.

Wir wollen beweisen:

Satz 1. *Die Menge $\mathfrak{M}_k$ ist perfekt.*

Die Beweismethode des Satzes 1 gibt uns aber auch noch ein anderes Ergebnis von einem mehr quantitativen Charakter; nämlich: die Menge $\mathfrak{M}_k$ ist nicht „allzu dünn“; genauer: zwei nicht sehr kleine, zu $\mathfrak{M}_k$ komplementäre Intervalle können nicht allzu nahe aneinander liegen; ganz genau:

Satz 2[4]). *Es gibt ein $c_1(k) > 0$, so daß für je zwei zu $\mathfrak{M}_k$ komplementäre Intervalle (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2) mit $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2$ die Ungleichung gilt*

$$\gamma_2 - \delta_1 \geqq \operatorname{Min}\left(c_1(k),\ \frac{\delta_1 - \gamma_1}{400},\ \frac{\delta_2 - \gamma_2}{400}\right).$$

Weil es nicht mehr Mühe macht, beweise ich diese Sätze in einer etwas allgemeineren Form:

Satz 3. *Wenn ($\mathfrak{D}$) eine wachsende arithmetische Progression von natürlichen Zahlen ist*[5]), *so ist $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$ perfekt.*

---

[3]) Eine Zahl ξ heißt Häufungswert einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, wenn es eine Teilfolge dieser Folge gibt, die gegen ξ konvergiert. Die (offenbar abgeschlossene) Menge aller Häufungswerte der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißt die Ableitung dieser Folge.

[4]) Es wird auch $\gamma_1 = -\infty$ und $\delta_2 = +\infty$ zugelassen.

[5]) D. h. $x_1 > 0$ und ganz, $x_n - x_{n-1} > 0$, ganz und von n unabhängig.

Satz 4. *Wenn* $(\mathfrak{D})$ *eine wachsende arithmetische Progression von natürlichen Zahlen ist, so gibt es ein* $c_2(k, \mathfrak{D}) > 0$ [6]) *mit folgender Eigenschaft: Für je zwei zu* $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$ *komplementäre Intervalle* (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2) *mit* $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2$ *ist*

$$\gamma_2 - \delta_1 \geqq \operatorname{Min}\left(c_2(k, \mathfrak{D}),\ \frac{\delta_1 - \gamma_1}{400},\ \frac{\delta_2 - \gamma_2}{400}\right).$$

Die Sätze 1, 2 schließen noch nicht die Möglichkeit aus, daß $\mathfrak{M}_k$ vielleicht ein abgeschlossenes Intervall wäre; dies ist aber mindestens für große k nicht der Fall; denn es gilt

Satz 5. *Zu jedem* $m > 0$ *gibt es ein* $c_3(m) > 0$, *so daß für jedes* (*ganze, gerade*) $k > c_3(m)$ *die Menge* $\mathfrak{M}_k$ *mindestens* [7]) m *komplementäre Intervalle besitzt.*

Nun zu der zweiten Frage nach der Beschaffenheit der konvergenten Teilfolgen von (1)! Aus Satz 3 folgt: Es sei eine wachsende Folge

$$x_1, x_2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen gegeben; dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2), \ldots$$

sicher divergent, wenn die Differenz $x_n - x_{n-1}$ einer von n unabhängigen Zahl gleich ist. Wir werden beweisen, daß dieselbe Erscheinung allgemeiner auch dann auftritt, wenn $x_n - x_{n-1}$ *unter* einer von n unabhängigen Schranke liegt; d. h. wir beweisen den [8])

Satz 6. *Es sei*

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$$

$$x_n \text{ ganz}, \quad x_{n+1} - x_n = O(1) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3), \ldots$$

divergent.

Und noch etwas allgemeiner:

Satz 7. *Es sei*

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$$

$$x_n \text{ ganz}, \quad x_n = O(n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3), \ldots$$

divergent.

Und diese Sätze sind in einem gewissen Sinn scharf; denn wir werden noch die beiden folgenden Sätze beweisen:

---

[6]) D. h. eine positive Zahl, die nur von k und $(\mathfrak{D})$ abhängt.

[7]) Vielleicht auch unendlich viele.

[8]) In den Sätzen 6, 7, 8, 9 bezieht sich das Zeichen O auf ganzzahlig wachsendes n.

Satz 8. *Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}_k$ und $f(n)$ eine monotone Funktion der natürlichen Zahl n, für welche gilt*

$$f(n) \to +\infty \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Dann gibt es eine Folge von ganzen Zahlen

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

so daß

$$0 < y_1 < y_2 < \ldots, \qquad y_n - y_{n-1} = O(f(n))$$

und

$$\lim_{n=\infty} \varrho_k(y_n) = \xi.$$

Satz 9. *Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}_k$ und $f(n)$ eine monotone Funktion der natürlichen Zahl n, für welche gilt*

$$f(n) \to +\infty \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Dann gibt es eine Folge von ganzen Zahlen

$$y_1, y_2, y_3, \ldots,$$

so daß

$$0 < y_1 < y_2 < \ldots, \qquad y_n = O(n f(n))$$

und

$$\lim_{n=\infty} \varrho_k(y_n) = \xi.$$

Satz 9 folgt freilich aus Satz 8. Unsere Aufgabe besteht also darin, die Sätze 3, 4, 5, 7, 8 zu beweisen. Dabei ergeben sich die Sätze 5 und 8 durch geläufige Limesbetrachtungen.

§ 2.

Eine formale Umformung des Problems.

Nach Herrn Landau[9]) ist

$$F_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} + \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{(S_{p,q})^k}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

$\sum'$ bedeutet, daß nur über die zu q teilerfremden p zu summieren ist. $S_{p,q}$ ist die Gaußsche Summe

$$S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1}{}' e^{2\pi i \frac{p}{q} m^2}$$

---

[9]) In einer allgemeineren Form loc. cit. [1]), Formel (4); Formeln dieser Art gehen auf Herrn G. H. Hardy, On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five, Trans. Am. Math. Soc. 21 (1920), S. 255—284 zurück.

Nach bekannten Formeln[10]) ist

$$S_{p,q}=0 \quad \text{für} \quad q\equiv 2 \pmod 4,$$

$$S_{p,q}=e^{\pi i\frac{q-1}{4}}\left(\frac{-2p}{q}\right)\sqrt{q} \quad \text{für} \quad q\equiv 1 \pmod 2,$$

$$S_{p,q}=\sqrt{2}\,e^{\pi i\frac{p}{4}}\left(\frac{2q}{p}\right)\sqrt{q} \quad \text{für} \quad q\equiv 0 \pmod 4;$$

also ist

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{(S_{p,q})^k}{q^k}=\dfrac{\eta_{p,q}^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}}, \text{ wo} \\ \eta_{p,q}=0 \text{ für } q\equiv 2 \pmod 4, \quad \eta_{p,q}=(-1)^{\frac{q-1}{2}} \text{ für } q\equiv 1 \pmod 2, \\ \eta_{p,q}=2e^{\pi i\frac{p}{2}} \text{ für } q\equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Es ist also immer

$$(3)\qquad |S_{p,q}|\leqq\sqrt{2q}.$$

Wir setzen für ganzes $q\geqq 2$

$$(4)\qquad A_q(k,x)=A_q(x)=\frac{1}{x^{\frac{k}{2}-1}}\sum_{p=0}^{q-1}{}'\frac{S_{p,q}^k}{q^k}\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{k}{2}-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q}},$$

$$(5)\qquad B_q(k)=B_q=\sum_{p=0}^{q-1}{}'\frac{S_{p,q}^k}{q^k}\cdot\frac{1}{q}\sum_{r=0}^{q-1}re^{-2\pi i r\frac{p}{q}},$$

$$(6)\qquad B_q'(k,x)=B_q'(x)=\sum_{p=0}^{q-1}{}'\frac{S_{p,q}^k}{q^k}\sum_{r=0}^{x}e^{-2\pi i r\frac{p}{q}}.$$

Offenbar ist $B_q'(x_1)=B_q'(x_2)$, wenn $x_1\equiv x_2 \pmod q$.

Es gilt nun[11]) folgendes:

$$\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{k}{2}-1}=\frac{2}{k}x^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{k}{2}-1}+o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

$$\left|\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{k}{2}-1}e^{-2\pi i n\frac{p}{q}}\right|\leqq x^{\frac{k}{2}-1}\operatorname{Max}\left(\frac{q}{p},\frac{q}{q-p}\right)$$

$$(\text{für } 0<p<q,\ (p,q)=1).$$

---

[10]) Vgl. z. B. P. Bachmann, Zahlentheorie 2, S. 145—187 (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1921 — anastatischer Nachdruck der 1. Aufl.). Auch bei Petersson, loc. cit. [1]), S. 138, findet man diese Formeln zusammengestellt.

[11]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 2. Mitteilung, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 311—316, Hilfssatz 1 und 3.

Also ist

$$|A_q(x)| \leqq \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{q^{\frac{k}{2}-1}}(\log q + 1);$$

die Reihe $\sum_{q=2}^{\infty} A_q(x)$ ist also auf der Menge der natürlichen Zahlen x gleichmäßig konvergent; daher ist

$$(7) \qquad \varrho_k(x) = \frac{F_k(x) - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}}{x^{\frac{k}{2}-1}} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\frac{1}{2} + \sum_{q=2}^{\infty} A_q(x) + o(1)\right).$$

Wegen der trivialen Abschätzung

$$|B_q| \leqq \frac{2^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}-2}}, \qquad |B_q'(x)| \leqq \frac{2^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}-2}}$$

sind auch die Reihen $\sum_{q=2}^{\infty} |B_q|$, $\sum_{q=2}^{\infty} |B_q'(x)|$ auf der Menge der natürlichen Zahlen x gleichmäßig konvergent; weiter ist für jedes feste $q \geqq 2$ [12])

$$A_q(x) = B_q + B_q'(x) + o(1),$$

wo sich das Zeichen o auf ganzzahlig wachsendes x bezieht. Daher ist nach (7)

$$(8) \qquad \varrho_k(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\sum_{q=2}^{\infty} B_q'(x) + \frac{1}{2} + \sum_{q=2}^{\infty} B_q + o(1)\right).$$

Es ist nach (2) und (6) für $q \geqq 2$:

$$(9) \qquad \begin{cases} B_q'(x) = 0 \quad \text{für} \quad q \equiv 2 \pmod 4, \\ B_q'(x) = \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}\frac{q-1}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}} \sum_{r=0}^{x} {\sum_{p=0}^{q-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} \quad \text{für} \quad q \equiv 1 \pmod 2, \\ B_q'(x) = \dfrac{2^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}} \sum_{r=0}^{x} {\sum_{p=0}^{q-1}}' e^{-2\pi i \left(r - \frac{kq}{8}\right)\frac{p}{q}} \quad \text{für} \quad q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

---

[12]) V. Jarník, loc. cit. [11]), Hilfssatz 2. Man beachte, daß

$$\sum_{r=0}^{x} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}},$$

wenn $x \equiv R \pmod q$, $0 \leqq R < q$.

Dabei ist die Summe nach p bei jedem r eine ganze rationale Zahl (nämlich die Summe der r-ten bzw. $\left(r-\frac{kq}{8}\right)$-ten Potenzen allen primitiven q-ten Einheitswurzeln); wir haben also den

Hilfssatz 1. *Es sei für ganzes* $q>1$

$$\varepsilon_q = \left\{\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad q \equiv \left\{\begin{matrix}2 \pmod 4\\1 \pmod 2\\0 \pmod 4\end{matrix}\right\}.$$ [13])

Dann ist $B'_q(x)$ *ein Multiplum von* $\left(\frac{\varepsilon_q}{q}\right)^{\frac{k}{2}}$.

Insbesondere ist also $B'_q(x)$ reell. Aus (8) sehen wir nun (da B_q von x unabhängig ist): Statt der Folge

$$\varrho_k(1),\ \varrho_k(2),\ \dots \tag{1}$$

können wir die Folge

$$\sigma_k(1),\ \sigma_k(2),\ \dots \tag{10}$$

untersuchen, wo

$$\sigma_k(x) = \sum_{q=2}^{\infty} B'_q(x). \tag{11}$$

Genauer gesagt: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}_k$ die Ableitung der Folge (10); allgemeiner: Es sei

$$x_1, x_2, \dots \tag{$\mathfrak{D}$}$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen; dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ die Ableitung der Folge

$$\sigma_k(x_1),\ \sigma_k(x_2),\ \dots\ .$$

Wir haben dann fünf Sätze 3a, 4a, 5a, 7a, 8a zu beweisen, die bzw. aus den Sätzen 3, 4, 5, 7, 8 entstehen, indem wir dort $\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{M}_{k,\mathfrak{D}}$, $\varrho_k(x)$ durch $\mathfrak{N}_k$, $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, $\sigma_k(x)$ ersetzen [14]). Ich brauche diese Sätze wohl nicht explizite aufzuschreiben.

§ 3.

Hilfssätze.

Wir benutzen folgende geläufige Bezeichnungen:

Wenn n eine natürliche Zahl ist, so sei $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Restklassen modulo n; $\mu(n)$ sei gleich Null, wenn n nicht

---

[13]) Diese Bedeutung von ε_q wollen wir im folgenden stets festhalten.

[14]) Die Konstante $c_3(k, \mathfrak{D})$ wird dadurch freilich auch abgeändert; dagegen bleibt die Konstante $c_3(m)$ offenbar dieselbe.

quadratfrei ist; sonst sei $\mu(n) = (-1)^t$, wo t die Anzahl der in n aufgehenden Primzahlen ist.

Es sei T_n die Summe der n-ten primitiven Einheitswurzeln; es ist bekanntlich $T_1 = 1$; $T_n = -1$, wenn n eine Primzahl; $T_n = 0$, wenn $n = p^a$, p eine Primzahl, $a > 1$ ganz; $T_{nn'} = T_n T_{n'}$, wenn $(n, n') = 1$. Also ist stets $T_n = \mu(n)$.

Hilfssatz 2. *Es sei r ganz, $q > 0$ ganz, $(r, q) = d$. Dann ist*

$$\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right);$$

$\sum'$ bedeutet, daß nur über die zu q teilerfremden p zu summieren ist.

Beweis. $$\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r' \frac{p}{q'}},$$

wo $r' = \frac{r}{d}$, $q' = \frac{q}{d}$; also $(q', r') = 1$. Wir haben nur zu zeigen, daß unter den Zahlen $-r'p$ nur die zu q' teilerfremden Restklassen modulo q' vorkommen, und zwar jede genau $\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}$-mal; denn dann ist

$$\sum_{p=0}^{q-1}{}' e^{-2\pi i r' \frac{p}{q'}} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} T_{q'} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right),$$

was zu beweisen ist.

Nun hat die Kongruenz

$$-r'x \equiv a \pmod{q'},$$

wenn $(a, q') = 1$, genau eine Lösung $x = p_1$ modulo q', die von selbst zu q' teilerfremd ist. Diese gibt modulo $q = dq'$ zu d Lösungen Anlaß,

$$p_1,\ p_1 + q',\ p_1 + 2q',\ \ldots,\ p_1 + (d-1)q'; \tag{12}$$

alle diese Zahlen sind zu q' teilerfremd; es bleibt nur noch zu zeigen, daß genau $\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)}$ unter ihnen auch zu d teilerfremd sind. Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ die in q aufgehenden Primzahlen; $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ diejenigen unter ihnen, die nicht in q' aufgehen. Es sind unter den Zahlen (12) diejenigen aufzufinden, die teilerfremd zu $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t$ sind. Die Zahlen (12) durchlaufen aber offenbar $\frac{d}{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t}$ vollständige Restsysteme modulo $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t$; daher ist die Anzahl derjenigen unter ihnen, die zu $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_t$ teilerfremd

sind, gleich $\varphi(\pi_1 \pi_2 \dots \pi_t)\frac{d}{\pi_1 \pi_2 \dots \pi_t}$. Es ist aber

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')} = \frac{q\left(1-\frac{1}{\pi_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{\pi_s}\right)}{q'\left(1-\frac{1}{\pi_{t+1}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{\pi_s}\right)} = d\left(1-\frac{1}{\pi_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{\pi_t}\right)$$

$$= \varphi(\pi_1 \dots \pi_t)\frac{d}{\pi_1 \dots \pi_t}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn q, x, y natürliche Zahlen sind, $q>1$, $x>y$, so ist nach (9)

$$B_q'(x) - B_q'(y) = \pm \frac{\varepsilon_q^{\frac{k}{2}}}{q^{\frac{k}{2}}} \sum_{r=a}^{b} {\sum_{p=0}^{q-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}}, \tag{13}$$

wo $a = y+1$, $b = x$ für $q \not\equiv 0 \pmod 4$, $a = y+1-\frac{kq}{8}$, $b = x-\frac{kq}{8}$ für $q \equiv 0 \pmod 4$.

Hilfssatz 3. *Es seien q_1, l, x, y natürliche Zahlen, $1<l<q_1$, q_1 eine ungerade Primzahl, $q = lq_1$. Dann ist*

$$|B_q'(x) - B_q'(y)| \leqq \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}(\log l+1)}{q_1^{\frac{k}{2}-1} l^{\frac{k}{2}-1}} + 2\frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}}{q_1^{\frac{k}{2}} l^{\frac{k}{2}-2}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x>y$. Wir benutzen die Formel (13); dabei ist hier offenbar $\varepsilon_q = \varepsilon_{lq_1} = \varepsilon_l$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \leqq b < a+q$ (denn $\sum_{r=c}^{c+q-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = 0$).

Wir setzen $d = (r, q)$, $d' = (r, l)$; nach Hilfssatz 2 ist[15])

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{r=a}^{b} {\sum_{p=0}^{q-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{d}\right)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) = \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) \\ \displaystyle -\sum_{\substack{r=a \\ q_1 \mid r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) + \sum_{\substack{r=a \\ q_1 \mid r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(\frac{q_1 l}{d}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d}\right) = A_{\mathrm{I}} - A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}}. \end{cases} \tag{14}$$

Dabei ist nach Hilfssatz 2 (wegen $(l, q_1) = 1$)

$$A_{\mathrm{I}} = \sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) = -\sum_{r=a}^{b} \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{l}{d'}\right) = -\sum_{r=a}^{b} {\sum_{p'=0}^{l-1}}' e^{-2\pi i r \frac{p'}{l}},$$

[15]) $q_1 | r$ bedeutet: q_1 teilt r.

wobei über die zu l teilerfremden p' zu summieren ist. Wegen

$$\sum_{r=c}^{c+l-1} e^{-2\pi i r \frac{p'}{l}} = 0$$

ist also

$$|A_{\mathrm{I}}| \leqq l^2. \tag{15}$$

Weiter ist

$$A_{\mathrm{II}} = \sum_{\substack{r=a \\ q_1 \mid r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(q_1 \frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d'}\right) = -\sum_{\substack{r=a \\ q_1 \mid r}}^{b} \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d'}\right)} \mu\left(\frac{l}{d'}\right);$$

die Anzahl der Glieder ist höchstens l, also ist

$$|A_{\mathrm{II}}| \leqq l^2. \tag{16}$$

Endlich sollen wir

$$A_{\mathrm{III}} = \sum_{\substack{r=a \\ q_1 \mid r}}^{b} \frac{\varphi(q_1 l)}{\varphi\left(\frac{q_1 l}{d}\right)} \mu\left(\frac{q_1 l}{d}\right)$$

abschätzen. Es ist

$$A_{\mathrm{III}} = \varphi(q_1) \sum_{\frac{a}{q_1} \leqq s \leqq \frac{b}{q_1}} \frac{\varphi(l)}{\varphi\left(\frac{l}{d''}\right)} \mu\left(\frac{l}{d''}\right),$$

wo $d'' = (l, s)$. Also nach Hilfssatz 2

$$A_{\mathrm{III}} = \varphi(q_1) \sum_{p'=0}^{l-1}{}' \sum_{\frac{a}{q_1} \leqq s \leqq \frac{b}{q_1}} e^{-2\pi i s \frac{p'}{l}},$$

wo über die zu l teilerfremden p' zu summieren ist. Es ist aber

$$\left| \sum_{\frac{a}{q_1} \leqq s \leqq \frac{b}{q_1}} e^{-2\pi i s \frac{p'}{l}} \right| \leqq \frac{1}{2} \operatorname{Max}\left(\frac{l}{p'}, \frac{l}{l-p'}\right),$$

also

$$|A_{\mathrm{III}}| \leqq q_1 l (\log l + 1). \tag{17}$$

Aus (13), (14), (15), (16), (17) folgt aber die Behauptung.

Hilfssatz 4. *Wenn x, y, q natürliche Zahlen sind, $q > 1$, so ist*

$$|B_q'(x) - B_q'(y)| \leqq \frac{c_4(k) \log q}{q^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x > y$; aus (13) folgt dann unmittelbar die Behauptung, da

$$\left| \sum_{r=a}^{b} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} \right| \leqq \frac{1}{2} \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right).$$

Hilfssatz 5. *Zu jeder (ganzen, geraden) Zahl $k \geqq 8$ gibt es ein $c_5(k) > 0$, so daß für jede Primzahl $q_1 > c_5(k)$ und jedes Paar x, y von natürlichen Zahlen die Ungleichung gilt*

$$\sum_{q=q_1^2}^{\infty} |B'_q(x) - B'_q(y)| + \sum_{l=2}^{q_1-1} |B'_{lq_1}(x) - B'_{lq_1}(y)| < 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3 und 4 ist

$$\sum_{l=2}^{q_1-1} |B'_{lq_1}(x) - B'_{lq_1}(y)| + \sum_{q=q_1^2}^{\infty} |B'_q(x) - B'_q(y)|$$

$$\leqq \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} \sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}} (\log l + 1)}{l^{\frac{k}{2}-1}} + \frac{2}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}}{l^{\frac{k}{2}-2}} + c_4(k) \sum_{q=q_1^2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Dabei ist, wie man leicht nachrechnet,

$$\sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}} (\log l + 1)}{l^{\frac{k}{2}-1}} < \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_l^4 (\log l + 1)}{l^3} < 0{,}93$$

und für $q_1 > c_5(k)$ ist

$$\frac{2}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{l=2}^{q_1-1} \frac{\varepsilon_l^{\frac{k}{2}}}{l^{\frac{k}{2}-2}} < \frac{2}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2^4}{l^2} < \frac{0{,}01}{q_1^{\frac{k}{2}-1}},$$

$$c_4(k) \sum_{q=q_1^2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}} < c_4(k) \sum_{q=q_1^2}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{k}{2}-\frac{5}{4}}} < c_6(k) \frac{1}{q_1^{k-\frac{9}{2}}} < \frac{0{,}01}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}$$

$\left(\text{denn } k - \frac{9}{2} > \frac{k}{2} - 1\right)$. Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 6. *Es sei q_1 eine ungerade Primzahl; dann ist*

$$B'_{q_1}(x) = (-1)^{\frac{q_1-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{q_1 - s - 1}{q_1^{\frac{k}{2}}},$$

wenn $x \equiv s \pmod{q_1}$, $0 \leqq s \leqq q_1 - 1$.

Beweis. Nach (9) ist

$$B'_{q_1}(x) = (-1)^{\frac{q_1-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}}} \sum_{r=0}^{x} \sum_{p=0}^{q_1-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}}$$

und

$$\sum_{p=0}^{q_1-1}{}' e^{-2\pi i r \frac{p}{q_1}} = \begin{cases} q_1 - 1 & \text{für } q_1 \mid r \\ -1 & \text{für } q_1 \nmid r \end{cases}.$$

§ 4.

Beweis der Sätze 3a und 4a.

Wir denken uns jetzt ein gerades $k \geqq 8$ gewählt; x_1, D seien zwei natürliche Zahlen, $x_n = x_1 + (n-1)D$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $(\mathfrak{D})$ sei die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Es sei ξ ein fest gewählter Punkt von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, ε eine fest gewählte positive Zahl. Weiter wählen wir eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$|\xi - \sigma_k(x_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{40}.$$

Endlich wählen wir eine ungerade Primzahl $q_1 > D$, so daß $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$, was für $\varepsilon < c_7(k, \mathfrak{D})$ möglich ist. Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ alle Primzahlen, die von q_1 verschieden und kleiner als q_1^2 sind; weiter sei

$$\alpha_i = \left[\frac{\log q_1^2}{\log \pi_i}\right] \quad (\text{also} \quad \pi_i^{\alpha_i} < q_1^2 < \pi_i^{\alpha_i+1}).$$

Endlich setzen wir

$$M = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \ldots \pi_s^{\alpha_s}.$$

Wegen $(q_1, D) = 1$ ist es offenbar möglich, aus der Folge $(\mathfrak{D})$ zwei Teilfolgen

$$y_1, y_2, y_3, \ldots; \qquad z_1, z_2, z_3, \ldots$$

herauszugreifen, so daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$y_n \equiv z_n \equiv x_{n_0} \pmod{M}, \qquad y_n \equiv 0 \pmod{q_1}, \qquad z_n \equiv q_1 - 1 \pmod{q_1}.$$

Nach Hilfssatz 5, 6 gilt dann für $q_1 > \mathrm{Max}(c_8(k), 100)$ — also für $\varepsilon < c_8(k, \mathfrak{D})$ — einerseits

$$|\sigma_k(y_n) - \xi| < |\sigma_k(y_n) - \sigma_k(x_{n_0})| + \frac{\varepsilon}{40}$$

$$\leqq |B'_{q_1}(y_n) - B'_{q_1}(x_{n_0})| + \sum_{l=2}^{q_1-1} |B'_{lq_1}(y_n) - B'_{lq_1}(x_{n_0})|$$

$$+ \sum_{q=q_1^2}^{\infty} |B'_q(y_n) - B'_q(x_{n_0})| + \frac{\varepsilon}{40} \leqq 1{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} + \frac{\varepsilon}{40} < \varepsilon$$

und ebenso

$$|\sigma_k(z_n) - \xi| < \varepsilon,$$

andererseits

$$|\sigma_k(y_n) - \sigma_k(z_m)| \geqq |B'_{q_1}(y_n) - B'_{q_1}(z_m)| - 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}$$

$$= \frac{q_1 - 1}{q_1^{\frac{k}{2}}} - 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} > 0{,}04 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} > 0{,}01\,\varepsilon.$$

Es sei η ein Häufungswert der Folge $\sigma_k(y_1), \sigma_k(y_2), \ldots$; ζ ein Häufungswert der Folge $\sigma_k(z_1), \sigma_k(z_2), \ldots$; dann ist also

$$|\xi - \eta| \leqq \varepsilon, \quad |\xi - \zeta| \leqq \varepsilon, \quad |\eta - \zeta| \geqq \frac{\varepsilon}{100}.$$

Also: Zu jedem Punkt ξ von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ und zu jedem positiven $\varepsilon < c_8(k, \mathfrak{D})$ gibt es einen Punkt ξ' von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, so daß

$$\frac{\varepsilon}{200} \leqq |\xi - \xi'| \leqq \varepsilon.$$

Daraus folgt:

1. Jeder Punkt von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ ist Häufungspunkt von $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$, womit Satz 3a bewiesen ist.

2. Es seien (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2) zwei zu $\mathfrak{N}_{k,\mathfrak{D}}$ komplementäre Intervalle, $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \delta_2$. Wir wählen $\xi = \delta_1$ und setzen

$$\varepsilon = \min\left(\frac{c_9(k, \mathfrak{D})}{2}, \frac{\delta_1 - \gamma_1}{2}, \frac{\delta_2 - \gamma_2}{2}\right).$$

Der eben genannte Punkt ξ' liegt wegen $\gamma_1 < \delta_1 - \varepsilon$ rechts von ξ; also ist $\xi + \frac{\varepsilon}{200} \leqq \xi' \leqq \xi + \varepsilon$; daher muß wegen $\delta_2 - \gamma_2 > \varepsilon$ gelten $\gamma_2 \geqq \xi' \geqq \delta_1 + \frac{\varepsilon}{200}$, d. h.

$$\gamma_2 - \delta_1 \geqq \frac{\varepsilon}{200} = \min\left(\frac{c_9(k, \mathfrak{D})}{400}, \frac{\delta_1 - \gamma_1}{400}, \frac{\delta_2 - \gamma_2}{400}\right),$$

womit auch Satz 4a bewiesen ist.

§ 5.

Beweis des Satzes 7a.

Hilfssatz 7. *Es sei*

($\mathfrak{D}$)
$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen, $x_n = O(n)$.

Ich behaupte: Zu jeder Zahl $\beta < 1$ *gibt es eine Zahl* $c_9(\beta, \mathfrak{D})$, *so daß jede Primzahl* $q > c_9(\beta, \mathfrak{D})$ *folgende Eigenschaft besitzt:*

Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s$ *alle Primzahlen, die kleiner als* q^2 *und von* q *verschieden sind; es sei*

$$\alpha_i = \left[\frac{\log q^2}{\log \pi_i}\right] \quad (\text{also } \pi_i^{\alpha_i} < q < \pi_i^{\alpha_i + 1}).$$

Es werde

$$M(q) = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \ldots \pi_s^{\alpha_s}$$

gesetzt.

Dann gibt es eine ganze Zahl a und mehr als βq modulo q paarweise inkongruente Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_t$[16]*, so daß jedes der t Kongruenzsysteme*

$$x_n \equiv a \pmod{M(q)}, \qquad x_n \equiv b_i \pmod{q}$$

$(i = 1, 2, \ldots, t)$ für unendlich viele n erfüllt ist.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so könnte man eine Zahl β $(0 < \beta < 1)$ und eine wachsende Folge von Primzahlen $q_1, q_2, q_3, \cdots$ finden mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem ganzen $i > 0$ und jedem ganzen a gibt es *höchstens* βq_i modulo q_i paarweise inkongruente Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_t$, für welche das Kongruenzsystem

$$x_n \equiv a \pmod{M(q_i)}, \qquad x_n \equiv b_l \pmod{q_i}$$

für unendlich viele n erfüllt ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $q_{i+1} > q_i^2$; dann ist offenbar $M(q_{i+1})$ durch $q_i M(q_i)$ teilbar, also

$$M(q_{i+1}) = M(q_i)\, q_i^f N,$$

wo f, N ganze positive Zahlen sind, $(N, q_i) = 1$.

Es sei A_i die Anzahl derjenigen Restklassen modulo $M(q_i)$, die in $(\mathfrak{D})$ unendlich viele Repräsentanten besitzen.

Wenn eine Restklasse a modulo $M(q_{i+1})$ in $(\mathfrak{D})$ unendlich viele Repräsentanten besitzt, so hat auch die Restklasse a, modulo $M(q_i)$ betrachtet, und ebenso die Restklasse a, modulo q_i betrachtet, unendlich viele Repräsentanten in $(\mathfrak{D})$. Für die Klasse a gibt es also modulo $M(q_i)$ genau A_i Möglichkeiten, und für jede von diesen Möglichkeiten gibt es nach Voraussetzung höchstens βq_i Möglichkeiten modulo q_i. Also gibt es höchstens $\beta A_i q_i$ Restklassen modulo $M(q_i) q_i$, die in $(\mathfrak{D})$ unendlich viele Repräsentanten besitzen. Jede Restklasse modulo $M(q_i) q_i$ zerfällt aber modulo $M(q_{i+1})$ in genau $q_i^{f-1} N$ Restklassen; daher ist

$$A_{i+1} \leqq \beta A_i q_i q_i^{f-1} N = \beta A_i \frac{M(q_{i+1})}{M(q_i)}.$$

Daher ist, wegen $A_1 \leqq M(q_1)$,

$$A_i \leqq \beta^{i-1} M(q_i).$$

Es gibt eine Zahl $b > 0$, so daß $x_n < bn$ für alle n; wir wählen ein festes ganzes $i > 0$ so groß, daß $\beta^{i-1} < \frac{1}{b}$. In denjenigen Restklassen modulo $M(q_i)$, die in $(\mathfrak{D})$ nicht unendlich viele Repräsentanten haben, mögen K Glieder von $(\mathfrak{D})$ liegen. Es sei nun $l > 0$ ganz; die Anzahl

[16]) Also $t > \beta q$.

der x_n, die $\leqq l M(q_i)$ sind, ist höchstens

$$K + l A_i \leqq l \beta^{i-1} M(q_i) + K < \frac{1}{b} l M(q_i) - 1$$

für genügend große l. Daher ist für große l

$$x_{\left[\frac{1}{b} l M(q_i)\right]} > l M(q_i) \geqq b\left[\frac{1}{b} l M(q_i)\right],$$

gegen die Voraussetzung $x_n < bn$; w. z. b. w.

Beweis des Satzes 7a. Es sei

$$(\mathfrak{D}) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots$$

eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen, $x_n = O(n)$. Es sei q_1 eine Primzahl, $q_1 > c_5(k)$, $q_1 > c_9(0{,}995, \mathfrak{D})$, $q_1 > 200$. Es sei $M(q_1)$ die im Hilfssatz 7 definierte Zahl. Dann gibt es nach Hilfssatz 7 eine ganze Zahl a und mehr als $0{,}995\, q_1$ modulo q_1 paarweise inkongruente Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_t$, so daß jedes der t Kongruenzsysteme

$$x_n \equiv a \pmod{M(q_1)}, \qquad x_n \equiv b_i \pmod{q_1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, t)$ für unendlich viele Werte von n erfüllt ist. Wenn wir (was offenbar erlaubt ist) $0 \leqq b_i < q_1$ voraussetzen, so muß wegen $q_1 > 200$, $t > 0{,}995\, q_1$ unter den Zahlen b_i mindestens eine, sagen wir b_1, vorkommen, so daß

$$0 \leqq b_1 < 0{,}01\, q_1$$

und mindestens eine, sagen wir b_2, so daß

$$0{,}99\, q_1 \leqq b_2 < q_1.$$

Es gibt also in $(\mathfrak{D})$ zwei Teilfolgen

$$y_1, y_2, \ldots; \qquad z_1, z_2, \ldots,$$

so daß für alle natürlichen n

$$y_n \equiv z_n \equiv a \pmod{M(q_1)}, \qquad y_n \equiv b_1 \pmod{q_1}, \qquad z_n \equiv b_2 \pmod{q_1}.$$

Daher ist für alle natürlichen n

$$|\sigma_k(y_n) - \sigma_k(z_n)|$$

$$= \left|(B'_{q_1}(y_n) - B'_{q_1}(z_n) + \sum_{l=2}^{q_1-1} (B'_{lq_1}(y_n) - B'_{lq_1}(z_n)) + \sum_{q=q_1^2}^{\infty} (B'_q(y_n) - B'_q(z_n))\right|$$

$$\geqq 0{,}98 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} - 0{,}95 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}} = 0{,}03 \frac{1}{q_1^{\frac{k}{2}-1}}$$

(nach Hilfssatz 5 und 6). Also ist die Folge

$$\sigma_k(x_1), \sigma_k(x_2), \sigma_k(x_3), \ldots$$

nicht konvergent, w. z. b. w.

§ 6.

Beweis des Satzes 5a.

Für zwei ganze Zahlen a, b mit $a < b$, die größer als 1 und nicht kongruent 2 modulo 4 sind, ist $\frac{\varepsilon_a}{a} \neq \frac{\varepsilon_b}{b}$. Denn aus $\frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{\varepsilon_b}{b}$, $a < b$, würde $\varepsilon_a = 1$, $\varepsilon_b = 2$ folgen, also einerseits $b = 2a$, andererseits $a \equiv 1 \pmod 2$, $b \equiv 0 \pmod 4$, was einen Widerspruch liefert. Man kann also alle ganzen Zahlen, die größer als 1 und nicht kongruent 2 modulo 4 sind, in eine Folge

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

umordnen, so daß

$$\frac{\varepsilon_{a_1}}{a_1} > \frac{\varepsilon_{a_2}}{a_2} > \frac{\varepsilon_{a_3}}{a_3} > \ldots . \tag{18}$$

Es ist

$$\sigma_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_{a_n}(x),$$

wo die Reihe rechts absolut konvergiert.

Wir wählen nun eine ungerade Primzahl q und halten sie fest. Es sei $q = a_s$, also

$$\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n} > \frac{1}{q} \quad \text{für} \quad n < s, \qquad \frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n} < \frac{1}{q} \quad \text{für} \quad n > s. \tag{19}$$

Eine geläufige Limesbetrachtung ergibt infolge (18), (19) folgendes: Man kann ein $c_{10}(q)$ wählen, so daß für alle $k > c_{10}(q)$ folgendes gilt:

$$1. \quad \left| \sum_{n=1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} \right| > \frac{10}{q^{\frac{k}{2}-1}}$$

für alle Systeme von ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots, g_{s-1}, \tag{20}$$

für welche

$$|g_n| \leqq a_n^2 \ (n = 1, 2, \ldots, s-1), \quad \sum_{n=1}^{s-1} g_n^2 > 0. \ ^{17})$$

$$2. \quad \sum_{n=s+1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} < \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}}.$$

---

[17]) Man beweist dies wie folgt: Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_{s-1}$ ganz und fest gewählt; g_m sei die erste unter diesen Zahlen, die von Null verschieden ist; also $|g_m| \geqq 1$. Wegen (18) ist (bei wachsendem k)

$$\sum_{n=m+1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} = o\left(\left(\frac{\varepsilon_{a_m}}{a_m}\right)^{\frac{k}{2}}\right).$$

(Fortsetzung der Fußnote [17]) auf nächster Seite.)

Wir denken uns jetzt ein $k > c_{10}(q)$ fest gewählt. Nach (9) ist erstens

$$B'_{a_n}(x) = 0$$

für $x \equiv -1 \pmod{a_n}$, zweitens (ganz roh abgeschätzt)

$$|B'_{a_n}(x)| \leqq \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} a_n^2.$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$B'_{a_n}(x) = \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}} g_n(x),$$

wo $g_n(x)$ eine ganze Zahl ist, die also der Ungleichung

$$|g_n(x)| \leqq a_n^2$$

genügt.

Wir teilen jetzt die Folge aller natürlichen Zahlen x in Restklassen modulo $M = a_1 a_2 \dots a_{s-1}$; es seien $A_1, A_2, \dots, A_u$ diejenigen Restklassen, in welchen

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_{s-1}(x) = 0$$

(zu diesen Restklassen gehört z. B. die Restklasse $x \equiv -1 \pmod{M}$). In diesen Restklassen ist

$$\sum_{n=1}^{s-1} B'_{a_n}(x) = 0; \tag{21}$$

in allen übrigen (vielleicht existierenden) Restklassen ist aber nach 1.

$$\left|\sum_{n=1}^{s-1} B'_{a_n}(x)\right| > \frac{10}{q^{\frac{k}{2}-1}},$$

also nach 2. und Hilfssatz 6

$$\begin{aligned}|\sigma_k(x)| &\geqq \left|\sum_{n=1}^{s-1} B'_{a_n}(x)\right| - |B'_q(x)| - \left|\sum_{n=s+1}^{\infty} B'_{a_n}(x)\right| \\ &> \frac{10}{q^{\frac{k}{2}-1}} - \frac{1}{q^{\frac{k}{2}-1}} - \frac{1}{10\,q^{\frac{k}{2}}} > \frac{8}{q^{\frac{k}{2}-1}}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\left|\sum_{n=1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}}\right| > \left(\frac{\varepsilon_{a_m}}{a_m}\right)^{\frac{k}{2}} (1 + o(1)).$$

Wegen (19) ist also für genügend große k

$$\left|\sum_{n=1}^{s-1} g_n \left(\frac{\varepsilon_{a_n}}{a_n}\right)^{\frac{k}{2}}\right| > 10\,q \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Weil aber für (20) nur endlichviele Möglichkeiten bestehen, folgt daraus schon 1.

Jede Restklasse A_i $(i = 1, 2, \ldots, u)$ zerfällt in genau q Restklassen $A_{i,0}, A_{i,1}, \ldots, A_{i,q-1}$ modulo Mq (denn offenbar ist $q \nmid M$); es sei $x \equiv q - 1 - l \pmod q$ in $A_{i,l}$. In der Restklasse $A_{i,l}$ gilt nach Hilfssatz 6

$$B'_q(x) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}},$$

also wegen (21) und 2.

$$\left| \sigma_k(x) - (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}} \right| < \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}}.$$

In jedem der q abgeschlossenen Intervalle

$$\left\langle (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}} - \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}},\ (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{k}{2}} \frac{l}{q^{\frac{k}{2}}} + \frac{1}{10\, q^{\frac{k}{2}}} \right\rangle$$

$(l = 0, 1, \ldots, q-1)$ liegt also mindestens ein Punkt von $\mathfrak{N}_k$, im Rest des offenen Intervalls

$$\left(-\frac{8}{q^{\frac{k}{2}-1}}, \frac{8}{q^{\frac{k}{2}-1}} \right)$$

liegt aber kein Punkt von $\mathfrak{N}_k$. Daher besitzt $\mathfrak{N}_k$ für $k > c_{10}(q)$ mindestens $q+1$ komplementäre Intervalle, w. z. b. w.

§ 7.

Beweis des Satzes 8a.

Wir denken uns k fest. Es sei $f(n)$ eine monotone Funktion der natürlichen Zahl n; es sei $f(n) \to +\infty$ für $n \to +\infty$. Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{N}_k$ und $x_1, x_2, \ldots$ eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen mit $\sigma_k(x_n) \to \xi$.

Wir wählen erstens eine wachsende Folge

$$l_1, l_2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen so, daß

$$f(l_n) > (n+1)! \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dann wählen wir eine wachsende Folge

$$y_1, y_2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen folgendermaßen:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ \ldots,\ y_{l_1} = l_1;$$

wenn nun für ein $n \geqq 1$ die Zahl y_{l_n} bereits definiert ist, so sei

$$y_{l_n} < y_{l_n+1} \leqq y_{l_n} + (n+1)!, \qquad y_{l_n+1} \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!},$$

$$y_{l_n+i} = y_{l_n+i-1} + (n+1)! \qquad (i = 2, 3, \ldots, l_{n+1} - l_n).$$

Wenn nun ein ganzes $m > l_1$ vorliegt, so sei $l_n < m \leqq l_{n+1}$; dann ist

$$0 < y_m - y_{m-1} \leqq (n+1)! < f(l_n) \leqq f(m),$$

also

$$y_m - y_{m-1} = O(f(m)).$$

Zweitens ist für $l_n < m \leqq l_{n+1}$

$$y_m \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!},$$

also

$$B_q'(y_m) = B_q'(x_{n+1}) \quad \text{für} \quad q \leqq n+1,$$

also nach Hilfssatz 4

$$|\sigma_k(y_m) - \sigma_k(x_{n+1})| \leqq \sum_{q=n+2}^{\infty} |B_q'(y_m) - B_q'(x_{n+1})| \leqq c_4(k) \sum_{q=n+2}^{\infty} \frac{\log q}{q^{\frac{k}{2}-1}};$$

daher ist

$$\lim_{m=\infty} \sigma_k(y_m) = \lim_{n=\infty} \sigma_k(x_n) = \xi,$$

w. z. b. w.

Prag, den 21. Februar 1929.

(Eingegangen am 23. Februar 1929.)

Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów.

Es sei T eine Gleichgewichtsfigur rotierender, homogener Flüssigkeit. Bezeichnet man die Gaußsche Gravitationskonstante mit $\varkappa$, die (konstante) Dichte mit f, die Winkelgeschwindigkeit mit ω, so findet man nach Poincaré [1]) leicht, daß

$$\frac{\omega^2}{2\varkappa\pi f} \leqq 1 \tag{1}$$

sein muß.

[1]) Bulletin Astronomique 1885, S. 118; vgl. auch Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1902, S. 11. Der Beweis stützt sich auf die Greensche Formel, was gewisse Annahmen über die Beschaffenheit des Körpers T bedingt. Dabei wird die Voraussetzung $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$, wo $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale und U das Gesamtpotential bedeutet, gemacht. Einen ganz allgemeinen Beweis der Ungleichheit (1) [sogar in der schärferen Form $\frac{\omega^2}{2\varkappa\pi f} < 1$], die für eine jede Gleichgewichtsfigur gilt, gab Herr Lichtenstein in der Arbeit: Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. 1918, Erster Halbbd., S. 1120–1135, insb. S. 1129–1130. Hierbei wird nicht einmal die Voraussetzung $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ gemacht, vielmehr ergibt sich die Ungleichheit $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ als eine Folgerung.

Da wir die Ungleichheit (1) später benutzen werden, so sei mir hier erlaubt, den folgenden allgemeinen und kurzen Beweis von (1) mitzuteilen: Es sei P_0 ein Punkt des Randes S von T, für den die z-Koordinate ihren Höchstwert annimmt. In diesem Punkte und in seiner Nachbarschaft existiert gewiß eine stetige Normale. (Vgl. Lichtenstein, loc. cit. S. 1121.) Es existiert also im Punkte P_0 die Normalableitung $\frac{\partial U}{\partial n}$,

(Fortsetzung der Fußnote [1]) auf nächster Seite.)

Unter der Voraussetzung, daß der Körper T einfach zusammenhängend und *konvex* ist und daß die Schwerkraft $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf der Oberfläche S von T nicht verschwindet, bewies Herr Crudeli[2]) die schärfere Ungleichheit

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varkappa f} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Ich bemerkte nun, daß sich durch eine außerordentlich einfache Modifikation des Beweises von Herrn Crudeli zeigen läßt, daß *die Ungleichheit* (2) *für jede Gleichgewichtsfigur gilt, die aus einer endlichen Anzahl beschränkter Gebiete besteht*, wobei nur gewisse Regularitätsannahmen über den Rand S von T gemacht werden müssen.

Im folgenden werde ich den Beweis des Herrn Crudeli mit der nötigen geringfügigen Modifikation kurz reproduzieren.

Es sei T eine Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit, die aus den Teilgebieten T_j $(j=1,2,\ldots,q)$, $(q \geqq 1)$ besteht, die zunächst Punkte des Randes gemeinsam haben können. Es bedeute S_j den Rand von T_j.[3]) Als Rotationsachse wählen wir die z-Achse, als Schwerpunkt von T den Koordinatenursprung[4]).

Wir bezeichnen mit $V_j(P)$ den Wert des Gravitationspotentials des Teilkörpers T_j im Punkte P, mit $V(P)$ den Wert des Gravitationspotentials aller Teilkörper zusammen $\left(V(P)=\sum_j V_j(P)\right)$, mit $U(P)$ das gesamte,

---

und es ist $\frac{\partial U(P_0)}{\partial n} = -\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}$. Wie man unmittelbar sieht, ist $\frac{\partial U(P_0)}{\partial z} < 0$, so daß $\frac{\partial U(P_0)}{\partial n} > 0$ gilt. Es gibt also im Innern von T Punkte, in denen $U > C$ ist, unter C den Wert von U auf dem Rande S von T verstanden. Die Funktion U besitzt also im Innern von T ein Maximum. Es sei Q ein Punkt, in dem dieses erreicht wird. Die Ableitungen $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ dürfen im Punkte Q nicht positiv ausfallen, so daß $\Delta U(Q) \leqq 0$ folgt. Da aber $\Delta U = 2\omega^2 - 4\pi\varkappa f$ ist, so ist also $2\omega^2 - 4\pi\varkappa f \leqq 0$. Die Ungleichheit (1) ist demnach bewiesen.

Dieser Beweis gilt natürlich auch für nichthomogene Flüssigkeiten, wenn man unter f den Wert der Dichte im Punkte Q versteht. Wir haben also für nichthomogene Flüssigkeiten die Ungleichheit $\frac{\omega^2}{2\pi\varkappa f(Q)} \leqq 1$. Am Schluß der Arbeit wird eine andere Ungleichheit dieser Art abgeleitet werden.

[2]) Vgl. U. Crudeli, Nuovo limite superiore della velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figura di equilibrio, Atti dei Lincei **19** (1910), S. 666–668.

[3]) Er besteht aus einer einzigen Komponente. Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 1125.

[4]) Der Schwerpunkt von T muß auf der Rotationsachse liegen. Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 1121.

von den Gravitationskräften und von der Zentrifugalkraft herrührende Potential. Es ist

$$U(P) = V(P) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \tag{3}$$

unter x, y, z die Koordinaten von P verstanden.

Offenbar muß $U(P)$ auf S_j konstant sein. Die in Betracht kommende Konstante sei mit $U_0^{(j)}$ bezeichnet[5]). Die Ebene $z = 0$ ist Symmetrieebene von T, und sogar von jedem T_j.[6]) Außerhalb dieser Ebene besitzt jede Randkomponente S_j eine stetige Normale[7]).

Im folgenden machen wir bezüglich T die *folgenden Regularitätsannahmen*:

1. Bleibt der Punkt P auf S_j oberhalb der Ebene $z = 0$ und konvergiert er gegen einen bestimmten Punkt auf der Ebene $z = 0$, so konvergiert die Normale zu S_j in P gegen eine bestimmte Grenzlage.

2. Der Schnitt von S_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ mit der Ebene $z = 0$ besitzt eine stetige Normale[7a]).

Es sei bemerkt, daß durch diese Voraussetzungen durchaus nicht ausgeschlossen ist, daß die einzelnen Teilkörper T_j Punkte des Randes gemeinsam haben[8]). Insbesondere sind unsere Voraussetzungen gewiß erfüllt, wenn die einzelnen S_j stetig gekrümmt sind. Wir wollen aber diese Einschränkung nicht machen, da sie zur Folge hätte, daß die einzelnen Teilgebiete T_j getrennt liegen[9]).

Wir wenden nun die Greensche Formel auf die Funktionen $U(P)$ und $\frac{1}{r}$[10]) für irgendeinen Teilbereich T_j an. Ist S_j selbst von der

---

[5]) Haben die Teilgebiete T_j, $T_{j'}$ Punkte des Randes gemeinsam, so ist natürlich $U_0^{(j)} = U_0^{(j')}$.

[6]) Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 1123.

[7]) Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 1125. Wie sich, ausgehend von diesem Resultat, ohne weiteres zeigen läßt, ist S_j außerhalb der Symmetriebene stetig gekrümmt, ja die Koordinaten der Punkte von S_j haben als Funktionen geeigneter Gaußscher Parameter stetige Ableitungen aller Ordnungen. Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, Math. Zeitschr. 1 (1913), S. 229–284, insb. S. 270.

[7a]) Man kann noch allgemeiner voraussetzen, daß jede der Schnittkurven endlich viele Ecken besitzt.

[8]) Die fraglichen Punkte liegen stets in der Ebene $z = 0$. Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 1127.

[9]) Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [1]), S. 1127.

[10]) Crudeli, loc. cit. S. 666.

Klasse Ah [11]), so sind die Voraussetzungen des Greenschen Satzes erfüllt, da die Funktion $U(P)$ stetige Ableitungen erster Ordnung überall und gewiß stetige Ableitungen zweiter Ordnung im Innern von T besitzt[12]). Unter Zugrundelegung unserer allgemeineren Voraussetzungen folgt die Richtigkeit der anzuwendenden Formel durch eine leichte Überlegung (das Verfahren des Abrundens der Kanten) ohne weiteres.

Es ist also für alle P in T_j:

$$(4)\quad 4\pi U(P) = \int_{S_j} \Big[U(M) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial}{\partial n_M} U(M) \Big] d\sigma_M - \int_{T_j} \frac{1}{r_{MP}} \Delta U(M)\, d\tau_M.$$

Nun ist aber in T_j

$$(5)\quad \Delta U = \Delta V + 2\omega^2 = \Delta V_j + 2\omega^2 = 2\omega^2 - 4\pi\varkappa f,$$

da $V_i(P)$ für $i \neq j$ eine in T_i reguläre Potentialfunktion darstellt.

Aus (4) und (5) folgt wegen $\int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_M = 4\pi$:

$$4\pi U(P) = 4\pi U_0^{(j)} - \int_{S_j} \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial}{\partial n_M} U(M)\, d\sigma_M - \frac{2\omega^2 - 4\pi f\varkappa}{f\varkappa} V_j(P)\ [13]).$$

Wir wählen jetzt einen beliebigen Punkt M_0 auf S_j [14]), bezeichnen die Innennormale in M_0 mit n_0 und wählen P auf n_0. Wir finden

$$(6)\quad 4\pi \frac{\partial U(P)}{\partial n_0} = -\frac{\partial}{\partial n_0} \int_{S_j} \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial U(M)}{\partial n_M} d\sigma_M - \frac{2\omega^2 - 4\pi f\varkappa}{f\varkappa} \frac{\partial}{\partial n_0} V_j(P).$$

Nähert sich nun der Punkt P unbegrenzt dem Punkte M_0 an, so ist nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie

---

[11]) Nach der Bezeichnung von Herrn Lichtenstein. Vgl. seinen Encyklopädieartikel über Potentialtheorie, II C 3, S. 181 ff. Die Bezeichnung „Klasse Ah" bedeutet, daß man es mit einer Fläche zu tun hat, die eine stetige Normale besitzt, deren Richtungskosinus der Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten $\lambda < 1$ genügen.

[12]) Wenn S_j stetig gekrümmt ist, so sind, da jetzt die einzelnen Teilgebiete getrennt liegen, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ldots$ auch noch auf S_j stetig (und erfüllen eine H-Bedingung).

[13]) Vgl. Crudeli, loc. cit. [2]), S. 667.

[14]) Außerhalb der Ebene $z = 0$.

$$(7)\quad \lim_{P\to M_0}\frac{\partial}{\partial n_0}\int_{S_j}\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial U(M)}{\partial n_M}d\sigma_M = -2\pi\frac{\partial}{\partial n_0}U(M_0) + \int_{S_j}\frac{\partial}{\partial n_M}U(M)\frac{\cos(r_{M_0M},n_0)}{r^2_{M_0M}}d\sigma_M,$$

wobei der Vektor r_{M_0M} von M_0 nach M gerichtet ist[15]).

Aus (6) und (7) ergibt sich

$$2\pi\frac{\partial}{\partial n_0}U(M_0)+\int_{S_j}\frac{\partial}{\partial n_M}U(M)\frac{\cos(r_{M_0M},n_0)}{r^2_{M_0M}}d\sigma_M = -\frac{2\omega^2-4\pi\varkappa f}{\varkappa f}\cdot\frac{\partial}{\partial n_0}V_j(M_0)$$

und hieraus unter Berücksichtigung von (3):

$$(8)\quad 2(\omega^2-\pi f\varkappa)\frac{\partial}{\partial n_0}U(M_0)+\varkappa f\int_{S_j}\frac{\partial}{\partial n_M}U(M)\frac{\cos(r_{M_0M},n_0)}{r^2_{M_0M}}d\sigma_M = \omega^2(\omega^2-2\pi f\varkappa)\frac{\partial}{\partial n_0}R^2(M_0)+\frac{2\omega^2-4\pi\varkappa f}{\varkappa f}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{q}\frac{\partial}{\partial n_0}V_i(M_0),$$

wobei $R(M)$ den Abstand des Punktes M von der z-Achse bedeutet.

Bezeichnen wir nun mit $M_0^{(j)}$ einen derjenigen Punkte von T_j, in denen die z-Koordinate ihren Höchstwert annimmt, demnach die Innennormale $n_0^{(j)}$ zu S_j in $M_0^{(j)}$ der z-Achse parallel ist. Offenbar gilt

$$\frac{\partial}{\partial n_0^{(j)}}R^2(M_0^{(j)})=0,$$

mithin

$$(9)\quad 2(\omega^2-\pi f\varkappa)\frac{\partial}{\partial n_0^{(j)}}U(M_0^{(j)})+\varkappa f\int_{S_j}\frac{\partial}{\partial n_M}U(M)\frac{\cos(r_{M_0^{(j)}M},n_0^{(j)})}{r^2_{M_0^{(j)}M}}d\sigma_M = \frac{2\omega^2-4\pi\varkappa f}{\varkappa f}\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{q}\frac{\partial}{\partial n_0^{(j)}}V_i(M_0^{(j)}).$$

Der vorgenannten Bestimmung des Punktes $M_0^{(j)}$ zufolge liegt das ganze Gebiet T_j auf einer und derselben Seite der Tangentialebene von S_j im Punkte $M_0^{(j)}$. Man sieht darum sofort, daß

$$\frac{\partial}{\partial n_0^{(j)}}V_i(M_0^{(j)})\gtrless 0 \qquad (i=1,2,\ldots,q)$$

---

[15]) Es ist leicht einzusehen, daß diese Formel auch unter Zugrundelegung unserer allgemeineren Voraussetzungen richtig ist. Natürlich darf M_0 nicht auf der Ebene $z=0$ angenommen werden. Für den regulären Fall siehe z. B. Goursat, Cours d'Analyse 3, Ed. III (1925), S 281—284.

ist. (Für $i + j$ folgt dies einfach aus der Symmetrieeigenschaft der Teilkörper T_i.) Es ist mithin

$$(10)\quad 2(\omega^2 - \pi f \varkappa)\frac{\partial}{\partial n_0^{(j)}} U(M_0^{(j)}) + \varkappa f \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_M} U(M) \frac{\cos(r_{M_0^{(j)}M}, n_0^{(j)})}{r^2_{M_0^{(j)}M}} d\sigma_M \leqq 0,$$

weil nach dem Poincaréschen Satze $2\omega^2 - 4\pi\varkappa f \leqq 0$.

Der Winkel, der in der Formel (10) unter dem Integralzeichen steht, ist seinem absoluten Betrage nach nicht größer als $\frac{\pi}{2}$, sein Kosinus ist also positiv.

Nun hat aber Herr Lichtenstein die beiden folgenden Sätze bewiesen[16]):

a) die Schwerkraft, d. h. die Resultierende aus der Attraktions- und der Zentrifugalkraft, ist in jedem Punkte von S_j entweder Null oder nach dem Innern des Körpers T_j gerichtet.

b) In den Punkten der Begrenzung von T_j die außerhalb der Symmetrieebene $z = 0$ liegen, ist die Schwerkraft von Null verschieden.

Demnach ist

$$\frac{\partial}{\partial n_0^{(j)}} U(M_0^{(j)}) > 0,$$

$$\int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_M} U(M) \frac{\cos(r_{M_0^{(j)}M}, n_0^{(j)})}{r^2_{M_0^{(j)}M}} d\sigma_M > 0,$$

da die Funktion unter dem Integralzeichen nichtnegativ und nicht identisch Null ist.

Aus (10) folgt nunmehr:

$$\omega^2 - \pi\varkappa f < 0,$$

womit die Crudelische Ungleichheit bewiesen ist.

Anmerkung 1. Aus unseren Betrachtungen folgt, daß die Schranke $\omega^2 < \pi\varkappa f$ auch dann richtig bleibt, wenn die Flüssigkeit eine in jedem Teilgebiete T_j zwar konstante, aber vom Gebiete zum Gebiete wechselnde Dichte f_j hat. Es müssen dann die Ungleichheiten

$$\omega^2 < \pi\varkappa f_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, q)$$

bestehen.

Bezeichnet man nun mit f^* den kleinsten Wert von f_j, so folgt die Ungleichheit

$$\omega^2 < \pi\varkappa f^*.$$

Anmerkung 2. Für *konvexe* einfach zusammenhängende Gleichgewichtsfiguren *nichthomogener* Flüssigkeiten hat Herr Crudeli in einer

[16]) Vgl. loc. cit. [1]) S. 1129 und S. 1132.

anderen Abhandlung[17]) bewiesen, daß

$$\omega^2 \leqq \pi \varkappa f_{\mathrm{Max}}$$

sein muß.

Man kann sich wie vorstehend leicht überzeugen, daß dieser Satz allgemein gilt. Bezüglich T sind natürlich dieselben Voraussetzungen wie vorhin zu machen. Auch die Verschärfung der Anmerkung 1. kann auf diesen Fall ausgedehnt werden. Bezüglich der Dichte ϱ genügt es, das Erfülltsein der Hölderschen Bedingung vorauszusetzen. Auch Sprünge der Dichte, etwa längs geschlossener, stetig gekrümmter Flächen, können zugelassen werden.

Leipzig, im Februar 1929.

---

[17]) Vgl. U. Crudeli, Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei rotanti, limitati di una figura di equilibrio. Atti della Acc. dei Lincei **19** (1910), 2, S. 41—43.

(Eingegangen am 6. März 1929.)

Eine elementare Bemerkung zur reellen Analysis.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Es sei T irgendein von einer Fläche mit stetiger Normale S begrenztes Gebiet in dem Raume der Variablen x, y, z. Bekanntlich läßt sich S von einer endlichen Anzahl Stücke Σ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ „dachziegelartig" überdecken, so daß 1. jeder Punkt von S im Innern von mindestens einem Σ_k enthalten ist, 2. In Σ_k die Gleichung der Fläche S in der Form

$$(1) \qquad z = z_k(x, y) \quad \text{oder} \quad x = x_k(y, z) \quad \text{oder} \quad y = y_k(x, z),$$

unter $z_k(x, y)$, $x_k(y, z)$, $y_k(x, z)$ gewisse nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen verstanden, geschrieben werden kann. Natürlich können auch alle drei Möglichkeiten gleichzeitig vorliegen.

Es sei P ein Punkt von S, und es möge (ν) die Außennormale zu S in P bezeichnen. Um (ν) als Mittellinie läßt sich gewiß ein Kreiszylinder Π legen, so daß derjenige in Π befindliche, zusammenhängende Teil von S, der P enthält, von einer jeden Parallelen zu (ν) in einem und nur in einem Punkte getroffen wird [1]).

Es sei jetzt $F(x, y, z)$ irgendeine in $T + S$ erklärte, daselbst nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion. Für manche Zwecke, so z. B. in der Hydromechanik, ist es von Interesse, $F(x, y, z)$ *derart über S hinaus stetig fortzusetzen, daß auch die partiellen Ableitungen erster Ordnung sich in dem erweiterten Definitionsbereich stetig verhalten.* Dies läßt sich, wie in den folgenden Zeilen gezeigt werden soll, auf unendlich mannigfaltige Art und Weise erreichen.

---

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Bemerkungen über die Flächen mit stetiger Normale, Bulletin international de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres 1928, S. 7–13.

Es möge sich der Einfachheit halber nur um die Fortsetzung längs eines hinreichend kleinen Stückes von S in der Umgebung des Punktes P handeln. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir uns den Koordinatenursprung in P, die positive Richtung der z-Achse in (ν) hineingelegt denken. Die Gleichung der Fläche kann alsdann dem soeben in Erinnerung gebrachten Satze zufolge in der Form $z = f(x, y)$ geschrieben werden, unter $f(x, y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion verstanden. Wie man unmittelbar sieht, läßt sich in der Ebene $(x\text{-}y)$ eine Kreisfläche $K + C$ um P als Mittelpunkt beschreiben, so daß der dreidimensionale Bereich $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$:

$$(2) \qquad (x, y) \text{ in } K + C, \qquad z = f(x, y) + \zeta, \qquad -h \leqq \zeta \leqq 0,$$

sofern nur h hinreichend klein ist, in $T + S$ liegt. In $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ ist $F(x, y, z)$ gewiß nebst seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig.

Wir definieren jetzt eine Funktion $\Phi(x, y, z)$ in dem Bereiche $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$:

$$(3) \qquad (x, y) \text{ in } K + C, \qquad -h \leqq \zeta \leqq h, \qquad \zeta = z - f(x, y)$$

durch folgende Festsetzungen:

$$(4) \quad \Phi(x, y, z) = \begin{cases} F(x, y, z) \text{ für } -h \leqq \zeta \leqq 0, \text{ d. h. für } (x, y, z) \text{ in } \mathfrak{T} + \mathfrak{S}, \\ 2F(x, y, f(x, y)) - F(x, y, f(x, y) - \zeta) \\ \qquad = 2F(x, y, f(x, y)) - F(x, y, 2f(x, y) - z) \\ \qquad\qquad \text{für } 0 \leqq \zeta \leqq h. \end{cases}$$

Man verifiziert leicht, daß in $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ die Funktion $\Phi(x, y, z)$ sich stetig verhält und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, mithin allen Forderungen der Aufgabe genügt. Übrigens nimmt die Funktion $\Phi(x, y, z) - F(x, y, f(x, y))$ in den beiden in bezug auf S „spiegelbildlich" gelegenen Punkten $f(x, y) + \zeta_0$, $f(x, y) - \zeta_0$, $|\zeta_0| \leqq h$ allemal entgegengesetzt gleiche Werte an.

(Eingegangen am 15. April 1929.)

Nachtrag zu meiner Arbeit „Über die Carathéodorysche Verschärfung des großen Picardschen Satzes“[1]).

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Herr Ostrowski ist so freundlich, in mein Gedächtnis zurückzurufen daß er 1. am 16. 12. 1924 in der Göttinger mathematischen Gesellschaft einen Vortrag hielt, dessen wichtigstes Ergebnis in Bd. 34 (1926), S. *103*, des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung abgedruckt ist und den von mir loc. cit. bewiesenen Satz enthält, 2. in einem Briefe an mich vom 25. 12. 1924 den Beweis seines tieferen Ergebnisses skizziert hatte. Den vollen Beweis wird er jetzt in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften veröffentlichen.

Der von mir loc. cit. veröffentlichte Satz ist also natürlich Herrn Ostrowski zuzuschreiben.

Göttingen, den 10. Juli 1929.

---

[1]) S. 208—210 dieses Bandes.

(Eingegangen am 11. Juli 1929.)